Вклад А.Ф. Филиппова в теорию дифференциальных включений и основные этапы ее развития

А.А. Толстоногов

Институт динамики систем и теории управления,
Сибирское отделение Российской академии наук,
Иркутск, Россия

e-mail: aatol@icc.ru

T — отрезок числовой прямой, либо полупрямая, либо вся прямая, X — конечномерное пространство,

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \;\; x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$F(t, x)$ — многозначное отображение на подмножестве из $T \times X$ с замкнутыми значениями,

$$\dot{x}(t) \in \overline{\mathrm{co}} F(t, x(t)), \;\; x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

$$\dot{x}(t) \in \mathrm{ext}\, \overline{\mathrm{co}}\, F(t, x(t)), \; x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

$$\dot{x}(t) \in \overline{\mathrm{ext}}\, \overline{\mathrm{co}}\, F(t, x(t)), \; x(t_0) = x_0, \tag{4}$$

$\overline{\mathrm{co}}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества, ext — совокупность крайних (экстремальных) замкнутого выпуклого множества, $\overline{\mathrm{ext}}$ — замыкание множества ext.

Решением Каратеодори включения (1) называется абсолютно непрерывная функция $x(t)$, производная $\dot{x}(t)$ которой п.в. удовлетворяет (1). Правильное решение — это абсолютно непрерывная функция, представимая в виде $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} y(\tau) d\tau$, где $y(t)$ — правильная функция, удовлетворяющая включению $y(t) \in F(t, x(t))$ всюду.

Классическое решение — это непреывно дифференцируемая функция, производная $\dot{x}(t)$ которой удовлетворяет (1) всюду.
Включения (1) с выпуклозначной правой частью были введены впервые и независимо друг от друга в середине 30-х годов Маршо (Marchoud A., 1934) и Зарембой (Zaremba S.C., 1934).
В определении решения Маршо брал непрерывную функцию, контингентная производная $D^+x(t)$ которой всюду удовлетворяет

$$D^+x(t) \subset F(t, x(t)).$$

Заремба определял решение как непрерывную функцию, паратингентная производная $D^{++}x(t)$ которой всюду удовлетворяет

$$D^{++}x(t) \subset F(t, x(t)).$$

$D^{+}x(t_0)$ — совокупность всех пределов

$$\lim_{t_n \to t_0} \frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0}.$$

$D^{++}x(t_0)$ — совокупность всех пределов

$$\lim_{\substack{t_n \to t_0 \\ s_n \to t_0}} \frac{x(t_n) - x(s_n)}{t_n - t_s}, \quad s_n \neq t_n.$$

Включение (1) реанимировали, когда была установлена связь между дифференциальными включениями и управляемыми системами

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{5}$$

Полагая

$$F(t, x) = \{f(t, x, u); \quad u \in U(t)\}, \tag{6}$$

мы перейдем к дифференциальному включению (1) с $F(t, x)$ (6).

При соответствующих предположениях относительно $f(t, x, u)$, если мы зададим измеримую функцию $u(t) \in U(t)$ п.в., то получим соответствующую выбранному управлению траекторию $x(t)$ управляемой системы (5) как решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)). \tag{7}$$

Ясно, что $x(t)$ является решением дифференциального включения (1) с $F(t, x)$ (6). Наоборот, если $x(t)$ является решением включения (1) с $F(t, x)$ (6), то найдется ли измеримая функция $u(t) \in U(t)$, что будет иметь место равенство (7)? Ответ на этот вопрос дает классическая лемма А. Филиппова [Вестник МГУ, сер. 1. Математика, механика, 1959, №2, 25–32].

Лемма.

Пусть $f(t,u)$ непрерывна, $U(t)$ — замкнуто, ограничено, полунепрерывно сверху, $F(t) = \{f(t,u) : u \in U(t)\}$. Тогда для измеримой функции $y(t)$, $y(t) \in F(t)$ п.в. существует измеримая функция $u(t) \in U(t)$ такая, что

$$y(t) = f(t, u(t)) \text{ п.в.}$$

После того, как А.Ф. Филиппов [Матем. сборник, 1960, т. 51, №1, 99-128] ввел весьма удобное и имеющее наглядную интерпретацию определение решения уравнения с разрывной правой частью, решения таких уравнений стали трактовать как решение дифференциальных включений с выпуклой правой частью, порожденной правой частью дифференциального уравнения.

1. Включения

T. Wazewski. On an optimal control problem (in connection with the theory orientor field of A. Marchoud and S.K. Zaremba. Differential equations and their applications. Proc. conf. held in Prague, September 1962, Prague, 1963.

Обозначим через $\mathcal{R}_F(x_0), \mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0), \mathcal{R}_{\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}}F(x_0), \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{ext}}\,\overline{\mathrm{co}}}F(x_0)$ множества включений (1)–(4), определенных на T. Объединение графиков функций из $\mathcal{R}_F(x_0)$ называется интегральной воронкой, которую обозначим через $\mathcal{L}_F(x_0)$.

Пусть $\mathcal{BL}_F(x_0)$ — граница множества $\mathcal{L}_F(x_0)$. Сечение интегральной воронки гиперплоскостью $t = \tau$ называется множеством достижимости из точки x_0 в момент времени τ.

Гипотезы $H(F), F(t,x) \in \operatorname{comp} X,\ t \in T,\ x \in X,$

1) отображение $F(t,x)$ — типа Каратеодори;
2) $\sup\{\langle x, v\rangle;\ v \in F(t,x)Y \leq C(t)(1+||x||)^2$, $C(t)$ суммируема.

Гипотеза $H_1(F)$ $F(t,x) \in \operatorname{conv} X$.

Теорема 1.1.

Пусть выполняются гипотезы $H(F), H_1(F)$. Тогда

$\mathcal{P}_1$. $\mathcal{R}_F(x_0)$ и $\mathcal{R}_F(B) = \{\cup\mathcal{R}_F(x_0),\ x_0 \in B\}$ являются непустыми компактами при любых $x_0 \in X$ и любых компактах $B \subset X$.

$\mathcal{P}_2$ (свойство Кнезера). Множество достижимости при любом $t \in T$ является связным компактом.

$\mathcal{P}_3$. Если замкнутое множество $Q \subset T \times X$ достижимо из точки x_0, т.е. $\mathcal{L}_F(x_0) \cap Q \neq \emptyset$, то оно достижимо за минимальное время, т.е. существует минимум τ таких, что $\mathcal{L}(x_0) \cap Q \cap \Theta(\tau) \neq \emptyset$, где $\Theta(\tau)$ — гиперплоскость $t = \tau$.

$\mathcal{P}_4$ (свойство Хукухары). Если $(t_1, x_1) \in \mathcal{BL}_F(x_0)$, $t_1 > t_0$, то существует $x(\cdot) \in \mathcal{R}_F(x_0)$, такое, что $(t, x(t)) \in \mathcal{BL}_F(x_0)$, $t \in [t_0, t_1]$ и $x_1 = x(t_1)$ (свойство периферической достижимости).

