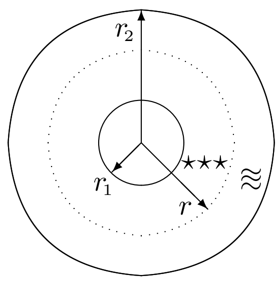
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 2014

1. Найти решение $y'' - 2y' + 5y = \delta^{(2014)}(x)$ из $D'(\mathbb{R})$.

2. Пусть $u(x_1, x_2, x_3)$ — решение задачи Дирихле в шаре $\{|x| < 2\}$ в $\mathbb{R}^3$:
$$\Delta u = 0 \text{ при } |x| < 2, \quad u\Big|_{|x|=2} = x_1^2.$$
Найти $u(0,0,0)$.

3. Найти $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x,y)$, где $u(t,x,y)$ — решение задачи Коши
$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \;\; t > 0, \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad u\Big|_{t=0} = \frac{\left(x^2 + x|x|\right)\,\cos^2 y}{1 + x^2}$$

4. Сечение трубки представляет собой кольцо с внутренним и внешним радиусами r_1 и r_2, между ними находится вода. Изнутри трубка охлаждается до температуры $-T_1 < 0$, снаружи поддерживается температура $T_2 > 0$. Какой толщины лед появится на внутренней стенке? Теплопроводности льда и воды будем считать равными.
$$\begin{cases} u_t(t,\vec{x}) = \Delta_x u(t,\vec{x}), \quad t > 0, \;\; r_1 < |x| < r_2, \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \\ u\Big|_{|x|=r_1} = -T_1, \;\; u\Big|_{|x|=r_2} = T_2, \end{cases}$$
$$r: \; \lim_{t\to\infty} u(t,\vec{x})\Big|_{|x|=r} = 0.$$


5. На плоскости (x,t) найти область определенности решения задачи Коши-Гурса и само решение:
$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$
$$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = e^x, \quad 0 < x < 1,$$
$$u_x(0,t) = 1, \quad 0 < t < 1.$$

6. Корректна ли задача
$$\mathcal{L}u = 0 \text{ в } K, \qquad u\Big|_{\partial K} = \varphi(t,x),$$
$\varphi(t,x)$ — непрерывная функция, $K = (0,\pi) \times (0,\pi)$, если

а) $\mathcal{L} \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$,

б) $\mathcal{L} \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$?

7. Рассматривается краевая задача для уравнения колебаний струны
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < t < T, \;\; 0 < x < \pi,$$
$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \;\; u_t\Big|_{t=0} = u_1(x), \quad 0 < x < \pi,$$
$$u\Big|_{x=\pi} = \varphi(t), \;\; \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=\pi} = \psi(t), \quad 0 < t < T.$$
Корректна ли эта задача?

8. Пусть $\varphi(x)$ — заданная финитная функция. Можно ли найти такую непрерывную функцию $f(x)$, чтобы решение задачи
$$u_t = u_{xx} \text{ при } x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) = f(x)$$
удовлетворяло условию $u(T,x) = \varphi(x)$? (Иначе говоря, можно ли так нагреть стержень, что в момент времени $t = T$ распределение температуры станет $\varphi(x)$?)

9. Могут ли семейства кривых
$$y = x^3 + C_1, \quad y = -x^5 + C_2, \quad -\infty < C_1, C_2 < \infty$$
быть характеристиками гиперболического на плоскости уравнения?