Исследования
по теории показателей Ляпунова

**Научная школа
В. М. Миллионщикова:**

**И. Н. Сергеев
А. Н. Ветохин
В. В. Быков**

Кафедра дифференциальных уравнений

Механико-математический факультет

*Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова*

Ляпунов
Александр Михайлович
1857–1918 (Россия)

В 1892 г. для исследования **устойчивости** нулевого решения системы

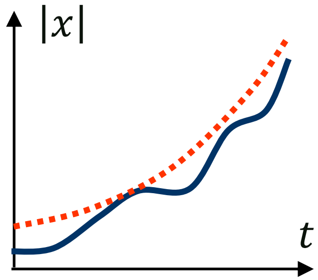
$$\dot{x} = A(t) + o(x), \qquad x \to 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty),$$

по её *линеаризации*

$$\dot{x} = A(t)$$

ввёл *верхний характеристический* показатель *ненулевого* решения $x \in \mathcal{S}(A)$ — **показатель Ляпунова**

$$\lambda(x) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{\mathrm{t}} \ln|x(t)|\,,$$



осуществляющий **верхнюю** *экспоненциальную* оценку нормы этого решения

$$|x(t)| \le C_{x,\varepsilon} e^{(\lambda(x)+\varepsilon)t}, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \qquad (\forall \varepsilon > 0).$$

А. М. Ляпунов

Доказал (1892), что когда *линейная* система **первого приближения**

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

правильна (например, *автономна*, т.е. $A = \mathrm{const}$), верно следующее:

- если показатели *всех* её решений $x \in \mathcal{S}(A)$ **отрицательны**, то исходная (не линеаризованная) система *асимптотически* (и даже *экспоненциально*) *устойчива*:
  $\forall x \in \mathcal{S}(A) \quad \lambda(x) < 0 \Rightarrow$ асимптотическая устойчивость;
- если показатель хотя бы одного её решения x_0 **положителен**, то исходная система *неустойчива*:
  $\exists x_0 \in \mathcal{S}(A) \quad \lambda(x_0) > 0 \Rightarrow$ неустойчивость.

А. М. Ляпунов

Изучил (1892) набор *показателей Ляпунова* всех решений произвольной n-мерной *линейной* системы с *непрерывными* (или хотя бы *кусочно* непрерывными) *ограниченными* коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad A \in \mathcal{M}^n:$$

- их у системы оказалось **ровно $\boldsymbol{n}$** (с учётом *кратности*)
$$\lambda_1(A) \le \cdots \le \lambda_n(A);$$
- i*-й* показатель отвечает за её **условную** *устойчивость* относительно i*-мерного* подпространства, а именно:
$$\lambda_i(A) < 0 \ (> 0) \Rightarrow \text{условная устойчивость (неустойчивость)};$$
- для *автономной* системы показатели Ляпунова совпадают с **действительными частями** (также *упорядоченными* по нестрогому возрастанию) собственных значений $\alpha_i(A)$ её матрицы
$$\lambda_i(A) = \operatorname{Re} \alpha_i(A), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Перрон
Оскар
1880–1975 (Германия)

В 1930 г. привел пример двумерной ($n = 2$) системы $A \in \mathcal{M}^2$ со *старшим* показателем Ляпунова λ_n:

- **неустойчивым** относительно сколь угодно *равномерно малых* её возмущений $Q \equiv B - A$;
- даже **неинвариантным** относительно *бесконечно малых* её возмущений, для которых $Q(t) \to 0,\ t \to \infty$.

В итоге возникли вопросы об описании точек **непрерывности** или хотя бы **полунепрерывности** (*сверху* или *снизу*) каждого показателя Ляпунова $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, рассматриваемого как:

- функционал на $\mathcal{M}^n$ с *равномерной* или *компактно-открытой* топологией
$$\lambda_i : \mathcal{M}^n \to \mathbb{R};$$
- функция $\lambda_i\big(A(\cdot, \mu)\big)$ от параметра μ *непрерывного* семейства $A(\cdot,\cdot)$.