$\mathcal{P}_5$. Если точка $x_1 \in X$ достижима из точки x_0, то она периферически достижима за минимальное время.
Отметим, что если выполняются гипотезы $H_1(F)$, $H(F), 2)$ и отображение $(t, x) \to F(t, x)$ непрерывно, то решения Маршо и Зарембы включения (1) совпадают с решениями Каратеодори [Wazewski. Bull. Acad. Polon. Sci; Ser. Sci. Math. Ast, Phys. 9 (1961), 685-867].

Определение.

$x(t)$ называется квазитраекторией включения (1), если существует последовательность $x_i(t)$ $i \geq 1$, такая, что:
$x_i(t)$ абсолютно непрерывны,
$x_i'(t)$ равномерно ограничены, п.в. на T, $x_i(t) \to x(t)$, $t \in T$,
$d(x_i'(t), F(t, x_i(t)) \to 0$ п.в. на T.

Определение.

$x(t)$ называется строгой квазитраекторией включения (1), если существует последовательность $x_i(t)$ траекторий (1) такая, что:

$$x_i(t) \to x(t)\ t \in T.$$

Замечание.

Строгая квазитраектория является также квазитраекторией, а каждая траектория является квазитраекторией.

Множества квазитраекторий включений (1), (2), (4) обозначим $\mathcal{R}^*_F(x_0)$, $\mathcal{R}^*_{\overline{\mathrm{co}}F}(x_0)$, $\mathcal{R}^*_{\mathrm{ext}\,\overline{\mathrm{co}}F}(x_0)$.

Теорема 1.2.

При выполнении гипотезы $H(F)$ имеют место равенства

$$\mathcal{R}^*_F(x_0) = \mathcal{R}^*_{\overline{\mathrm{ext}}\,\overline{\mathrm{co}}F}(x_0) = \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}F}(x_0)$$

и для $\mathcal{R}^*_F(x_0)$, $\mathcal{R}^*_{\overline{\mathrm{ext}}\,\overline{\mathrm{co}}F}(x_0)$, $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}F}(x_0)$ справедливы свойства $\mathcal{P}_1$–$\mathcal{P}_5$.

Может случиться, что при выполнении гипотезы $H(F)$ существует функция $x(\cdot) \in \mathcal{R}^*_F(x_0)$, которая не является сильной квазитраекторией (1) [Plis A. Bull. Acad. Polon. Sci; Ser. Sci. Math. Ast, Phys. 11 (1963) 369-370].

2. Управляемые системы

Управляемая система $S(f, U)$ — это пара — функция $f(t, x, u)$ и многозначное отображение $U(t, x)$

$$f : T \times X \times Y \to X, \;\; U : T \times X \to Y,$$

где Y — конечномерное пространство.
Решение системы $S(t, U)$ — это пара $(x(t), u(t))$ такая, что $x(t)$ абсолютно непрерывна, $u(t)$ измерима,
$x'(t) = f(t, x(t), u(t))$ п.в. $x(t_0) = x_0$
$u(t) \in U(t, x(t))$ п.в.
При этом $u(t)$ называется управлением, а $x(t)$ — траекторией, соответствующей управлению.
Обозначим через $Tr\, S(f, u)(x_0)$ множество траекторий $S(F, U)$.

Гипотеза $\mathcal{K}(f, U)$:

1) функция $f(t, x, u)$ типа Каратеодори,

2) $U(t, x) \in \operatorname{comp} Y$ и типа Каратеодори,

3) $\langle x, f(t, x, u) \rangle \leq C(t)(1 + ||x||^2)$, п.в. $t \in T$, $x \in X$, $u \in U(t, x)$,

4) $||U(t, x)||_Y \leq m$, $m \geq 0$.

Определения

Функция $x(t)$, $t \in T$ называется квазитраекторией $S(f, U)$, если существует последовательность абсолютно непрерывных функций $x_i(t)$ и последовательность измеримых функций $u_i(t)$ таких, что
$x_i(t)$, $i \geq 1$ равномерно ограничены п.в. на T;
$u_i(t) \in U(t, x_i(t))$ п.в.,
$x_i'(t) - f(t, x_i(t), u_i(t)) \to 0$ п.в. на T;
$x_i(t) \to x(t)$, $t \in T$.
Функция $x(t)$ называется строгой квазитраекторией $S(f, U)$, если существует последовательность $x_i(t)$, $i \geq 1$ траекторий $S(f, U)$ такая, что $x_i(t) \to x(t)$.

Семейство траекторий $S(f,U)$ обозначим $Tr^*(f,U)(x_0)$.
Пусть $F(t,x) = f(t,x,U(t,x))$.

Теорема 2.1.

При гипотезах $\mathcal{K}(f,U)$ $F(t,x)$ удовлетворяет гипотезе $\mathcal{H}(F)$ и мы имеем

$$Tr^*(f,U)(x_0) = \mathcal{R}^*_F(x_0) =$$

$$\mathcal{R}^*_{\overline{ext}\,\overline{co}F}(x_0) = \mathcal{R}^*_{\overline{co}F}(x_0) = \mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0)$$

и $Tr^*(f,U)(x_0)$ обладает свойствами $\mathcal{P}_1$–$\mathcal{P}_5$.

Обозначим через $U_1(t,x)$ “bang-bang” ядро отображения $U(t,x)$, $U_1(t,x) = \{u \in U(t,x);\ f(t,x,u) \in \overline{ext}\,\overline{co}F(t,x)\}$.

Теорема 2.2.

Пусть выполняются гипотезы $\mathcal{K}(f,U)$. Тогда

$$Tr^*(f,U)(x_0) = Tr^*(f,U_1)(x_0).$$

Свойства $\mathcal{R}_1$–$\mathcal{R}_3$ выполняются, например, если $F(t,x) \in \operatorname{conv} X$, $x \to F(t,x)$ полунепрерывна сверху, для каждого x имеет измеримый селектор и удовлетворяет гипотезе $H(F)2)$ [Davy J.L. Bull. Austral. Math. Soc. 1972, v. 6, №3, 379-398]. [Bridgland Jr. (1969); Hermes H. (1970, 1971), Kikuchi N. (1967-1971)]. А.Ф. Филиппов доказал теорему оптимального управления, которая по существу означает свойство $\mathcal{P}_4$.

Результаты А.Ф. Филиппова [Вестник МГУ, 1967, №3, 16–26].
Функция $F(t,x)$ удовлетворяет следующим условиям:
(а) $F(t,x)$ — непустое замкнутое множество,
(б) $F(t,x)$ непрерывна по t,x,
(в) существует суммируемая функция $k(t)$ такая, что

$$\alpha(F(t,x'),F(t,X)) \leq k(t)||x'-x'||.$$

Теорема F.1.

