Метод А. Ф. Филиппова вычисления в уме экспоненты двумерной матрицы

Теорема. *Экспонента двумерной матрицы A с собственными значениями*[1]

$$\lambda_{1,2} \equiv \alpha \pm \beta \qquad (2\alpha \equiv \operatorname{tr} A, \quad \beta \equiv \sqrt{\alpha^2 - \det A})$$

может быть вычислена в виде линейной комбинации матриц A и E

$$e^A = e^\alpha \big(p(\beta)E + q(\beta)(A - \alpha E)\big)$$

с коэффициентами[2]*, зависящими только от чисел α и β:*

$$(p(\beta),\, q(\beta)) = \begin{cases} (\operatorname{ch}\beta,\, \operatorname{sh}\beta/\beta), & \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ (\cos\gamma,\, \sin\gamma/\gamma), & \beta = i\gamma \notin \mathbb{R}, \\ (1,\, 1), & \beta = 0. \end{cases}$$

Пример. В случае $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ имеем

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i,\ \alpha = 1,\ \beta = 2i,\ \gamma = 2,\ p(\beta) = \cos 2,\ q(\beta) = \sin 2/2,\ A - \alpha E = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow e^A = e^1 \left(\cos 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) = e \begin{pmatrix} -\cos 2 + \sin 2 & 2\sin 2 \\ -\sin 2 & \cos 2 + \sin 2 \end{pmatrix}$$

Доказательство.

1. Прежде всего, искомая экспонента представляется в виде

$$e^A = e^{\alpha E + B} = e^{\alpha E} e^B = e^\alpha e^B,$$

где матрица

$$B = A - \alpha E$$

имеет *нулевой след*, поэтому ее собственные значения взаимно противоположны и равны

$$\pm\sqrt{-\det B} = \pm\sqrt{-(a_{11} - \alpha)(a_{22} - \alpha) + a_{12}a_{21}} =$$
$$= \pm\sqrt{-\alpha^2 + (a_{11} + a_{22})\alpha - a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}} = \pm\beta.$$

2. Далее, для нахождения экспоненты e^B матрицы B заметим, что последняя принадлежит к одному из следующих трех простейших типов:

   - либо матрица $B \equiv \beta J$ имеет ненулевые *действительные* собственные значения $\pm\beta$, тогда матрица $J = B/\beta$ имеет собственные значения ± 1 и ее жорданова форма диагональна, поэтому имеем равенства[3]

$$J^2 = E, \quad J^3 = J, \quad J^4 = E, \quad \ldots,$$

откуда получаем

$$e^B = E + \frac{\beta J}{1!} + \frac{\beta^2 E}{2!} + \frac{\beta^3 J}{3!} + \frac{\beta^4 E}{4!} + \ldots =$$
$$= \left(1 + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + \ldots\right) E + \left(\frac{\beta}{1!} + \frac{\beta^3}{3!} + \ldots\right) J = \operatorname{ch}\beta \cdot E + \operatorname{sh}\beta \cdot \frac{A - \alpha E}{\beta};$$

[1] Которые по формуле корней квадратного трехчлена получаются как раз в таком виде.

[2] В формулах для этих коэффициентов первая строка — основная, а две следующие получаются из нее подстановкой $\beta = i\gamma$ или, соответственно, предельным переходом при $\beta \to 0$.

[3] Которые после перехода к жордановой форме легко проверяются, а при возвращении к исходному базису уже не меняются.

- либо матрица $B \equiv \gamma I$ имеет ненулевые *чисто мнимые* собственные значения $\pm i\gamma$ и ее жорданова форма также диагональна, тогда матрица $I = B/\gamma$ имеет собственные значения $\pm i$ и ее жорданова форма также диагональна, поэтому

$$I^2 = -E, \quad I^3 = -I, \quad I^4 = E, \quad \ldots,$$

откуда получаем

$$e^B = E + \frac{\gamma I}{1!} - \frac{\gamma^2 E}{2!} - \frac{\gamma^3 I}{3!} + \frac{\gamma^4 E}{4!} + \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{\gamma^2}{2!} + \ldots\right) E + \left(\frac{\gamma}{1!} - \frac{\gamma^3}{3!} + \ldots\right) I = \cos\gamma \cdot E + \sin\gamma \cdot \frac{A - \alpha E}{\gamma};$$

- либо матрица $B \equiv N$ имеет *нулевые* собственные значения, а ее жорданова форма либо чисто нулевая, либо с единственной единицей в правом верхнем углу, тогда $N^2 = 0$, поэтому сразу получаем

$$e^B = E + N = 1 \cdot E + 1 \cdot (A - \alpha E).$$