Виноград
Роберт Эльюкимович
1924 (Россия) – ? (Израиль)

В 1957 г. определил с помощью явных формул **центральные показатели** линейных систем

$$\Omega, \omega \colon \mathcal{M}^n \to \mathbb{R},$$

доказав, что они осуществляют **наружные оценки** сдвигов крайних показателей Ляпунова заданной системы $A \in \mathcal{M}^n$ при *равномерно* малых возмущениях её коэффициентов, а именно:

- *верхний* — оценивает сдвиги вверх *старшего* показателя Ляпунова (его **мажоранта**)

$$\Omega(\mathrm{A}) \geq \overline{\lim_{B \to A}} \lambda_n(B) \equiv \bar{\lambda}_n(A);$$

- *нижний* — оценивает сдвиги вниз *младшего* показателя Ляпунова (его **миноранта**)

$$\omega(\mathrm{A}) \leq \underline{\lim_{B \to A}} \lambda_1(B) \equiv \underline{\lambda}_1(A).$$

Миллионщиков Владимир Михайлович 1939–2009 (Россия)

В 1969 г. с помощью изобретённого им **метода поворотов**:

- доказал **достижимость** *центральных показателей* (т.е. их *точность,* как мажоранты и миноранты) крайними показателями Ляпунова при *равномерно* малых возмущениях коэффициентов системы $A \in \mathcal{M}^n$, обосновав, тем самым равенства
$$\Omega(\mathrm{A}) = \bar{\lambda}_n(A), \qquad \omega(\mathrm{A}) = \underline{\lambda}_1(A);$$
- описал все *точки непрерывности* всех **одновременно** показателей Ляпунова в пространстве $\mathcal{M}^n$ с *равномерной* топологией (тогда же этот результат независимо получили и Б. В. Былов с Н. А. Изобовым);
- нашёл в $\mathcal{M}^n$ все точки *грубой* (т.е. в целой окрестности) *непрерывности* всех одновременно показателей Ляпунова — ими оказались системы с *интегральной разделённостью*;
- установил, что точки грубой непрерывности всех показателей образуют в $\mathcal{M}^n$ открытое *всюду плотное* множество.

Изобов
Николай Алексеевич
1940 (Белоруссия)

Для *старшего* показателя Ляпунова λ_n в точке $A \in \mathcal{M}^n$:

- в *двумерном* случае (1976-77) вычислил его *точную* **миноранту**
  $$\underline{\lambda}_n(A) \equiv \varliminf_{B \to A} \lambda_n(B) \quad (\text{при } n = 2),$$
  описав тем самым точки его *полунепрерывности снизу*;
- в общем случае (1978) получил *оценку* этой миноранты *снизу*;
- вычислил явно (1969) *старший сигма-показатель*
  $$\nabla_\sigma(A) \equiv \sup\{\lambda_n(A+Q) \mid |Q(t)| \le C_Q e^{-\sigma t}, t \in \mathbb{R}_+\} \quad (\sigma > 0)$$
  и (1982) *старший* (а также *младший* — для младшего показателя Ляпунова λ_1) **экспоненциальный показатель**
  $$\nabla(A) \equiv \sup_{\lambda(Q)<0} \lambda_n(A+Q), \qquad \left(\Delta(A) \equiv \inf_{\lambda(Q)<0} \lambda_1(A+Q)\right).$$

Сергеев
Игорь Николаевич
1954 (Россия)

Для *каждого* в отдельности показателя Ляпунова λ_i в точке $A \in \mathcal{M}^n$:

- вычислил (1980) его **мажоранту** (точную)

$$\overline{\lambda}_i(A) \equiv \overline{\lim_{B \to A}} \lambda_i(B), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

  описав тем самым все точки его *полунепрерывности сверху*;

- в *трёхмерном* случае вычислил (1993) его **миноранту** (точную)

$$\underline{\lambda}_j(A) \equiv \underline{\lim_{B \to A}} \lambda_j(B), \qquad j = 1,2,3 \qquad (\text{при } n = 3),$$

  описав тем самым все точки его *полунепрерывности снизу*;

