УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 2013

1. Найти решение $y'' + y = \delta^{(2013)}(x)$ из $D'(\mathbb{R})$.

2. Рассматривается задача Коши $\begin{cases} u_{tt} = \Delta_x u, \quad t \in (0,\infty), \;\; x \in \mathbb{R}^3, \\ u\big|_{t=0} = 0, \;\; u_t\big|_{t=0} = f(x). \end{cases}$

   Функция f неотрицательна, и отлична от нуля в серповидной области: расположенной внутри круга радиуса 1, и вне круга радиуса 2, таких, что граничные окружности этих кругов пересекаются в диаметрально противоположных точках окружности радиуса 1. Указать все те значения t, при которых сумма значений u, вычисленных в центрах этих кругов, отлична от нуля.

3. Пусть $D = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ — шар в $\mathbb{R}^3$, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к D. Функция $u(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u(x,y,z) = x^{2013} + y^{2013} + z^{2013} + 2013 \qquad \text{в } D$$

   и условию $u(0,0,0) = 0$.

   а) При каких значениях параметра a эта функция может удовлетворять краевому условию $u\Big|_{\partial D} = a$?

   б) Тот же вопрос про краевое условие $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial D} = a$.

4. Рассмотрим колебания ограниченной струны с закрепленной границей:

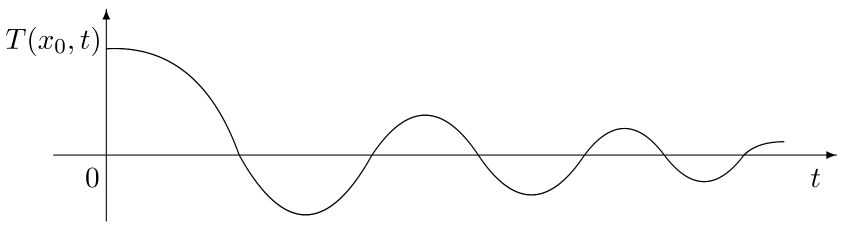
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad t \in (0,\infty), \;\; x \in (0,l), \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \;\; u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

   Некоторый отрезок $[a,b] \subset (0,l)$ находится в покое в процессе колебаний струны, то есть $u(x,t) \equiv 0$ при $(x,t) \in [a,b] \times [0,\infty)$. Можно ли утверждать, что $u(x,t) \equiv 0$ в $(x,t) \in [0,l] \times [0,\infty)$, то есть что вся струна покоится?

5. Хорошо известно, что решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченной области единственно. Будет ли оно единственно в полосе $(x_1, x_2) \in (-\infty, \infty) \times (0,l)$ на плоскости? А если рассматривать только ограниченные решения?

6. Пусть $T(x,t)$ — температура ограниченного тела с нулевыми условиями на границе. Может ли температура колебаться в некоторой внутренней точке x_0 тела, именно, может ли $T(x_0,t)$ иметь такой график:

$$\begin{cases} T_t = T_{xx}, \quad t \in (0,\infty), \;\; x \in (0,1), \\ T\big|_{t=0} = \varphi(x), \\ T\big|_{x=0} = T\big|_{x=1} = 0. \end{cases}$$



7. Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u + f(t,x), \quad t \in (0,\infty), \;\; x \in \Omega, \qquad |f(t,x)| < \varepsilon, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u\big|_{\partial\Omega \times [0,\infty)} = 0. \end{cases}$$

   а) Можно ли за конечное время остудить тело до нулевой температуры $u(\tau, x) \equiv 0$, $x \in \Omega$?

   б) Можно ли за конечное время нагреть тело в заданной точке $x_0 \in \Omega$ с нулевой температуры $\varphi(x) \equiv 0$ до заданной температуры $u(\tau, x_0)$, $|u(\tau, x_0)| > M$?

8. Найти общее решение уравнения $u_{xy} + x u_x + y u_y + (1 + xy)u = 0$.

9. Найти множество на плоскости (x,t), в котором однозначно определено решение задачи Гурса, и получить явный вид решения:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$
$$u(x,0) = \sin x, \;\; x \geqslant 0, \qquad u(x,x) = x, \;\; 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

10. Построить функцию Грина для дифференциального оператора $Lu = u'' - \dfrac{2}{x^2}\, u$, $u(1) = 0$, $u(x)$ ограничена на интервале $(0,1)$.

11. Можно ли произвольную функцию из $L_2(\Omega)$ ($\Omega-$ ограниченная область) приблизить в $L_2(\Omega)$ решениями

   а) уравнения Лапласа;

   б) уравнения колебаний струны;

   в) уравнения теплопроводности?