

МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 29 апреля 2021 года

1. Найдите решение из $D'(\mathbb{R})$ уравнения

$$y'' - 2y' + 2y = \theta(x) + \delta(2021x), \quad \text{где } \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

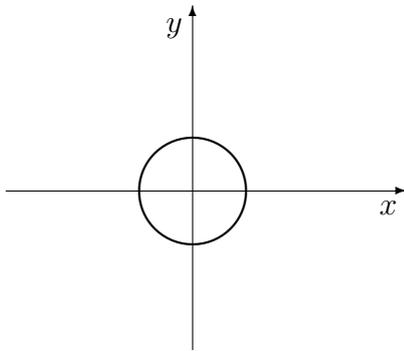
2. Известно, что для решения уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ справедлив принцип максимума

$$\max_{x \in \Omega} |u| \leq \max_{x \in \partial\Omega} |u|,$$

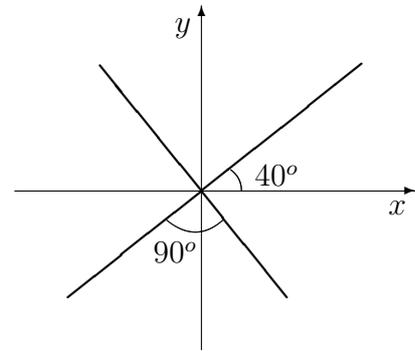
Ω — ограниченная область. Верно ли это для решения уравнения $\Delta u + u = 0$? Ответ обоснуйте.

3. Могут ли линии уровня $\{u(x, y) = 0\}$ гармонической в \mathbb{R}^2 функции иметь вид:

A)



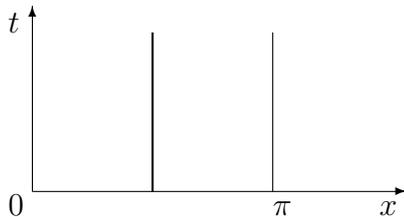
B)



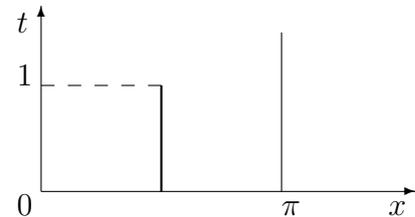
Ответ обоснуйте.

4. Могут ли линии уровня $\{u(t, x) = 0\}$ решения уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ в $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, \pi]$ иметь вид:

A)



B)



Ответ обоснуйте.

5. Известно, что решение краевой задачи

$$u_t = u_{xx} + \mu \cdot u, \quad x \in [0, \pi], \quad t > 0,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),$$

неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$. При каких $\mu = \text{const}$ это возможно? Ответ обоснуйте.

6. Пусть $u(t, x)$ — решение задачи

$$u_t = u_{xx} + f(t, x), \quad (t, x) \in [0, \infty) \times [0, \pi],$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),$$

$|f(t, x)| \leq \varepsilon$. Существует ли такое $T > 0$ и такая функция $f(t, x)$, что $u(t, x) = 0$ при всех $t > T$ и всех $x \in [0, \pi]$? Если да, то оцените время T сверху и снизу через параметр ε .