- попутно доказал *достижимость* в классе $\mathcal{B}(A)$ **бесконечно** *малых* возмущений всех *мажорант* (их *одновременную* достижимость установил В. В. Быков, 1995) и двух младших *минорант*

$$\overline{\lambda}_i(A) = \sup_{B \in \mathcal{B}(A)} \lambda_i(B)\,, \qquad \underline{\lambda}_j(A) = \inf_{B \in \mathcal{B}(A)} \lambda_j(B) \qquad (j = 1, 2).$$

Бэр
Рене-Луи
1874–1932 (Франция)

В 1899 г. предложил оригинальную **классификацию** *разрывных функций*:

- **0-й** *класс* Бэра $\mathcal{B}_0(\mathcal{M}^n)$ состоит только из *непрерывных* функций $f \in \ (\mathcal{M}^n)$;
- **1-й** *класс* Бэра $\mathcal{B}_1(\mathcal{M}^n)$ состоит из функций f, представимых в виде *поточечного* предела последовательности $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ функций 0-го класса Бэра
$$f(A) = \lim_{k\to\infty} f_k(A), \qquad A \in \mathcal{M}^n, \qquad f_k \in \mathcal{B}_0(\mathcal{M}^n)\,;$$
- **2-й** *класс* Бэра $\mathcal{B}_2(\mathcal{M}^n)$ состоит из функций, представимых в виде *поточечного* предела последовательности функций 1-го класса Бэра,

и т.д.

В. М. Миллионщиков

С 1980 г. открыл **новое направление** в теории показателей Ляпунова, применив **бэровскую** *классификацию разрывных функций* к показателям и впоследствии доказал принадлежность:

- каждого из *показателей Ляпунова* (попутно для них была предложена *регуляризующая* формула) — **2-му** *классу* Бэра
$$\lambda_i \in \mathcal{B}_2(\mathcal{M}^n), \qquad i = 1, \dots, n,$$
и в равномерной, и в компактно-открытой топологии на $\mathcal{M}^n$ (1980);
- *центральных* показателей: *верхнего* — **2-му** *классу* Бэра (1983) (что для мажорант промежуточных показателей Ляпунова окончательно установил И. Н. Сергеев, 2002), а *нижнего* — **3-му** *классу* Бэра
$$\Omega \in \mathcal{B}_2(\mathcal{M}^n), \qquad \omega \in \mathcal{B}_3(\mathcal{M}^n)$$
в *компактно-открытой* топологии на $\mathcal{M}^n$ (в *равномерной* же топологии оба они принадлежат 1-му классу Бэра).

Рахимбердиев Марат Исенгалиевич 1945–2008 (Казахстан)

В 1982 г. впервые доказал **непринадлежность 1-му** *классу* Бэра всех *показателей Ляпунова* λ_i уже при $n \geq 2$:

- на пространства $\mathcal{M}^n$ с *равномерной* топологией (в которой при $n = 1$ все естественные показатели непрерывны, т.е. принадлежат *0-му классу* Бэра), а тем более с *компактно-открытой* топологией;
- даже как функции $\lambda_i\big(A(\cdot,\mu)\big)$ от параметра μ, задающего некоторое *непрерывное* семейство $A(t,\mu)$ (которое непрерывно по $\mu \in [0,1]$ даже *равномерно* по $t \in \mathbb{R}_+$).

Благодаря этому, стало ясно, что *все показатели Ляпунова* в обеих топологиях принадлежат **в точности 2-му** *классу* Бэра

$$\lambda_i \in \mathcal{B}_2(\mathcal{M}^n) \setminus \mathcal{B}_1(\mathcal{M}^n), \qquad i = 1, \dots, n, \qquad n > 1.$$

Ветохин
Александр Николаевич
1971 (Россия)

В 1995 г. предложил простые в использовании **признаки** *непринадлежности* произвольных показателей 1-му классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}^n$ с разными топологиями, с помощью которых доказал, что при $n > 1$ **не** *принадлежат* **1-му** *классу* Бэра:

