

**УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 2018**

1. Найти решение уравнения $y'' - 4y' + 5y = \delta^{(2018)}(x)$ из $D'(\mathbb{R})$.

2. Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция и

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) dx < C,$$

где C не зависит от $y \in \mathbb{R}$. Докажите, что $u(x, y) \equiv 0$.

3. Корректна ли задача Коши

$$u_t + u_{xxx} + u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x)?$$

4. Пусть

$$u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in \Pi \equiv [0, \pi] \times [0, \infty), \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \\ |u(x, t)| \leq C \exp(-t^2).$$

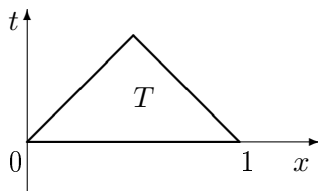
Верно ли, что $u(x, t) \equiv 0$?

5. Существует ли функция в $\Pi = [0, \pi] \times [0, \infty)$ такая, что

$$u_t = u_{xx} + u_x, \quad (x, t) \in \Pi, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0,$$

$$\left| u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) \right| \geq t, \quad t \geq 0?$$

6. Корректна ли задача Дирихле для волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$ в треугольнике T , $u|_{\partial T} = \varphi(x, t)$, φ — произвольная непрерывная функция?



7. Найти наибольшую область, в которой существует единственное решение задачи, и найти это решение:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x, 0) = 2x^3, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 6, \quad u|_{t=5x} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

8. Найти общее решение уравнения

$$u_{xy} - 5u_x + 4u_y - 20u = 0.$$

9. В шаре Ω единичного радиуса рассматривается система

$$\Delta u = -v, \quad \Delta v = u.$$

Докажите, что она имеет единственное обобщенное решение (u, v) из пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющее однородным условиям Дирихле на границе.

10. Пусть

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad |\varphi(x)| \leq M, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) dx < \infty.$$

Найти $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$.