УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 2017

1. Найти решение уравнения $y'' + 4y' + 4y = \delta'(x + 2017)$ из $D'(\mathbb{R})$.

2. Пусть функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+, \qquad u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x),$$

$\operatorname{supp} u_0, u_1 \in (-R, R)$, $0 < R < \infty$. Пусть

$$E_k(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} (u_t)^2 dx, \qquad E_p(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} (u_x)^2 dx.$$

а) Доказать, что $E_k + E_p = \mathrm{const}$.

б) Найти $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{E_k}{E_p}$.

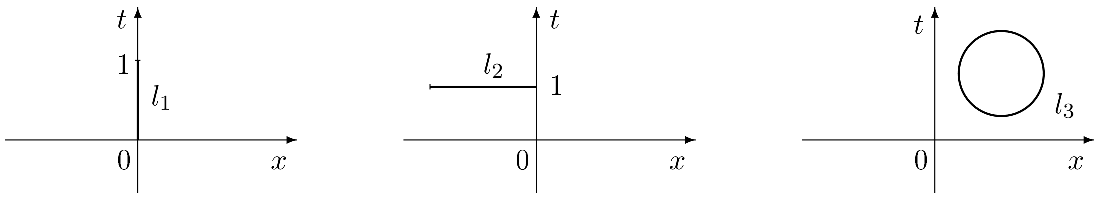
3. Найти формулу для решения задачи

$$u_{tt} = u_{xx} - (u_t)^2 + (u_x)^2, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+, \qquad u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x).$$

4. Рассмотрим три уравнения:

$$u_{tt} + u_{xx} = 0, \qquad u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad u_t - u_{xx} = 0,$$

а также линии l_1, l_2 и l_3 на плоскости (x, t). Могут ли они являться линиями уровня $\{u(t, x) = 0\}$ для каждого из этих уравнений? (шесть вопросов)



5. Отрезок $[0, 1]$ в точке 1 нагревается по закону $u(t, 1) = t$, левый конец охлаждается: $u(t, 0) = 0$, функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению $u_t - u_{xx} = 0$. Каждая ли точка отрезка $(0, 1]$ нагревается до сколь угодно большой температуры?

6. Пусть $u(t, x)$ — решение краевой задачи

$$u_{tt} + u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \infty), \qquad u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

а) Докажите, что $u(t, x) \to 0$ при $t \to \infty$.

б) Верно ли утверждение задачи для уравнения $u_{tt} + u_t = u_{xx} + u$?

7. При каких $p > 1$ уравнение $\Delta u = f$, $x \in R^n$ имеет не более одного решения на множестве функций $u \in C^2(R^n) \cap L_p(R^n)$?

8. Найти решение краевой задачи для уравнения Пуассона в кольце:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad 0 \le x^2 + y^2 \le 4, \qquad u(0, 0) = \left(\frac{x}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{x^2+y^2=4} = 0.$$

9. Известно, что если модуль градиента гармонической функции двух переменных достигает минимума во внутренней точке области, то минимум равен нулю (в гидродинамике это означает, что локальный минимум скорости плоскопараллельного потенциального — т.е., с полем скорости $\overrightarrow{v} = \operatorname{grad} \varphi$ — течения несжимаемой жидкости может быть только нулевым.) Верно ли это утверждение для трехмерного случая?