- *верхний* сигма-показатель Изобова — в случае *равномерной* топологии
$$\nabla_\sigma \notin \mathcal{B}_1(\mathcal{M}^n);$$
- *мажоранта* каждого из показателей Ляпунова и, в частности, верхний центральный показатель — в случае *компактно-открытой* топологии
$$\overline{\lambda}_i, \Omega \notin \mathcal{B}_1(\mathcal{M}^n), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Быков
Владимир Владиславович
1973 (Россия)

В 1996 г. из соображений общего характера доказал, что **миноранта** старшего показателя Ляпунова на $\mathcal{M}^n$ с *компактно-открытой* топологией *принадлежит* **3-му** (тем самым при $n > 1$ — *в точности* 3-му) *классу* Бэра

$$\underline{\lambda}_n \in \mathcal{B}_3(\mathcal{M}^n).$$

Этот же результат:

- ранее установил И. Н. Сергеев для миноранты $\underline{\lambda}_n$ только в *трёхмерном* случае (1993) и для миноранты $\underline{\lambda}_2$ (1995) в общем случае, исходя из полученных для них явных формул;
- позднее был распространен Е. Е. Саловым (1999) на миноранты *всех* **остальных** показателей Ляпунова

$$\underline{\lambda}_i \in \mathcal{B}_3(\mathcal{M}^n), \qquad i = 1, \dots, n.$$

А. Н. Ветохин

В 1998–2004 гг. на основе результатов Р. Бэра и Л. В. Келдыш получил тонкие **признаки** *непринадлежности* произвольных показателей 2-му и 3-му классу Бэра с помощью которых доказал, что при $n > 1$ на пространстве $\mathcal{M}^n$ с *компактно-открытой* топологией:

- **не** принадлежат **2-му** *классу* Бэра — *миноранты* показателей Ляпунова и, в частности, *нижний центральный* показатель, старший экспоненциальный показатель Изобова и так называемые *нижние вспомогательные* показатели Миллионщикова (1970)
$$\underline{\lambda}_i, \omega, \nabla, \underline{\nu}_i \notin \mathcal{B}_2(\mathcal{M}^n), \qquad i = 1, \dots, n;$$
- **не** принадлежат **3-му** *классу* Бэра — *верхние вспомогательные* показатели Миллионщикова
$$\overline{\nu}_i \notin \mathcal{B}_3(\mathcal{M}^n), \qquad i = 1, \dots, n.$$

А. Н. Ветохин

Для *показателей Ляпунова* λ_i $(i = 1, \dots, n)$:

- доказал (2010), что каждый из них на множестве **правильных** систем с компактно-открытой, а значит, и с равномерной топологией, принадлежит *в точности* **1-му** классу Бэра;
- построил (2012) такое семейство $A(\cdot, \mu) \in \mathcal{M}^n$, непрерывное по параметру μ, пробегающему некоторое полное метрическое пространство M, что ни один из его *показателей* λ_i **не** *полунепрерывен* **снизу** по параметру *ни в одной точке* $\mu \in M$;
- установил (2018), что и мажоранта $\overline{\lambda}_i$, и миноранта $\underline{\lambda}_\mathrm{i}$ каждого показателя Ляпунова λ_i любого семейства $A(\cdot, \mu) \in \mathcal{M}^n$, аналитичного по **комплексному** параметру $\mu \in \mathbb{C}$, *всюду полунепрерывна* по μ — сверху и снизу соответственно.

О. Перрон

В 1930 г.:

- ввёл *нижний характеристический* показатель — **показатель Перрона**

$$\pi(x) = \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{\mathrm{t}} \ln|x(t)|\,,$$

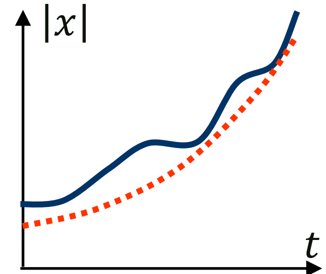
решения $x \in \mathcal{S}(A)$ линейной системы

$$\dot{x} = A(t), \qquad A \in \mathcal{M}^n,$$

осуществляющий **нижнюю** *экспоненциальную* оценку его нормы

$$|x(t)| \geq C_{x,\varepsilon}\, e^{(\pi(x)-\varepsilon)t}, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \qquad (\forall \varepsilon > 0),$$

(для решений *правильной* системы он совпадает с верхним $\lambda(x)$);



- обнаружил, что уже при $n = 2$ *количество* различных нижних показателей ненулевых решений одной n-мерной системы может быть **больше n**.

