УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 2023

1. Найти все решения $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ уравнения
$$(u' - u) \cdot \sin 2023x = 0.$$

2. Докажите, что любое классическое решение $u(x,t)$ задачи
$$u_t = u_{xx} \quad \text{в полосе } [0,\pi] \times \mathbb{R}_+, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$
удовлетворяет оценке $|u| \leq Ce^{-\gamma t}$, где C, γ – некоторые положительные константы.

3. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи Коши
$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
с финитными начальными условиями. Верно ли, что
$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx + t \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx?$$

4. Найти решение задачи Коши:
$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$
$$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = x^2.$$

5. При каких $p \in (1,\infty)$ и $n \geq 2$ в существуют отличные от нуля гармонические функции, лежащие в пространстве $L_p(R^n)$?

6. Может ли струна с трением остановиться сама? Отклонение струны от положения равновесия описывается уравнением
$$u_{tt} + \alpha u_t = u_{xx} \quad \text{при } (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+$$
с граничными условиями
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$
Мы говорим, что струна остановилась, если $u \not\equiv 0$, однако есть такое $T > 0$, что $u(x,t) = 0$ при $t > T$.

7. Пусть $F(x) : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ – ограниченная непрерывная функция.

   Найти в области $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ все ограниченные решения задачи
$$u_t = \frac{1}{2}x^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = F(x),$$
дважды непрерывно дифференцируемые по x и один раз по t внутри области $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ и непрерывные на множестве $\{(x,t) : \ x > 0, \ t \geqslant 0\}$.

8. Докажите, что существует $f(x,t)$, $|f| < \varepsilon$, т.ч. решение задачи
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t) \quad \text{в } (0,\pi) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \sin 2x, \quad u_t(x.0) = 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$
обращается в тождественный ноль при $t \geqslant T$, где $T > 0$ – некоторая постоянная.

9. Может ли гармоническая функция в полосе $[0,\pi] \times \mathbb{R}_+$ не быть тождественным нулем и убывать при $y \to +\infty$ быстрее любой экспоненты?

10. Будет ли какой-то из нагретых стержней остывать при $t \to \infty$?
$$(a) \begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(0,t) + \alpha u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0. \end{cases}$$
Мы говорим, что стержень остывает, если $\|u(x,t)\|_{L_2((0,\pi))} \to 0 \quad t \to \infty$.

    Решения предполагаются классическими.

ОТВЕТЫ

1. $u = ce^x + \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}, k\geqslant 0} c_k e^{x-\frac{\pi k}{2023}}\theta\left(x - \frac{\pi k}{2023}\right) - \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}, k<0} c_k e^{x-\frac{\pi k}{2023}}\theta\left(\frac{\pi k}{2023} - x\right)$, $c, c_k \in \mathbb{R}$.

2. —

3. Да

4. $u = y(x-y)^2 + y\cos(x-y) + \sin(x-y)$.

5. Нет.

6. Нет.

7. $u = \dfrac{e^{\ln|x|/2 - t/8}}{\sqrt{2\pi t}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-|\ln|x|-\eta|^2}{2t}} e^{-\eta/2} F(-e^{\eta}) d\eta$.

8. —

9. Да. Например, $u = \mathrm{Re}\ \exp\left(-\exp\left(\frac{y - i(x-\pi/2)}{2}\right)\right)$.

10. Стержень (b) при $\alpha \in (-\infty, 0] \cup (\pi, +\infty)$.