Пусть $F(t,x)$ удовлетворяет условиям (а)–(в) в области $t \in I$, $|x-y(t)| \leq b$, где I — отрезок оси t, функция $y(t)$ абсолютно непрерывна. Пусть $t_0 \in I$, функция $\rho(t)$ суммируема. Тогда существует такое решение $x(t)$ задачи

$$\dot{x} \in F(t,x), \;\; x(t_0) = x_0,$$

что

$$||x(t) - y(t)|| \leq \xi(t), \ ||\dot{x}(t) - \dot{y}(t)|| \leq k(t)\xi(t) + \rho(t) \text{ п.в.}$$

$$\xi(t) = \delta e^{m(t)} + |\int_{t_0}^{t} e^{m(t)-m(s)}\rho(s)ds|,$$

$$m(t) = |\int_{t_0}^{t} k(r)dr|$$

при таких $t \in I$, что $\xi(t) \leq b$.

Теорема F.2.

Пусть функция $x_0(t)$ задана, и в области $R = (t_0 \le t \le t_0 + a),\ |x - x_0(t)| \le \varepsilon_0)$ удовлетворяет условиям (а)–(в) и множество $F(t, x)$ ограничено при всех $(t, x) \in R$. Если $x_0(t)$ есть решение включения $\dot{x} \in \overline{conv}\, F(t, x),\ x(0) = x_0$, то существует последовательность решения включения $\dot{x} \in F(t, x)$, равномерно сходящаяся к $x_0(t)$ на отрезке $[t_0 \le t \le t_0 + a]$.

Для управляемых систем с U, не зависящем от t и x, подобная теорема была доказана в [A. Turowicz. Bull. Bull. Acad. Polon. Sci; Ser. Sci. Math. Ast, Phys. 10 (1962) 529-531]].

Теорема F.3.

Пусть в окрестности V точки (t_0, x_0) функция $F(t, x)$ удовлетворяет условию (a) и существует такая постоянная k, что для любых $(t, x) \in V$, $(t', x') \in V$

$$\alpha(F(t', x'), F(t, x)) \leq k|t' - t| + k|x' - x|.$$

Тогда для любого $v_0 \in F(t_0, x_0)$ существует классическое решение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = v_0$.

Будем говорить, что множество $F(t,x)$, зависящее от t,x, равномерно локально связно, если существует функция $\eta(\lambda)$ $(0 < \lambda < \infty)$, $\eta(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$ такая, что при любых t,x любые две точки множества $F(t,x)$, расстояние между которыми меньше λ, можно соединить связным множеством, которое содержится в множестве $F(t,x)$ и имеет диаметр меньше $\eta(\lambda)$.

Теорема F.4.

Пусть $x_0(t)$ — решение включения $\dot{x} \in F(t,x)$, $F(t,x)$ в области R (см. теорему F.2) удовлетворяет условиям (а), (б), (в) при $k(t) = k = const$ и множество $F(t,x)$ равномерно локально связно. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $v_0 \in F(t_0,x_0)$ существует классическое решение $x(t)$,
$x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = v_0$ включения $\dot{x} \in F(t,x)$ такое, что на отрезке $I[t_0, t_0 + a]$ выполняется неравенство

$$||x(t) - x_0(t)|| < \varepsilon.$$

Теорема F.5.

Пусть в системе

$$\dot{x} = f(t, x, u),\ u \in U$$

f и $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны и при любых t, x множество $f(t, x, U)$ строго выпуклое. Тогда классические решения заполняют всю интегральную воронку

Теорема F.6 [А.Ф. Филиппов. Матем. заметки. Т. 10, №3, 1971, 307-313].

Пусть функция $F(t, x)$ определена в некоторой области пространства t, x и для каждой точки этой области $F(t, x)$ является компактом и непрерывна по (t, x). Тогда для любых $(t_0, x_0) \in D,\ v_0 \in F(t_0, x_0)$ существует локальное решение включения $\dot{x} \in F(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) \in v_0$, у которой производная является ограниченной правильной функцией.

Замечание.

Условие ограниченности $F(t,x)$ можно отбросить

Теорема F.7 [А.Ф. Филиппов. Дифф. уравнения. 1977. Т. 13, №6].

Пусть для любых $t \in [t_0, t_0 + a]$, $x \in R^n$, $|x - x_0| \leq b$, $F(t,x) \in \operatorname{comp} X$ непрерывно по (t,x) и равномерно локально связно. Тогда для любого $v_0 \in F(t_0, x_0)$ существует локальное классическое решение включения

$$\dot{x} \in F(t,x),\ x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) \in v_0.$$

Теорема F.8.

Пусть при $t_0 \le t \le t_0 + a$, $||x - x_0|| \le b$ $F(t,x) \in \operatorname{comp} X$ и удовлетворяет условиям

$$\alpha(F(t',x), F(t,x)) \le k(t)|x' - x|, \qquad (A)$$

$k(t)$ суммируема на $[t_0, t_0 + a]$, существует непрерывная неубывающая функция $l(t)$ такая, что

$$\alpha(F(t',x), F(t,x)) \le l(t') - l(t). \qquad (B)$$

Тогда для любого $v_0 \in F(t_0, x_0)$ существует локальное классическое решение $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$.

Приведены примеры, в которых показано, что ни одно из условий нельзя отбросить.

Условие (B) нельзя отбросить даже в случае $F = F(t)$.

Условие (A) невозможно отбросить даже в случае $F = F(x)$.

Показано, что для многозначных функций понятия абсолютно непрерывной функции и функции ограниченной вариации представляют интерес только для случая одного независимого переменного, а для функции двух и более независимых переменных они равносильны условию Липшица.

Отображение $F(x)$ называется абсолютно непрерывным на множестве $K \subset X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\sum_i \alpha(F(x_i), F(x_{(i+1)}) \leq \varepsilon$$

для любой конечной последовательности точек x_i со свойством

$$\sum_i ||x_i - x_{i+1}|| \leq \delta$$

[Kikuchi N., Tomita Y., Funkcialaj Exvacioj, 14, №3, 1971, 161-170].