Н. А. Изобов

Показал, что с одной стороны (1964–68), *показатели* **Перрона** (нижние) решений линейных систем устроены гораздо сложнее, чем их показатели Ляпунова (верхние):

- количество нижних показателей n-мерной *диагональной* системы может достигать $2^n - 1$ (при $n = 3$), но не более того;
- множество нижних показателей решений некоторой *двумерной* системы $A \in \mathcal{M}^2$ содержит **целый отрезок**,

а с другой стороны (1968), *так же* как и для верхних показателей:

- *наибольшее значение* среди всех нижних показателей решений любой *ограниченной* системы $A \in \mathcal{M}^n$ *метрически* **типично**, т.е. множество её решений x (точнее, их начальных точек $x(0) \in \mathbb{R}^n$) с этим значением показателя имеет *полную меру*.

Барабанов
Евгений Александрович
1955 (Белоруссия)

Нашёл:

- алгоритм вычисления *точных наружних* **границ подвижности** *крайних* показателей Ляпунова (старшего λ_n вверх и младшего λ_1 вниз) при возмущениях коэффициентов системы $A \in \mathcal{M}^n$, *убывающих* заданным образом (1984);
- *необходимый* для системы $A \in \mathcal{M}^n$ **набор свойств** старшего *сигма-показателя Изобова*
$$\nabla_\sigma(A) = \sup_{\lambda(Q) \le -\sigma} \lambda_n(A+Q)$$
как функции от σ (1982) — его *достаточность* впоследствии была доказана совместно с Н. А. Изобовым (1984);
- новый *критерий* **правильности** системы $A \in \mathcal{M}^n$ в терминах её сингулярных показателей (2005).

Е. А. Барабанов

Для системы $A \in \mathcal{M}^n$ полностью описал:

- структуру множества *показателей* **Перрона** (1986);
- распределение верхних и нижних *равномерных* **показателей Боля**

$$\overline{\beta}(x) = \varlimsup_{t-s\to\infty} \frac{1}{t-s} \ln\frac{|x(t)|}{|x(s)|}, \qquad \underline{\beta}(x) = \varliminf_{t-s\to\infty} \frac{1}{t-s} \ln\frac{|x(t)|}{|x(s)|}$$

  по решениям $x \in \mathcal{S}(A)$ (совместно с А. В. Конюхом, 1994), а также нашёл *точные мажоранту* нижнего и *миноранту* верхнего показателей Боля в *равномерной* топологии на $\mathcal{M}^n$;
- множества *устойчивости, асимптотической устойчивости* (2010) и *правильности* (2009) для непрерывных по параметру μ семейств общего вида $A = A(\cdot\,, \mu)$ и для семейств с *параметром-множителем* μA (в последнем случае — лишь в классе *неограниченных* систем A).

И. Н. Сергеев

В 2004 г., работая с *нижними* характеристическими показателями решений системы $A \in \mathcal{M}^n$:

- **регуляризовал** их по *Миллионщикову* и получил два набора по n показателей Перрона каждый
$$\pi_1(A) \le \pi_{\overline{2}}(A) \le \cdots \le \pi_n(A), \qquad \pi_1(A) \le \pi_{\underline{2}}(A) \le \cdots \le \pi_n(A);$$
- установил, что для **диагональной** системы обе регуляризации приводят к одинаковым наборам показателей Перрона
$$\pi_{\underline{i}}(A) = \pi_{\overline{i}}(A), \qquad i = 1, \ldots, n;$$
- указал *мажоранту* и *миноранту* **крайних** показателей Перрона в равномерной топологии — они совпадают с верхним и нижним **нижнепредельными** *центральными показателями*
$$\overline{\pi}_n(A) = \breve{\Omega}\,(A), \qquad \underline{\pi}_1(A) = \breve{\omega}(A).$$

