ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ОЛИМПИАДА 2010

1. Найти общее решение уравнения $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$.

2. Найти в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ фундаментальное решение оператора $\mathcal{L} = \frac{d^4}{dx^4} + 16$.

3. Найти $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$, где $u(x,t)$ — решение задачи Коши $\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \\ u(x,0) = \operatorname{arctg} x. \end{cases}$

4. Найти решение задачи Коши:
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} - u_x \\ u(x,y,0) = \sin^2(x-2y). \end{cases}$$

5. Может ли нетривиальное решение краевой задачи
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$
иметь при некотором $x^* \in (0,\pi)$ счетное множество нулей при $t \in (0,+\infty)$.

6. При каких A существует нетривиальное решение в виде многочлена задачи Дирихле
$$\begin{cases} \Delta u = A, \ \text{где } A = \mathrm{const} \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$
где Ω — равносторонний треугольник на плоскости XoY (см. рис. 1).

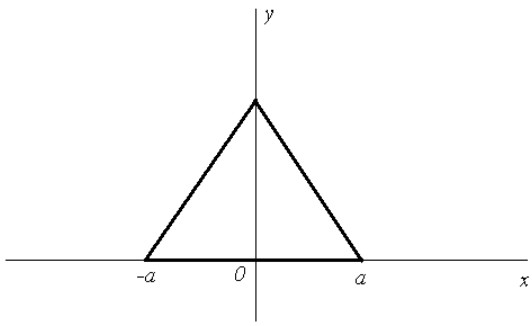

Рис. 1: Ω

7. Имеет ли решение краевая задача и единственно ли оно?

$a)$ $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x<0 \\ u|_{t=ax} = 0, \quad a>0, \end{cases}$ $\qquad b)$ $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x<0 \\ u|_{t=ax} = 0, \quad a>0. \end{cases}$

8. Рассмотрим задачу Дирихле

   a) $\begin{cases} \Delta u = f(x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$ где $f(x) \in F$, F — множество функций, плотное в $\mathcal{L}_2(\Omega)$;

   b) $\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \end{cases}$ где $\varphi(x) \in \Phi$, Φ — множество функций, плотное в $\mathcal{L}_2(\partial\Omega)$.

   Плотно ли в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ множество решений?

9. Пусть

   $w(y)$ — решение задачи $\begin{cases} \Delta w = 0 \ \text{ в } \mathbb{R}^n \setminus \bar{G}_0, \\ w|_{\partial G_0} = 1, \\ w \to 0 \ \text{ при } |y| \to \infty, \end{cases}$ $\qquad \theta(y)$ — решение задачи $\begin{cases} \Delta\theta = 0 \ \text{ в } \mathbb{R}^n \setminus \bar{G}_0, \\ \frac{\partial\theta}{\partial\nu}\big|_{\partial G_0} = 1, \\ \theta \to 0 \ \text{ при } |y| \to \infty, \end{cases}$

   Докажите, что $\displaystyle\int\limits_{\partial G_0} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma \cdot \int\limits_{\partial G_0} \theta d\sigma \geq S^2(\partial G_0)$. Когда достигается равенство?