До 1977 г. не было значимых продвижений в теории дифференциальных включений в конечномерном пространстве. В основном шли уточнения известных результатов, в том числе результатов А.Ф. Филиппова (1959), (1967), (1971).
[Kaczynski H., Olech C. Ann. Polon. Math, 29(1974), 61-66], в которой было доказано существование решения Каратеодори, когда $F(t,x)$ типа Каратеодори.
Исключение составляют результаты Olech C. Boll. Unione Math. Italiana, 1975, v. 11, №3, 1989-1997
1) $F(t,x)$ интегрально ограничено на всем пространстве;
2) $t \to F(t,x)$ измеримо;
3) для каждого t отображение $x \to F(t,x)$ имеет замкнутый график;
4) в каждой точке x, в которой множество $F(t,x)$ невыпукло, отображение полунепрерывно снизу.
В работе [C.J. Himmelberg, F.S. Van Vleck, J. Diff.Eq. 61, №3, 1986, 295-320] этот результат был обобщен

Вместо 1) предполагалось, что существует суммируемая функция $m : T \to R^+$, такая, что $1)'$ $F(t,x) \cap \overline{B}(0, m(t)) \neq \emptyset,\ t, x$ или $1)''$ $F(t,x) \cap \overline{B}(0, \alpha(t) + \beta(t)||x||) \neq \emptyset,\ t, x, \alpha(t), \beta(t) \geq 0$ суммируемы.
В этой работе говорилось, что авторы не знают ответа на вопрос о существовании решения, когда F обладает свойствами $1)'$ или $1)''$
1) отображение $(t,x) \to F(t,x)$ совместно измеримо;
2) Для почти всех $t \in T$ для каждого x либо отображение $F(t,\cdot)$ имеет замкнутый график в точке x и множество $F(t,x)$ выпукло, либо сужение $F(t,\cdot)$ на некоторую окрестность точки x полунепрерывно снизу.

Пусть $F : T \times X \to \operatorname{comp} X$. Предположим, что для каждого $x(\cdot) \in C(T, X)$ отображение $t \to F(t, x(t))$ имеет интегрируемый селектор $f(t)$. Положим

$$S_F(x) = \{f(\cdot) \in L_1(T, X);\ \ f(t) \in F(t, x(t))\}.$$

Тогда будет определено многозначное отображение $S_F : C(T, X) \to L_1(T, X)$ с замкнутыми значениями. Это отображение называется оператором Немыцкого.
1977 г. стал переломным в теории дифференциальных включений. В работе [Antosievich H.A., Cellina A. An. Polon. Math., 1977, v. 3, №1, 108-111] было доказано существование непрерывного на компакте $K \subset C(T, X)$ селектора у многозначного оператора Немыцкого, порожденного отображением $F(t, x)$ типа Каратеодори. В статье [Bressan. J. Diff. Equat. 37 (1980), 89-97] было доказано существование решения Каратеодори, когда отображение $(t, x) \to F(t, x)$ полунепрерывно снизу.

Тот же самый результат был доказан и в работе [Lojasiewicz S. J. Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math. 1980, v. 28, №9-10, 483-487].
Из этих работ вытекает существование решения включения с остовом в правой части.
Результаты работы Antosievich и Cellina положили начало развитию теории непрерывных селекторой у многозначных операторов Немыцкого и доказательству свойств решений дифференциальных включений при различных предположениях относительно F.
Приведем некоторые из них.

Пусть K — компактное множество в $C(T,X)$,
$x(0)=x_0,\ x(\cdot)\in K,\ B=\cup\{x(t);\ t\in T,\ x(\cdot)\in K,$
$F:T\times B\to \operatorname{comp} X$ — непрерывное отображение, $v:T\to X$ — правильная функция, непрерывная справа. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует непрерывное отображение $g:K\to L_1(T,X)$ такое, что для каждого $x(\cdot)\in K$ всюду на T имеем

$$g(u)(t)\in F(t,u(t)),$$

$$|d(v(t),g(u)(t))-d(v(t),F(t,u(t))|<\varepsilon.$$

$g(u)(t)$ является правильной функцией, непрерывной справа. При этом, если $v(0)=v_0\in F(0,x_0)$, то $g(u)(0)=v_0$.
Подобная теорема имеет место и для отображения F типа Каратеодори [Толстоногов А.А., Чугунов П.И. Сиб. мат. журнал, 1983, т. 24, №6, 144-159].

Пусть $F : T \times X \to X$ — многозначное отображение с замкнутыми значениями такое, что
а) отображение $(t, x) \to F(t, x)$ совместно измеримо;
б) для почти всех $t \in T$ для каждого x либо отображение $F(t, \cdot)$ имеет замкнутый график в точке x и множество $F(t, x)$ выпукло, либо сужение $F(t, x)$ на некоторую окрестность точки x полунепрерывно снизу по Вьеторису;
в) существует функция $f : T \times X \to R^+$ типа Каратеодори, интегрально ограниченная на ограниченных подмножествах из X и такая, что $F(t, x) \cap \overline{B}(0, f(t, x)) \neq \emptyset$ п.в. для любых x. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $K \subset C(T, X)$ существует отображение $Q : K \to L_1(T, X)$ с замкнутыми выпуклыми значениями и слабо секвенциально замкнутым графиком, такое что для любого $x(\cdot) \in K$ и $v(\cdot) \in Q(x(\cdot))$ почти всюду на T

$$v(t) \in F(t, x(t)),$$

$$||v(t)|| \leq f(t, x(t)) + \varepsilon$$

[Толстоногов А.А. Сиб. мат. журнал, 1988, т. 29, №5, 212-225].

Теоремы о непрерывных селекторах позволяют изучать включения вида $\dot{x}(t) \in A(t, x(\cdot))(t) + F(t, x(t))$.
Обозначим через $\Pi_F(x_0, v_0)$ совокупность всех правильных решений $x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0,\ v \in F(0, x_0)$ и $K_F(x_0, v_0)$ — совокупность всех классических решений включения
$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0,\ v \in F(0, x_0)$.

Использование селекторной техники позволило доказать следующие результаты.

ТП1. Пусть $F : T \times X \to \operatorname{comp} X$ — отображение типа Каратеодори, такое что

$$\langle x, v \rangle \leq C(t)(||x||^2 + 1),\ v \in F(t, x), \tag{П.1}$$

$C(t)$ — суммируема,

$$\alpha(F(t, x), F(t, y)) \leq \omega_1(t, ||x - y||). \tag{П.2}$$

Тогда $\mathcal{R}_{\overline{\operatorname{co}} F}(x_0) = \overline{\mathcal{R}_F(x_0)}$, если к тому же функция $\omega_1(t, r)$ не убывает по второму аргументу, то

$$\mathcal{R}_{\overline{\operatorname{co}} F}(x_0) = \overline{\mathcal{R}_F(x_0)} = \overline{\mathcal{R}_{\overline{\operatorname{ext}}\,\overline{\operatorname{co}} F}(x_0)},$$

где черта вверху означает замыкание в $C(T, X)$, $\omega_1(t, r)$ — функция Камке первого рода.