Гаргянц
Александр Георгиевич
1993 (Россия)

Для *показателей* **Перрона** доказал, что:

- уже при каждом $n \geq 3$ два набора их *регуляризаций*, вообще говоря, **не** *совпадают* друг с другом (2013)

$$\exists A \in \mathcal{M}^n \qquad \pi_{\underline{i}}(A) < \pi_{\bar{i}}(A), \qquad i = 2, \ldots, n-1;$$

- значение *старшего* показателя $\pi_n(A)$ всякой системы $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$, возможно, *неограниченной*, но имеющей неположительный показатель Ляпунова, *метрически* **типично** (2014), причём гарантирующая это свойство оценка роста коэффициентов в экспоненциальной шкале *неулучшаема* (2019);
- для **неограниченных** систем $A \in \widetilde{\mathcal{M}}^n$ *распределение значений* показателя по решениям может оказаться **произвольной** *непрерывной* функцией с естественными ограничениями (2017).

И. Н. Сергеев

В 2004 г. для *линейных* однородных *уравнений* n-го порядка с *непрерывными* (или *кусочно*) *ограниченными* коэффициентами

$$y^n + a_1(t)y^{n-1} + \cdots + a_n(t)y = 0, \qquad a \equiv (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{E}^n:$$

- ввёл *характеристическую* частоту решения $y \in \mathcal{S}(a)$ — **частоту Сергеева**, равную среднему числу *нулей* на промежутке длины π:

$$\nu(y) \equiv \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu(y,t), \qquad \nu(y,t) - \text{число нулей } y \text{ на } (0,t];$$

- доказал, что *спектр* (множество различных значений) частот *автономного* уравнения **4-го** *порядка* может содержать *сколь угодно* **большое** множество значений — как выяснилось позже, он может заполнять даже *целый* **отрезок** (А. Ю. Горицкий, 2008), причём те же спектры может иметь и *периодическое* уравнение **3-го** *порядка*, а непериодическое — ещё и **счётный** спектр (М. В. Смоленцев, 2012).

И. Н. Сергеев

Регуляризовал частоты Сергеева *по Миллионщикову*

$$\omega_1(a) \le \dots \le \omega_n(a), \qquad a \in \mathcal{E}^n,$$

и доказал (2004), что:

- в случае *автономного* уравнения они совпадают с **модулями мнимых частей** $\alpha_1(a)$ корней его характеристического многочлена

$$\omega_i(a) = |\mathrm{Im}\, \alpha_i(a)|, \qquad i = 1, \dots, n;$$

- все они, как функционалы на $\mathcal{E}^n$ с *равномерной* топологией, при $n = 2$ *непрерывны*, а при $n > 2$ имеют точки **разрыва**;
- уже при $n = 3$ два набора *регуляризаций* частот, вообще говоря, *не совпадают* друг с другом

$$\exists a \in \mathcal{E}^n \qquad \omega_{\underline{2}}(a) < \omega_{\overline{2}}(a).$$

И. Н. Сергеев

В 2009 г., рассмотрев *системы* $A \in \mathcal{M}^n$:

- распространил понятие частоты на их *векторные* решения $x \in \mathcal{S}(A)$, определив *слабый* и *сильный* **показатели колеблемости**
$$\nu^\circ(x) = \varliminf_{t\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t}\nu\big((x,m),t\big), \qquad \nu^*(x) = \inf_{m\in\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to\infty} \frac{\pi}{t}\nu\big((x,m),t\big),$$
причём позже выяснилось, что для решения *автономной* системы они (Д. С. Бурлаков, С. В. Цой, 2011) *совпадают* друг с другом
$$A = \text{const} \Rightarrow \nu^\circ(x) = \nu^*(x), x \in \mathcal{S}(A),$$
а их спектры для *двумерных систем* и *уравнений 3-го порядка* бывают *континуальными, счётными* и любыми *конечными* (А. Х. Сташ, 2013);
- доказал, что показатели колеблемости всех решений *автономной* системы $A = \text{const}$ совпадают с **модулями мнимых частей** собственных значений ее матрицы
$$\{\nu^*(x) \mid x \in \mathcal{S}(A)\} = \{|\mathrm{Im}\, \alpha_i(A)| \mid i = 1, \dots, n\}.$$

