УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 2016

1. Найти решение уравнения $u'' - 2u' + 5u = \delta\,(x - 2016)$ из $D'(\mathbb{R})$.

2. Вычислить (в пространстве $D'(\mathbb{R})$) производную функции $f(x) = \frac{\Theta(x)}{\sqrt{|x|}}$. Является ли f' регулярной обобщенной функцией?

3. Найти все решения уравнения $x^3 u' + 2u = 0$ в пространстве $D'(\mathbb{R})$.

4. Назовем $''$бегущей волной$''$ решение уравнения вида $u(t,x) = \varphi(t - Cx)$, где $\varphi(y)$ — ограниченная функция. При каких $C \in \mathbb{R}$ уравнения
$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{и} \quad u_{tt} + u_{xxxx} = 0$$
имеют в качестве решения бегущие волны?

5. Можно ли утверждать, что решение краевой задачи
$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad u(0,t) = 0,\ \ u(\pi,t) = \alpha(x), \qquad u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ x \in (0,\pi),$$
$|\alpha(x)| \leqslant C$, ограничено при $t \in (0,\infty)$?

6. Будет ли корректной задача Коши для уравнения колебаний струны
$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u(0,t) = f(t), \quad u_x(0,t) = g(t)$$
в пространствах:
$$\begin{aligned}&(f(t), g(t)) \mapsto u(x,t)\\ &a) f \in C^2(\mathbb{R}), \quad g \in C^1(\mathbb{R}), \quad u \in C([0,T] \times \mathbb{R}),\\ &b) f \in C^2(\mathbb{R}), \quad g \in C^1(\mathbb{R}), \quad u \in C([0,+\infty) \times \mathbb{R})?\end{aligned}$$

7. Найти число решений задачи
$$\Delta u(x_1,x_2,x_3) = a, \qquad |x| < 1,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=1} = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 1$$
при различных значениях параметра a.

8. Пусть $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению и начальному условию
$$u_t = \alpha x u_x + \sigma^2 x^2 u_{xx}, \qquad u(0,x) = \varphi(x),$$
$\varphi(x)$ — гладкая финитная функция при $x \in (0,\infty)$, $\varphi(x) \geqslant 0$. Докажите, что $u(t,x) \geqslant 0$.

9. Пусть $u(t,x)$ — решение задачи
$$u_t = u_{xx}, \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0, \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x).$$
Известно, что $u(T,x) = 0$ при некотором $T > 0$. Следует ли отсюда, что $u(t,x) \equiv 0$ на $[0,T] \times [0,\pi]$?

10. Гармоническая функция $u(x,y)$ удовлетворяет на сторонах угла l_1 и l_2 условиям $u\big|_{l_1} = u\big|_{l_2} = 0$, а также неравенству $|u(x,y)| \leqslant C_n r^n$ для любого $n = 1, 2, \ldots$; r — расстояние до вершины угла O. Докажите, что $u(x,y) \equiv 0$ в угле.