ТП2. Пусть $F : T \times X \to \operatorname{comp} X$ непрерывно, удовлетворяет условию роста (П.1), $v_0 \in F(0, x_0)$ и

$$\alpha(F(t,x), F(t,y)) \leq w_i(t, ||x - y||),\ i = 1, 2, \qquad (\text{П.3})$$

где ω_2 — функция Камке второго рода,

$$\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\, F}(x_0) = \overline{\Pi_F(x_0, v_0)} = \overline{\Pi_F(x_0)}.$$

ТП3. Пусть $F : T \times X \to \operatorname{comp} X$ непрерывно, равномерно локально связно на компактах из $T \times X$, удовлетворяет условию роста (П1) и одному из неравенств (П3).
Тогда

$$\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\, F}(x_0) = \overline{K_\Gamma(x_0, v_0)} = \overline{K_\Gamma(x_0)}.$$

Примеры функций Камке $\omega_1(t,r) = k(t)r$, $\omega_1(t,r) = k(t)l(r)$, где $k(t) \geq 0$ суммируема, $l(r) > 0$, $r > 0$ непрерывна и $\int_{0+} dr/l(r) = +\infty$.
Условия с $\omega_1(t,r) = k(t)/l(r)$ называют критерием Осгуда, $\omega(t,r) = r/t$, доопределенная в $t = 0$ произвольным образом.
Критерий Нагумо.

ТГ1. Пусть $F(t,x)$ удовлетворяет условиям теоремы ТП1 и для любого $x(\cdot) \in \mathcal{R}_F(x_0)$

$$\mu\{t \in T,\ F(t,x(t)) \neq \overline{\mathrm{co}}\, F(t,x(t))\} > 0.$$

Тогда

$$\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\, F}(x_0) = \overline{\mathcal{R}_F(x_0)} = \overline{\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\, F}(x_0) \backslash \mathcal{R}_F(x_0)}.$$

ТГ2. Пусть $F(t,x)$ удовлетворяет условиям теоремы ТП2 и для любого $x(\cdot) \in \Pi_F(x_0, v_0)$ найдется точка $t_0 \in T$, в которой $F(t_0, x(t_0)) \neq \overline{co}F(t_0, x(t_0))$. Тогда

$$\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0) = \overline{\Pi_F(x_0, v_0)} = \overline{\Pi_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0, v_0) \backslash \Pi_F(x_0, v_0)}.$$

Аналогичная теорема имеет место и для классических решений.

Теоремы ТП1–ТП3, ТГ1–ТГ3 были доказаны в [Толстоногов А.А. ДАН СССР, 1979, т. 224, №5, 1081-1092; Сиб. мат. журнал, 1984, т. 25, №1, 159-173; Толстоногов А.А., Чугунов П.И. Сиб. мат. журнал, 1983, т. 24, №6, 144-159; Толстоногов А.А., Финогенко И.А. Мат. сб., 1984, т. 125, №2, 199-230].

Теоремы ТП1–ТП3 включают в себя известные теоремы подобного типа, поскольку в них использовалось условие Липшица. Теоремы ТГ1–ТГ3 были новыми.

Теорема ТГ1 была навеяна результатами работы [Varajya P. Math. Theory Control. New-York – London. Acad. Press, 1967] для управляемых систем.

В работе [Donchev T. Clasnik mat. 31 (1996), 269-276] плотность множества $\mathcal{R}_F(x_0)$ в множестве $\mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(x_0)$ доказывалась в предположении так называемого одностороннего условия Липшица: для почти каждого $t \in T$, любых $x, y \in X$ и $v \in F(t, x)$ найдется $w \in F(t, y)$ такое, что

$$\langle x - y, v - w \rangle \leq k(t)||x - y||^2.$$

Кроме доказанных свойств, изучались вопросы компактности зависимости решений от начальных условий и параметров.
Наиболее общие результаты о компактности множества решений, когда $F(t,x) \in \operatorname{conv} X$, получены в работе [Davy J.L. Bull Austral. Math. Soc. 6 (1972), 379-398].
Интересен результат работы [Hautus M.J.L. J. Optimiz. Theory and Applic. 1978, v. 25, №4, 555-562], где показано, что из ограниченности каждого индивидуального решения дифференциального включения следует равномерная ограниченность всей совокупности. Из этого свойства и непрерывности $F(t,x) \in \operatorname{conv} X$ сразу вытекает компактность множества всех типа Каратеодори решений дифференциального включения.
Приведем некоторое обобщение этого результата.

Пусть $F : T \times X \to \operatorname{conv} X$ интегрально ограничено на ограниченных множествах из $T \times X$, полунепрерывно сверху по x и для каждого x имеет измеримый селектор. Если каждое локальное решение Каратеодори $x(t)$, $x(0) \in M$, $M \in \operatorname{comp} X$ продолжимо до решения Каратеодори, определенного на T, то $\mathcal{R}_F(M)$ является компактом в $C(T, X)$.

Дадим необходимые и достаточные условия компактности множества $\mathcal{R}_F$.

Обозначим через $\mathcal{R}_F(t_0, x_0)$ совокупность всех Каратеодори решений, определенных на $[t_0, 1]$, $0 \le t_0 < 1$, $x_0 \in X$.

Пусть выполняются предположения теоремы ТП1. Для того, чтобы для любых t_0, x_0 множество $\mathcal{R}_F(t_0, x_0)$ было замкнутым в $C([t_0, 1], X)$, необходимо и достаточно, чтобы $F(t, x) = \overline{co}\, F(t, x)$ для любых $x \in X$ п.в. на T [Толстоногов А.А. ДАН СССР, 1979, т. 224, №5, 1081-1092; т. 248, №1, 42-46].
Последний результат был повторен в работе [Cellina A., Ornelas A. Boll. Unione. Math. Ital., B4 (1990), 255-263].
Зависимость в том или ином смыслах от начальных условий и правой части изучалась Благодатским В.И. [Summer School on ordinary differential equations, part II, Czechoslovakia, Brno, 1975, 29-67], Чугунов П.И.[Прикладная математика и пакеты прикладных программ. Сиб. энергет. ин-т СО АН СССР, Иркутск, 1980, 155-171; Davy J.L.

Филиппов А.Ф. [ДАН СССР, 1963, т. 151, №1, 65-68]; Kikuchi N. Publ. RIMS, Kyoto Univ., ser. A, 3 (1967), 177-201; Markin J.T. J. Math. Anal. Appl. 46 (1974), 289-291; Pianigiani G. J. Diff. Equat. 25 (1977), 30-38; Sentis R. C.R. Acad. Sci., Paris, 278 (1974), A1623-A1626; Stassinopoulos G.I. J. Inst. Math. Appl. 25 (1980), 161-175; Stassinopoulos G.I., Vinter R.B. SIAM J. Contr. Optimiz. 17 (1979), 432-449.

В работах Stassinopoulos, Stassinopoulos и Vinter даны необходимые и достаточные условия непрерывной зависимости множества решений от правой части. Эти условия требуют непрерывной зависимости соответствующих многозначных интегралов, вычисленных вдоль решений включения.