В. В. Быков

Доказал, что на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ **неограниченных** систем с *компактно-открытой* топологией:

- *экспоненциальный* показатель Изобова принадлежит **3-му** *классу* Бэра (2008);
- *мажоранты* показателей Ляпунова и Боля принадлежат **2-му** *классу* Бэра (2007–2011);
- *миноранта* старшего показателя Перрона принадлежит **2-му** *классу* Бэра (2007),

а как функции от *параметра* $\mu \in \mathbb{R}$ их непрерывного семейства:

- *миноранты* показателей Ляпунова принадлежат **3-му** *классу* Бэра (2009);
- *регуляризованные* частоты Сергеева **измеримы** по Лебегу (2006).

В. В. Быков

Для *параметрического* **семейства** $A(\cdot,\mu)$ систем из $\mathcal{M}^n$ с *равномерной* топологией, непрерывного по μ из метрического пространства, получил *полное описание*, как **функции** от μ:

- каждого отдельного *показателя Ляпунова* $\lambda_i(A(\cdot,\mu))$, $i = 1, \dots, n$ (2017);
- *спектра* показателей Ляпунова $(\lambda_1(A(\cdot\ \mu)), \dots, \lambda_n(A(\cdot,\mu)))$ (совместно с Е. А. Барабановым и М. В. Карпуком, 2018);
- *коэффициента* **неправильности** Ляпунова $\sigma_{Л}(A(\cdot,\mu))$ (совместно с Е. А. Барабановым, 2019);
- *размерности* экспоненциально устойчивого подпространства (совместно с Е. А. Барабановым и М. В. Карпуком, 2019).

А. Н. Ветохин

В 2006–19 гг. доказал, что *топологическая* **энтропия**, как функция параметра из полного метрического пространства, задающего непрерывное семейство непрерывных отображений компактного метрического пространства в себя:

- *принадлежит* **2-му** *классу* Бэра и в типичной по Бэру точке *полунепрерывна снизу*;
- вообще говоря, **не** *принадлежит* **1-му** *классу* Бэра, даже в случае семейства *липшицевых* гомеоморфизмов,

а также описал:

- множество точек **полунепрерывности** *сверху* и *снизу* этой функции;
- все множества точек *полунепрерывности снизу* этой функции, когда параметр пробегает *полное сепарабельное нульмерное* пространство.

А. Н. Ветохин

В 2016–20 гг., для *семейства неавтономных* **динамических** систем, непрерывно зависящих от параметра из метрического пространства:

- доказал, что для любого такого семейства *топологическая* **энтропия** этих динамических систем *принадлежит* **3-му** *классу* Бэра и вообще говоря, ***не*** *принадлежит* **2-му** *классу* Бэра,

а для их **эпсилон-ёмкости** *Колмогорова:*

- установил, что она *принадлежит* **2-му** *классу* Бэра и в типичной по Бэру точке *полунепрерывна сверху*;
- описал все множества точек её *полунепрерывности сверху* в случае, когда параметр пробегает *полное сепарабельное нульмерное* пространство.

И. Н. Сергеев

В 2010–12 гг. ввёл и изучил для решения $x \in \mathcal{S}(A)$ системы $A \in \mathcal{M}^n$ *слабый* и *сильный показатели* **блуждаемости**

$$\rho^\circ(x) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \inf_{L\in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \mathrm{P}(Lx,t)\,, \qquad \rho^*(x) \equiv \inf_{L\in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^n} \varlimsup_{t\to\infty} \mathrm{P}(Lx,t)\,,$$

где $\mathrm{P}(u,t)$ — средняя *угловая скорость* вектора u на отрезке $[0,t]$. Они:

- тесно связаны с одноимёнными *показателями колеблемости*: *слабые* — с ними **совпадают** (то же независимо обнаружил Д. С. Бурлаков), а сильные — *оценивают* их сверху
$$\nu^\circ(x) = \rho^\circ(x), \qquad \nu^*(x) \le \rho^*(x);$$
- на решениях *автономной* системы $A = \mathrm{const}$, вообще говоря, *различны*, но их *спектры* **совпадают** со спектром $|\mathrm{Im}\,\alpha_i(A)|$ (а в неавтономном случае бывают любыми конечными, счётными и континуальными, как доказал Е. М. Шишлянников, 2017–18);
- на вектор-решениях *уравнения 2-го* порядка **совпадают** все вообще.

