МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 4 (1985)

Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
«Математические заметки», 1985

НЕКОТОРЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ГЛАДКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

В. М. Миллионщиков

Введение. В ряде вопросов теории показателей Ляпунова приходится иметь дело с различными пространствами дифференцируемых отображений риманова многообразия. К числу таких вопросов относится, например, изучение показателей Ляпунова динамических систем с дискретным временем с точки зрения теории функций Бэра. Основное условие применимости теории Бэра к функциям, заданным на том или ином метризуемом топологическом пространстве, проще всего выражается как полнота этого пространства в некоторой метрике. Однако бывает так, что метрика, в которой пространство полно, может быть заменена другой метрикой, задающей ту же топологию, в которой пространство не полно, но которая определяется более простой формулой. Результаты применения теории Бэра к функциям на таком топологическом пространстве лучше формулировать с помощью такой проще определяемой метрики.

Результаты предпринятого в [1] изучения пространств диффеоморфизмов риманова многообразия обслуживают те ситуации, в которых изучаемые диффеоморфизмы имеют ограниченную производную, что является для ряда вопросов, вызывающих реальный интерес, излишне стеснительным условием. В предлагаемой на этот раз вниманию читателя статье мы ставим своей целью изучение таких пространств дифференцируемых отображений, в которые попадали бы все гладкие отображения без каких бы то ни было условий ограниченности. Точнее говоря, мы рассматриваем здесь серию пространств гладких отображений риманова многообразия в себя, обладающих тем свойством, что всякое гладкое отображение риманова многообразия в себя является точкой по крайней мере одного из пространств этой серии.

§ 1. Пусть (V,δ) — связное n-мерное риманово многообразие. Здесь V — дифференцируемое многообразие класса C^2, $\delta=\delta(\cdot,\cdot)$ — риманова метрика класса C^1 на V.

1. Напомним некоторые определения и обозначения. Кусочно-гладким путем, идущим из z в y, называется кусочно-гладкое отображение отрезка [0, 1] в многообразие V, значение которого в точке 0 равно z, а в точке 1 равно y. Длина пути u определяется формулой

$$s(u)=\int_0^1\left[\delta(\dot{u}_t,\dot{u}_t)\right]^{1/2}dt; \tag{1}$$

через u_t обозначается значение отображения u в точке t^x через u_t — его производная в точке t. Расстояние между точками $y\in V$, $z\in V$ определяется как точная нижняя грань длин кусочно-гладких путей, идущих из точки z в точку y:

$$\rho(y,z)=\inf_{u\in G(y,z)} s(u). \tag{2}$$

Здесь и далее через $G(y,z)$ обозначается множество всех кусочно-гладких путей, идущих из z в y.

2. Определение 1. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех непрерывно дифференцируемых отображений дифференцируемого многообразия V в себя. Для всякого $j \in \mathfrak{S}$ обозначим через $\mathfrak{S}_j$ множество всех непрерывно дифференцируемых отображений f: $V \to V$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx, jx)} \left\{ s(u) + \| \varphi_u dj_x \| \right\} < +\infty. \tag{3}$$

Поясним использованные в определении 1 обозначения, тем более, что они будут неоднократно применяться в дальнейшем изложении. Через φ_u обозначается параллельный перенос вдоль пути u. Как известно, φ_u есть изоморфизм касательного пространства в начальной точке пути на касательное пространство в его конечной точке; оба пространства рассматриваются как евклидовы пространства, скалярное произведение на которых задается римановой метрикой δ, и под изоморфизмом здесь понимается изоморфизм евклидовых пространств. Через dg_x обозначается производная дифференцируемого отображения g: $V \to V$ в точке x. Норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство определяется стандартным образом — как супремум нормы образа нормированного вектора; при этом нормы в касательных пространствах берутся те самые, которые индуцированы римановой метрикой δ.

Теперь, когда разъяснение смысла обозначений, примененных в формуле (3), закончено, перейдем к изучению множеств $\mathfrak{S}_j$. В следующем пункте мы определим расстояние на $\mathfrak{S}_j$. Точнее говоря, при всяком $j \in \mathfrak{S}$ мы определим некоторое отображение $\mathfrak{S}_j \times \mathfrak{S}_j \to \overline{R}$ (через $\overline{R}$ обозначается расширенная действительная прямая: $\overline{R} = \{-\infty\} \cup R \cup \{+\infty\}$, а позже докажем, что это отображение есть расстояние на $\mathfrak{S}_j$.

3. Определение 2. Для всякого $j \in \mathfrak{S}$ определим отображение $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_j : \mathfrak{S}_j \times \mathfrak{S}_j \to \overline{R}$ формулой

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}_j(f,g) = \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx, gx)} \left\{ s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \| \right\}. \tag{4}$$

4. ТЕОРЕМА 1. *Для всякого* $j \in \mathfrak{S}$ *отображение* $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_j$ *есть расстояние на множестве* $\mathfrak{S}_j$.

5. Доказательство этой теоремы будет дано в § 5 после того, как будут изложены некоторые вспомогательные построения.

В следующих пунктах этого параграфа мы приведем еще два определения и сформулируем еще одну теорему. В этих определениях и теореме речь пойдет о дифференцируемых отображениях с невырожденной производной. Локально, но не всегда глобально, такие отображения являются диффеоморфизмами (в силу теоремы об обратном отображении — частного случая теоремы о неявной функции). Одним из простейших примеров такого рода отображений является преобразование $z \to z^k$ единичной окружности $\{z \in C : |z| = 1\}$ в комплексной плоскости, где k — целое число, отличное от нуля.