Связность множества решений дифференциального включения с выпуклозначной правой частью изучалась Davy, De Blasi F.S. and Myjak J. Bull. Polon. Acad. Sci. Math. 33 (1985), 17-23; Gorniewicz L.L. J. Math. Anal. Appl. 113 (1986), 235-244; Himmelberg C.J., Van Vleck. Rocky Montain J. Math. 12 (1982), 621-625; Kikuchi N. Publ. RIMS, Kyoto Univ., ser. A, 3 (1967), 177-201; Marchoud A. Bull. Soc. Math. France, 62 (1934) 1-38; Composito Math. 3 (1936) 89-127; Zaremba S.C. C.R. Acad. Sci., Paris, 199 (1934), A545-A548; Bull. Sci. Math. 60 (1936) 139-160; Wazewski T. Diff. Equat. and Appl. Proc. Conf. Prague, Prague, 1962, 229-242.
Bressan A. [J. Diff. Equat. 77 (1989), 379-391] доказал связность множеств достижимости, когда $F(t,x) \in \operatorname{comp} X$ и полунепрерывно снизу.

Уравнение интегральной воронки дифференциального включения

Пусть $F : T \times X \to \operatorname{comp} X$, $M \subset X$, $\mathcal{R}_F(M)$ — множество всех типа Каратеодори решений $x(t)$, $x(0) \in M$ дифференциального включения, определенного на T,

$$\Phi_F(M) = \{(t, x(t));\ x(\cdot) \in \mathcal{R}_F(M),\ t \in T\},$$

$$\Omega_F(t, M) = \{x(t);\ x(\cdot) \in \mathcal{R}_F(M)\},$$

$\Phi_F(M)$ называют обычно интегральной воронкой дифференциального включения, а $\Omega_F(t, M)$ — сечением интегральной воронки в момент t (множеством достижимости в момент t).

Абсолютно непрерывное отображение
$U : T \to \operatorname{comp} X,\ U(0) = M,\ M \in \operatorname{comp} X$ является R решением, порожденным отображением $\overline{\operatorname{co}}\, F : T \times X \to \operatorname{comp} X$, если почти всюду на T выполняется соотношение

$$\lim_{h \to 0+} h^{-1} \alpha(U(t+h), \cup\{x + h\,\overline{\operatorname{co}}\, F(t,x);\ x \in U(t)\}) = 0.$$

TR1. Пусть $M \in \operatorname{comp} X,\ \ F : T \times X \to \operatorname{comp} X$ — отображение Каратеодори, удовлетворяющее условиям роста (П1). Тогда существует R решение $U(t),\ U(0) = M$, порожденное отображением $\overline{\operatorname{co}} F(t,x)$.
При этом $\Omega_{\overline{\operatorname{co}} F}(t,M), \overline{\Omega}_F(t,M), \overline{\Omega}_{\overline{\operatorname{ext}}\,\overline{\operatorname{co}} F}(M)$ являются R решениями, порожденными отображением $\overline{\operatorname{co}}\, F(t,x)$.
Здесь черта означает замыкание в X.

TR2. Пусть $F : T \times X \to \operatorname{comp} X$ непрерывно и удовлетворяет условиям роста. Тогда $\overline{\Omega\Pi_{\overline{\operatorname{co}}F}(t, M)}$, $\overline{\Omega\Pi_F(t, M)}$ являются R решениями, порожденными отображением $\operatorname{co} F(t, x)$. Если к тому же $F(t, x)$ равномерно локально связно на компактах из $T \times X$, то $\overline{\Omega K_{\overline{\operatorname{co}}F}(t, M)}$, $\overline{\Omega K_F(t, M)}$. являются R решениями, порожденными отображением $\overline{\operatorname{co}} F(t, x)$.

TR3. Если R — решение, порожденное включением, единственно, то в рамках предположений теоремы TR1

$$\Omega_{\overline{\mathrm{co}}\,F}(t,M) = \overline{\Omega}_F(t,M).$$

В рамках предположений теоремы TR2

$$\Omega_{\overline{\mathrm{co}}F}(t,M) = \overline{\Omega\Pi_{\overline{\mathrm{co}}F}(t,M)} = \overline{\Omega\Pi_F(t,M)},$$

$$\Omega_{\overline{\mathrm{co}}F}(t,M) = \overline{\Omega K_{\overline{\mathrm{co}}F}(t,M)} = \overline{\Omega K_F(t,M)}.$$

R решение будет единственно, например, если $\overline{\mathrm{co}}F(t,x)$ удовлетворяет неравенству (П2) с функцией Камке, неубывающей по второму аргументу.

Уравнение интегральной воронки было рассмотрено в работе [Панасюк А.И., Панасюк В.И. Мат. заметки, 1980, т. 27, №3, 429-437], где и введено понятие R решения. Однако оно отличалось от уравнения, которое мы приводим в [Толстоногов А.А. Мат. заметки, 1982, т. 32, №6, 841-852].

Когда отображение F непрерывно по совокупности переменных и имеет в качестве своих значений выпуклые компакты, в работе Панасюк А.И., Панасюк В.И. методом последовательных приближений было показано, что существует локальное R решение, порожденное отображением $F(t, x)$. Если отображение дополнительно удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу, то на интервале своего существования R решение единственно, непрерывно зависит от начальных условий, а интегральная воронка является R решением.

Кроме результатов, изложенных выше, изучались вопросы зависимости интегральной воронки от начальных условий и параметров [Толстоногов А.А. ДАН СССР, 1984, т. 276, №5, 1074-1078; Дифф. уравнения, 1984, т. 20, №2, 358-359].

Включение $\dot{x} \in \operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}} F(t,x)$

Для его исследования использовалась теорема Бэра о категориях. Существование решения и плотность множества $\mathcal{R}_{\operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}} F}(x_0)$ в множестве $\mathcal{R}_{\overline{\operatorname{co}} F}(x_0)$ с помощью этой теоремы были доказаны в [Bressan A. Diff. Integ. Equar. 3 (1990), 633-638; Суслов С.И. Матем. заметки 49 (1991), 110-116; Толстоногов А.А. ДАН СССР, 1991, т. 317, №3, 589-593]. Также Брессаном А. была доказана связность множества $\mathcal{R}_{\operatorname{ext}\overline{\operatorname{co}} F}(x_0)$.

Существование непрерывных по начальным данным λ селекторов у многозначного отображения $\lambda \to \mathcal{R}_F(\lambda)$ было доказано в работе [Cellina A. Diff. Int. Equat. 1 (1988) 495-500].

Существование непрерывного по начальным данным λ и параметру ξ в $F(t,x)$ селектора отображения $(\lambda,\xi) \to \mathcal{R}_F(\lambda,\xi)$ было доказано Colombo R., Fryszkowski A., Rzezuchowski T., Staicu V. Funk. Ekvac. 34 (1991) 321-330.

В работе [Fryszkowski A., Rzezuchowski T. J. Diff. Equat. 94 (1991) 254-265] была установлена связь между непрерывными селекторами отображений $(\lambda, \xi) \to \mathcal{R}_F(\lambda, \xi)$ и $(\lambda, \xi) \to \mathcal{R}_{\overline{\mathrm{co}}\, F}(\lambda, \xi)$.
В работе [Bressan A., Cellina A., Fryszkowski A. Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991) 413-418] была доказана абсолютная ретрактность $H_F(x_0)$.
Дугообразная связность множеств $H_F(\lambda)$ и $\{\cup H_F(\lambda); \lambda \in M$, M — дугообразный связный компакт, была доказана в [Staicu V., He Wu. Boll. Unione Math. Ital. A5 (1991) 253-256].

