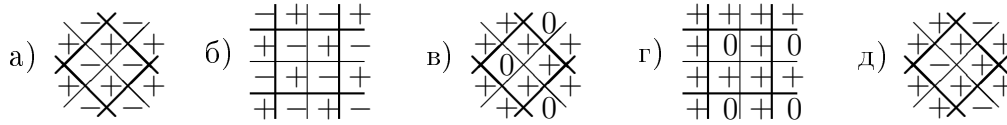


УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ОЛИМПИАДА 2012

1. Может ли классическое решение уравнения струны $u_{tt} = u_{xx}$ на \mathbb{R}^2 иметь знаки, как изображено на рисунках а)–д)? (Везде плоскость замощена квадратами 2 клетки \times 2 клетки. Оси координат параллельны знакам $+$.)



2. Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + f(t, x), \quad t \in [0, \infty), \quad x \in [0, \pi], \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

Пусть $f \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

- а) Верно ли, что $u(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$?
 б) Тот же вопрос для задачи (1),(2) с краевыми условиями $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0$.
 в) Тот же вопрос для задачи (1),(2) с краевыми условиями

$$(u_x - \alpha u)|_{x=0} = (u_x + \alpha u)|_{x=\pi} = 0, \quad \alpha > 0.$$

3. Рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt} + \alpha u_t = u_{xx}, \quad \alpha > 0$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x).$$

- а) Убывает ли амплитуда решения при $t \rightarrow \infty$, если начальные условия $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ финитны?
 б) Справедлива ли экспоненциальная оценка скорости убывания решения при $t \rightarrow \infty$?

4. Может ли решение уравнения теплопроводности с "памятью"

$$u_t = u_{xx} - C \int_0^t u_{xx} e^{-(t-\tau)} d\tau.$$

неограниченно возрастать при $t \rightarrow +\infty$?

5. Пусть $u(x, y)$ — решение уравнения

$$\Delta u = 0 \quad \text{в полуполосе} \quad [0, \infty) \times [0, \pi],$$

удовлетворяющее условиям $u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0$.

- а) Докажите, что если $|u| < M$, то $u(x, y)$ экспоненциально убывает при $x \rightarrow +\infty$.
 б) Пусть $u(x, y)$ убывает по x быстрее любой экспоненты. Верно ли, что $u(x, y) \equiv 0$?

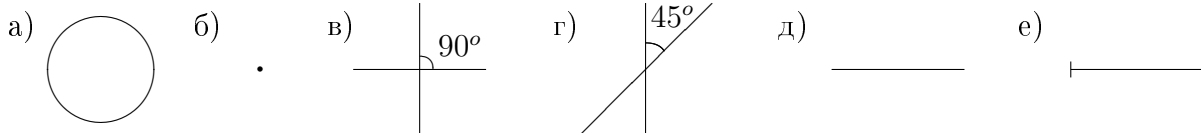
6. Пусть $\Omega = (0, 1)^n$ — куб в n -мерном пространстве. Докажите, что задача

$$\begin{cases} \Delta u + x_n^{-\frac{1}{2}} u = f, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

имеет не более одного решения.

См. на обороте

7. Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция на плоскости. Может ли ее линия уровня иметь одну из следующих форм:



8. Может ли у неограниченной струны ($-\infty < x < \infty$) целый отрезок находиться в покое в процессе движения струны, начиная с некоторого момента? Одна точка?

Тот же вопрос для ограниченной струны с закрепленными концами.

9. Решить в D' уравнение

$$y''' + 2y'' + y' = \delta(x).$$

10. Пусть $u(x, t)$ — решение в $[0, 1] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x(1-x)^2.$$

Найти $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] dx$.