УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 2022

1. Найдите решение из $D'(\mathbb{R})$ уравнения

$$y'' + 4y = \delta(-2022\,x) - \theta(x), \quad \text{где} \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2. Может ли существовать нетривиальное решение уравнения $u_t = u_{xx}$, $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,\infty)$ с краевыми условиями $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$ такое, что $u(\pi/\sqrt{2022}, t) = o(e^{-\beta t})$ при $t \to +\infty$ $\forall \beta > 0$?

3. a) Решение уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ограничено в полуполосе $\Pi = \{(x,y) \in (0,\infty) \times (0,1)\}$ и равно нулю на $\partial\Pi$. Верно ли, что $u \equiv 0$ в Π?

   b) Тот же вопрос для решения уравнения теплопроводности $u_x = u_{yy}$.

   c) Тот же вопрос для решения уравнения колебаний струны $u_{xx} - u_{yy} = 0$.

4. Усреднением функции $f(x)$ называется функция $f_1(x)$:
   $f_1(x) = f * \omega = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(y)\omega(x-y)\,dy,$
   где ядро усреднения:
   $\omega(x) = \begin{cases} Ce^{-1/(1-|x|^2)} & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| \geq 1, \end{cases} \quad , \quad C = \left(\displaystyle\int_{|x|<1} e^{-1/(1-|x|^2)} dx \right)^{-1}.$

   Найти $f_1(x)$ $(x \in \mathbb{R}^3)$ для следующих функций:
   $f(x) = x_1, \quad f(x) = x_1^2 - x_1 x_2 - x_3^2.$

5. Как известно, гармонические функции u и v в ограниченной области Ω удовлетворяют следующему принципу сравнения:

$$\text{если } u \leq v \text{ на } \partial\Omega, \text{ то } u \leq v \text{ в } \Omega.$$

   В какой из следующих формулировок принцип сравнения также верен:

   (a) если $|u| \leq v$ на $\partial\Omega$, то $|u| \leq v$ в Ω;
   (b) если $u \leq |v|$ на $\partial\Omega$, то $u \leq |v|$ в Ω?

6. Найти классическое решение задачи Коши

$$u_t = u_{xx} + (u_x)^2, \quad u|_{t=0} = \ln(1 + \sin^2 x), \quad u = u(t,x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

7. Решите задачу в классе функций $C^2(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(x), \psi(x) \in C^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} u_t = v_x, \\ v_t = u_x, \\ u(0,x) = \varphi(x), \\ v(0,x) = \psi(x). \end{cases}$$

8. Дан круг $\Omega = \{|x| < R\}$. При каждом $\alpha \in \mathbb{R}$ найдите все $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, являющиеся решениями начально-краевой задачи

$$\sum_{i,j=1}^{2} (a_{ij} u_{x_j})_{x_i} = 0, \quad \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} u_{x_j} n_i \Big|_{|x|=R} = \alpha?$$

   Здесь $n = (n_1, n_2)$ – внешняя нормаль к сфере $\{|x| = R\}$, матрица (a_{ij}) задана формулой

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ x_1 & 1 + x_1^2 \end{pmatrix}.$$

9. Пусть $\Omega = \{x^2 + y^2 < 1\}$

   При каких $a \in \mathbb{R}$ для любого $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющего уравнению $ayu_x + xu_y = 0$, выполнен принцип максимума:

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u?$$