В монографии [Tolstonogov A.A. Differential inclusions in a Banach space, Kluwer, 2000] была рассмотрена следующая задача вариационного исчисления. X — сепарабельное банахово пространство. $\overline{R} = (-\infty, +\infty]$.

Проблема (P)

$$I(x, \dot{x}) = \int_0^1 g(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \inf, \qquad (P)$$

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \text{ п.в. } x(0) = x_0,$$

$$g : T \times X \times X \to R.$$

Пусть

$$\tilde{g}_F(t, x, u) = \begin{cases} g(t, x, u); \ u \in F(t, x), \\ +\infty, \ u \neq F(t, x), \end{cases}$$

$g_F^{**}(t, x, u)$ — биполяра функции $u \to \tilde{g}_F(t, x, u)$.

Проблема (RP)

$$I^{**}(x,\dot{x}) = \int_0^1 g_F^{**}(t,x(t),\dot{x}(t))dt \to \inf, \qquad (RP)$$

$$\dot{x}(t) \in \overline{\mathrm{co}}\, F(t,x(t)) \ \text{ п.в. } \ x(0) = x_0.$$

Предположения

$H(F)$: $\quad F : T \times X \to \mathrm{comp}, X, \ \ t \to F(t,x)$ измерима,

$$\alpha(F(t,x),F(t,y)) \le k(t)||x-y||,$$

$$||F(t,x)|| \le m_1(t) + n_1(t)||x|| \ \text{ п.в.}$$

$H(g)$: $\ g : T \times X \times X \to R$,
1) $t \to g(t,x,u)$ измерима,
2) $|g(t,x,u) - g(t,y,v)| \le k_1(t)(||x-y|| + ||u-v||)$.
3) $|g(t,x,u)| \le m_2(t) + n_2(t)(||x|| + ||u||)$,
$k_1, k_2, m_1, m_2, n_1, n_2 \in L^1(T,R)$.

Теорема

При $H(F), H(g)$ проблема (RP) имеет решение и

$$\min_{x \in \mathcal{R}_{\overline{co}F}(x_0)} I^{**} = \inf_{x \in H_F(x_0)} I(x, \dot{x}).$$

Для любого решения x_* проблемы (RP) существует минимизирующая последовательность $x_n \in H_F(x_0)$, $n \geq 1$ проблемы (P) такая, что

а) $x_n \to x_*$ в $C(T, X)$;

б) $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{t \in T} |\int_0^t (g^{**}(s, x_*(s), \dot{x}_*(s) - g(s, x_n(s), \dot{x}_n(s) ds| = 0.$

Обратно, если x_n, $n \geq 1$ — минимизирующая последовательность задачи (P), тогда существует подпоследовательность x_{n_k}, $k \geq 1$ последовательности x_n и решение x_* задачи (RP) такое, что для x_{n_k}, $k \geq 1$ справедливы утверждения а) и б).
В работе [F.S. De Blasi, G. Pianigiani, A.A. Tolstonogov. SIAM J. Contr and Optimiz., v. 43, №2, 466-476] липшицевость функции $(x, u) \to g(t, x, u)$ ослаблена до непрерывности.

Непрерывные селекторы многозначных отображений с разложимыми значениями

Пусть X — сепарабельное банахово пространство , M — компактное метрическое пространство.
Множество $A \subset L_p(T, X)$ называется разложимым, если для любых $u, v \in A$ и любого измеримого множества $E \subset T$ $\chi_E u + \chi_{T \setminus E} v \in A$, где χ_E — характеристическая функция множества E.

Теорема C1 (Fryskowski A. Studia Math. 76 (1983) 163-174)

Пусть многозначное отображение $\Gamma : M \to L_p(T, X)$, $1 \leq p < \infty$ с замкнутыми разложимыми значениями полунепрерывно снизу. Тогда Γ имеет непрерывный селектор.

Теорема C2

Пусть $\Gamma : M \to L_p(T, X)$, $1 \le p < \infty$ с разложимыми, выпуклыми, слабо компактными подмножествами из $L_p(T, X)$. Если Γ непрерывно в метрике Хаусдорфа, тогда существует непрерывный селектор $u : M \to L_p(T, X)$ отображения Γ такой, что

$$u(\xi) \in \operatorname{ext} \Gamma(\xi), \ \xi \in M.$$

Теорема C3

Пусть $\mathcal{F} : M \to L_p(T, X)$ — многозначное отображение с разложимыми, замкнутыми, ограниченными множествами из $L_p(T, X)$.
Если отображение $\Gamma(\xi) = \overline{\operatorname{co}}\, \mathcal{F}(\xi)$ удовлетворяет предположениям теоремы C2, то существует непрерывный селектор u, $u : M \to L_p(T, X)$ отображения $\mathcal{F} \cap \operatorname{ext} \overline{\operatorname{co}} \mathcal{F}(\xi)$, $\xi \in M$.

Теорема C4

Пусть выполняются предположения теоремы C2. Тогда для любого непрерывного селектора $u : M \to L_p(T, X)$ и любой полунепрерывной снизу функции $\varphi : M \to (0, +\infty)$ существует непрерывный селектор $v : M \to L_p(T, X), v(\xi) \in \operatorname{ext}\Gamma(\xi)$ такой, что

$$\sup_{0 \le t \le 1} \| \int_0^t (v(s)(\xi) - u(s)(\xi))ds \| < \varphi(\xi), \ \xi \in M.$$

[Толстоногов А.А. ДАН СССР, 1991, 317, №3, 589-593; J. Diff. Equat., v. 122, №2 (1995); Set-valued Anl. 4, 1996, 173-203; 237-269; Topology and Appl. 155 (2008) 898-905].

Непрерывные селекторы неподвижных точек многозначных отображений

Пусть$(X, ||\cdot||)$ — сепарабельное банахово пространство, M — метрическое пространство.
Если $A, D \subset L_p(T, X)$, то $d_{H,p}(A, D)$ — расстояние по Хаусдорфу между A и D.
Для функции $P(\xi, x)$, которая для каждого $\xi \in M$ является нормой на $L_p(T, X)$, расстояние по Хаусдорфу между множествами $A, D \subset L_p(T, X)$, порожденное нормой $P(\xi, x)$, обозначим через $d_{H,p}(\xi)(A, D)$.
Пусть $\mathrm{dc}\, L_p(T, X)$ — совокупность всех непустых замкнутых разложимых подмножеств из $L_p(T, X)$.