Различные показатели ляпуновского типа

Разновидности *показателей* (авторы):

- верхние характеристические λ (Ляпунов);
- нижние характеристические π (Перрон);
- равномерные β (Боль);
- степенные β (Демидович);
- центральные Ω, ω (Виноград, Миллионщиков);
- особые Ω_0, ω_0, или генеральные (Боль, Персидский);
- экспоненциальные ∇, Δ и σ-показатели ∇_σ, Δ_σ (Изобов);
- вспомогательные ν (Миллионщиков);
- характеристические частоты ν, их регуляризации ω (Сергеев);
- колеблемости ν и блуждаемости ρ (Сергеев).

Классы линейных систем

Системы (n-мерные):

- с ограниченными коэффициентами $\mathcal{M}^n$ (основной класс);
- с неограниченными коэффициентами $\widetilde{\mathcal{M}}^n$;
- отвечающие уравнениям $\mathcal{E}^n$, приводимые к уравнению;
- гамильтоновы $\mathcal{H}^n$, сохраняющие объём;
- постоянные $\mathcal{C}^n$, приводимые, почти приводимые;
- периодические $\mathcal{P}^n$, квазипериодические, почти периодические;
- правильные $\mathcal{R}^n$, бирегулярные, абсолютно регулярные;
- с интегральной (экспоненциальной) разделённостью $\mathcal{I}^n$;
- управляемые, с обратной связью.

Топологии
и классы возмущений

Топологии (на полуоси времени $\mathbb{R}_+$):

- равномерная;
- компактно-открытая (или сходимости на компактах);
- интегральная;
- сходимости в среднем.

Возмущения:

- бесконечно малые;
- экспоненциальные, степенные, с какой-либо иной заданной скоростью убывания;
- заданного порядка малости;
- не выводящие из заданного класса систем.

Возможные темы научных работ по линейным системам

- Предъявить двумерную не интегрально разделённую линейную систему с грубо устойчивым старшим показателем Ляпунова.
- Найти явную формулу для мажоранты $\overline{\lambda}_n$ старшего показателя Ляпунова двумерной неограниченной линейной системы.
- Найти явные формулы для миноранты $\underline{\pi}_n$ и мажоранты $\overline{\pi}_1$ старшего и соответственно младшего показателей Перрона двумерной линейной системы.
- Описать все возможные спектры показателей колеблемости и блуждаемости неавтономного линейного уравнения 3-го порядка.
- Существует ли такая характеристика вектор-функции, которая на решениях любой n-мерной линейной системы принимает не более n значений, а в автономном случае совпадает с мнимыми частями (или с их модулями) собственных значений её матрицы?

Возможные темы научных работ по классам Бэра

- Какому классу Бэра принадлежит миноранта $\underline{\lambda}_n$ старшего показателя Ляпунова, как функционал на пространстве $\widetilde{\mathcal{M}}^n$ неограниченных линейных систем с компактно-открытой топологией?
- Какому классу Бэра принадлежат регуляризованные по Миллионщикову показатели Перрона (не считая старшего)
$$\pi_1(A) \le \cdots \le \pi_n(A), \qquad A \in \mathcal{M}^n?$$
- Какому классу Бэра принадлежат регуляризованные по Миллионщикову частоты Сергеева
$$\omega_1(a) \le \cdots \le \omega_n(a), \qquad a \in \mathcal{E}^n?$$
- Есть ли содержательная связь между показателями колеблемости или блуждаемости действительной системы
$$\dot{x} = A(t)x$$
и показателями Ляпунова соответствующей комплексной системы
$$\dot{z} = iA(t)z?$$

Учебники и монографии по теории показателей Ляпунова