МЕЖДУНАРОДНАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА "ЛОМОНОСОВ" ПО УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 20.04.2011

1. Решить задачу Коши–Гурса, построив область на плоскости, где это решение определяется однозначно: $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x, 0) = x^2$, $u_t(x, 0) = 2x$, $u(x, 6x) = 49x^2 + x$, $0 < x < 7$, $0 < t < 6$.
2. Можно ли "раскачать" ограниченную струну до сколь угодно большой амплитуды, прилагая к одному из ее концов стремящуюся к нулю силу? (Другой конец закреплен.)
3. Пусть $u(x)$ - гармоническая функция, заданная вне шара $|x| < 1$. Может ли она убывать быстрее любого $|x|^{-m}$ при $|x| \to \infty$, где m - произвольное положительное число, и не быть тождественно равной нулю?
4. Корректна ли задача Дирихле для уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$ в круге?
5. Даны уравнения а) $u_{tt} - u_{xx} = 0$, б) $u_{tt} + u_{xx} = 0$, в) $u_{tt} + u_{xx} + u = 0$, г) $u_{tt} + u_{xx} - u = 0$ на плоскости (x, t) и равносторонний треугольник T на плоскости (x, t) со стороной а. Рассматриваются решения указанных уравнений, равные нулю на границе T. Какое из этих решений может быть отлично от 0 в T?
6. Постройте последовательность гладких функций, сходящихся к $\delta''(x)$ в $D'(\mathbf{R}^1)$.
7. Рассматривается решение уравнения $u_{tt} = u_{xx}$, $t \geq 0$, $x \geq 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x, 0) = u_0(x)$, $u_t(x, 0) = u_1(x)$ и граничному условию $u(0, t) = \mu(t)$. Необходимо вычислить значение решения в точке (x,t). На каких интервалах необходимо знать значения данных $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu(t)$, чтобы можно было вычислить значение решения а) в точке (x,t)=(10,15), б) в точке (x,t)=(15,10)?
8. Единственно ли решение задачи $u_{xx} + u_{yy} - u_x - 3u_y = f(x, y)$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, $\Omega = [0, 1] \times [0, 3]$? .
9. Рассматривается ограниченное решение уравнения $u_t = u_{xx}$, $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$, удовлетворяющее начальному условию $u(x, 0) = \left(1 + \frac{1}{|x|+1}\right)^x$. Найти $\lim_{t\to\infty} u(x, t)$.
10. Существует ли в $\mathbf{R}^2$ решение задачи $u_{xy} + u = 1$, $u|_\Gamma = 2$, $u_y|_\Gamma = 0$, $\Gamma = \{(x, y) : y = x^2\}$?