Пусть $\rho: \ T \times M \times X \to [0, +\infty)$ — функция со свойствами:
$1_\rho)$ $\rho(t, \xi, x)$ измерима для каждого $(\xi, x) \in M \times X$ и непрерывна относительно (ξ, x) почти всюду на T;
$2_\rho)$ для каждого $\xi \in M$ функция $\rho(t, \xi, \cdot)$ является полунормой на X при почти всех $t \in T$;
$3_\rho)$ $\rho(t, \xi, x) \leq c\|x\|$, $c > 0$ почти всюду на T для любых $(\xi, x) \in M \times X$.
Если функция $\rho(t, \xi, x)$ обладает свойствами $1_\rho) - 3_\rho)$, то для каждого $x \in L_p(T, X), 1 \leq p < \infty$ функция $\rho(t, \xi, x(t))$ интегрируема с p–ой степенью. Поэтому на $M \times L_p(T, X)$ будет определена функция

$$P(\xi, x) = \left(\int_T \rho(t, \xi, x(t))^p d\mu_0 \right)^{1/p}.$$

Предположим, что

$$m(\xi)\|x\|_p \le P(\xi, x), \qquad \xi \in M, \;\; x \in L_p(T, X), \tag{1}$$

где $m: \; M \to (0, +\infty)$ — полунепрерывная снизу функция. Тогда из свойства 3_ρ) функции $\rho(t, \xi, x)$ и неравенства (1) следует, что

$$m(\xi)\|x\|_p \le P(\xi, x) \le c\|x\|_p, \qquad \xi \in M, \;\; x \in L_p(T, X). \tag{2}$$

Поэтому $P(\xi, \cdot)$ для каждого $\xi \in M$ является нормой на $L_p(T, X)$, эквивалентной исходной.
Всюду в дальнейшем считаем, что выполняется неравенство (1).
Пусть $\Gamma : M \times L_p(T, X) \to \mathrm{dc}\, L_p(T, X)$. Для каждого $\xi \in M$ через $\mathrm{Fix}\, \Gamma(\xi)$ обозначим множество всех неподвижных точек отображения $\Gamma(\xi, x)$.

Теорема 1.

Пусть $\Gamma\colon M \times L_p(T,X) \to \mathrm{dc}\, L_p(T,X)$, $1 \le p < \infty$. Предположим, что:

1) отображение $\xi \to \Gamma(\xi, x)$ полунепрерывно снизу для каждого $x \in L_p(T,X)$;

2) существует полунепрерывная сверху функция $k : M \to [0, +1)$ такая, что

$$d_{H,p}(\xi)(\Gamma(\xi,x),\ \Gamma(\xi,y)) \le k(\xi)\, P(\xi, x-y) \tag{3}$$

для любых $\xi \in M$, $x, y \in L_p(T,X)$.

Тогда:

а) для каждого $\xi \in M$ множество $\mathrm{Fix}\,\Gamma(\xi)$ непусто и существует непрерывная функция $u : M \to L_p(T,X)$ такая, что

$$u(\xi) \in \mathrm{Fix}\,\Gamma(\xi), \quad \xi \in M; \tag{4}$$

б) если $D \subset M$ — замкнутое множество и $u_D : D \to L_p(T, X)$ — непрерывная функция, $u_D(\xi) \in \operatorname{Fix}\Gamma(\xi),\ \xi \in D$, то существует непрерывная функция $u : M \to L_p(T, X)$ такая, что справедливо включение (4) и $u(\xi) = u_D(\xi),\ \ \xi \in D$.

в) отображение $\xi \to \operatorname{Fix}\Gamma(\xi)$ является полунепрерывным снизу отображением с замкнутыми значениями;

г) для каждого $\xi \in M$ множество $\operatorname{Fix}\Gamma(\xi)$ является абсолютным ретрактом и если пространство M дугообразно связно, то множество $S = \bigcup\limits_{\xi \in M} \operatorname{Fix}\Gamma(\xi)$ дугообразно связно;

д) если отображение $\xi \to \Gamma(\xi, x)$ имеет замкнутый график, то ретракцию можно выбрать непрерывно зависящей от ξ, т.е. существует непрерывная функция $g\colon M \times L_p(T, X) \to L_p(T, X)$ такая, что

$$g(\xi, x) \in \operatorname{Fix}\Gamma(\xi) \ \ \forall x \in L_p(T, X), \ \ \forall \xi \in M,$$

$$g(\xi, x) = x \ \ \forall x \in \operatorname{Fix}\Gamma(\xi).$$

Получены теоремы о плотности мноэжества непрерывных селекторов отображения $\operatorname{Fix}\Gamma(\xi)$ в множестве непрерывных селекторов отображения $\operatorname{Fix}\overline{\operatorname{co}}\,\Gamma(\xi)$.

Толстоногов А.А. Сиб. мат. журн. 1999, т. 40, №3, 696-709; 11, №5, 1168-1181; №6, 1380-1396

$$\dot{x}(t) \in A(t, \lambda, x(t)) + F(t, x(t), \lambda),$$

$x(0) = \mu$, $\mu \in Q$ — компакт из X, $\lambda \in \Lambda$ — метрический компакт, $\xi = (\lambda, \mu) \in Q \times \Lambda = M$.
$F : T \times X \times \Lambda \to X$ с замкнутыми значениями.
$\alpha(F(t, x, \lambda), F(t, y, \lambda)) \leq k(\lambda)(t)||x - y||$, $k : \Lambda \to L_2(T, R^+)$ непрерывна.
Решение при фиксированном ξ функция
$x(\cdot) \in W^{1,2}(T, X)$, $x(0) = \mu$, такая, что
$\dot{x}(t) \in A(t, \lambda, x(\cdot)(t)) + u(t)$, $u(t) \in F(t, x(t), \lambda)$, $u \in L^2(T, X)$.

Рассмотрим включение

$$\dot{y}(t) \in A(t, \lambda, x(\cdot)(t)) + u(t),\ u \in L^2(T, X),\ y(0) = \lambda. \qquad (*)$$

Отображение A такое, что решение единственно. Пусть $\mathcal{T} : M \times L^2(T, X) \to W^{1,2}(T, X)$ — оператор, который каждому $\xi \in M,\ u \in L^2(T, X)$ ставит в соответствие единственное решение включения.

Отображение A такое, что

$$||\mathcal{T}(\xi, u_1)(t) - \mathcal{T}(\xi, u_2)(t)|| \leq m \int_0^t ||u_1(s) - u_2(s)||ds,$$

$$\Gamma(\xi, u) = \{f \in L_2(T, X);\ f(t) \in F(t, \mathcal{T}(\xi, u)(t), \lambda) \text{ п.в.}\},$$

$$P(\xi, u) = (\int_T \rho^2(t, \xi, u(t))dt)^{1/2},$$

$$\rho(t, \xi, u) = \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot 2^2 m^2 \int_0^t k^2(\xi)(\tau)d\tau\right),$$

$$d_{H,2}(\xi)(\Gamma(\xi, x), \Gamma(\xi, y)) \leq \frac{1}{2} P(\xi, x - y).$$