6. Обозначим через $\mathfrak{S}^*$ множество всех тех непрерывно дифференцируемых отображений f: $V \to V$, у которых производная в каждой точке невырождена. Иными словами, $f \in \mathfrak{S}$ принадлежит множеству $\mathfrak{S}^*$ в том и только в том случае, если ядро его производной тождественно равно нулю: $Ker df_x = \{0_x\}$ для всякого $x \in V$. Здесь через 0_x обозначается нулевой вектор касательного пространства в точке x, а ядро линейного отображения определяется стандартным образом — как полный прообраз нулевого вектора.

7. Определение 3. Для всякого $j \in \mathfrak{S}^*$ обозначим через $\mathfrak{S}_j^*$ множество всех $f \in \mathfrak{S}^*$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx, jx)} \left\{ s(u) + \| \varphi_u dj_x - df_x \| + \| (\varphi_u dj_x)^{-1} - (df_x)^{-1} \| \right\} < +\infty. \tag{5}$$

8. Определение 4. Для всякого $j \in \mathfrak{S}^*$ определим отображение $\boldsymbol{\delta}_j$: $\mathfrak{S}_j^* \times \mathfrak{S}_j^* \to \overline{R}$ формулой

$$\boldsymbol{\delta}_j(f, g) = \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx, gx)} \left\{ s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \| + \| (\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1} \| \right\}. \tag{6}$$

9. ТЕОРЕМА 2. *Для всякого* $f \in \mathfrak{S}^*$ *отображение* $\boldsymbol{\delta}_j$ *есть расстояние на множестве* $\mathfrak{S}_j^*$.

Доказательство теоремы 2 также удобно несколько отложить. Ему будет предпослан вспомогательный материал, который даст возможность выявить общие черты в доказательствах теорем 1 и 2 и расчленить эти доказательства с целью сделать их более прозрачными.

§ 2. 1. *Струей первого порядка* (1-струей), вытекающей из точки x многообразия V, будем называть пару (y, L), где y — точка многообразия V, а L — линейное отображение касательного пространства в точке x в касательное пространство в точке y. Множество всех 1-струй, вытекающих из точки x, т. е. множество всех пар (y, L), где $y \in V$, $L \in Hom(T_x V, T_y V)$, будем обозначать через $J_x V$. Обычно 1-струя, вытекающая из точки x, определяется несколько иначе — как класс эквивалентности дифференцируемых отображений по отношению эквивалентности, которое можно описать так: два дифференцируемых отображения $V \to V$ эквивалентны, если они отображают точку x в одну и ту же точку и их производные (первого порядка) в точке x равны. Определение, приведенное выше, хотя и отличается от этого определения, но согласуется с ним. Чтобы согласовать между собой эти два определения, достаточно заметить следующее. Для всяких точек x, y многообразия V и всякого линейного отображения L касательного пространства в точке x в касательное пространство в точке y найдется дифференцируемое отображение $V \to V$, принимающее в точке x значение y и имеющее в точке x производную, равную L. Поэтому отображение, ставящее в соответствие каждому классу эквивалентности дифференцируемых отображений (по указанному выше отношению эквивалентности) пару (y, L), где y — образ точки x при всяком отображении, являющемся представителем этого класса, а L — производная любого представителя этого класса, взятая в точке x, является биекцией множества 1-струй, вытекающих из точки x (понимаемых как классы эквивалентности дифференцируемых отображений), на множество $J_x V$, определенное в начале этого пункта. Эта биекция и устанавливает то согласование двух определений, о котором было упомянуто.

2. Определение 5. Для всякого $x \in V$ определим отображение ρ_x: $J_x V \times J_x V \to \overline{R}$ формулой

$$\rho_x\big((y, L), (z, M)\big) = \inf_{u \in G(y, z)} \left\{ s(u) + \| \varphi_u M - L \| \right\}. \tag{7}$$

Пояснения. Напомним, что через $G(y, z)$ обозначается множество всех кусочно-гладких путей, идущих из z в y. Напомним также, что $s(u)$ — длина пути u и что φ_u — параллельный перенос вдоль пути u; для $u \in G(y, z)$ — это линейное отображение $T_z V \to T_y V$. Для всяких $(y, L) \in J_x V$, $(z, M) \in J_x V$, $u \in G(y, z)$ произведение $\varphi_u M$

линейных отображений M: $T_xV \to T_zV$ φ_u: $T_zV \to T_yV$ есть линейное отображение $T_xV \to T_yV$; а поскольку L тоже есть линейное отображение $T_xV \to T_yV$, то разность $\varphi_u M - L$ определена и является линейным отображением $T_xV \to T_yV$. Норма линейного отображения определяется как супремум нормы образа нормированного вектора (нормы на касательных пространствах индуцированы римановой метрикой δ).

3. Предложение 1. *Для всякого $x \in V$ отображение ρ_x есть расстояние на множестве J_xV.*

Доказательство этого предложения см. [1, предложение 3].

4. *Невырожденной 1-струей*, вытекающей из точки $x \in V$, будем называть 1-струю $(y,L) \in J_xV$, у которой линейное отображение L имеет нулевое ядро и потому является изоморфизмом векторного пространства T_xV на векторное пространство T_yV; последнее вытекает из того, что многообразие V, а с ним и всякое его касательное пространство имеют конечную размерность n. Множество всех невырожденных 1-струй, вытекающих из точки x, будем обозначать через J_x^*V.

5. Определение 6. Для всякого $x \in V$ определим отображение $\rho_x^*: J_x^*V \times J_x^*V \to \overline{R}$ формулой

$$\rho_x^*\big((y,L),(z,M)\big) = \inf_{u \in G(y,z)} \big\{ s(u) + \| \varphi_u M - L \| + \| (\varphi_u M)^{-1} - (L)^{-1} \| \big\}. \qquad (8)$$

Пояснения. Напомним, что для всякого $x \in V$, для всякой невырожденной 1-струи (y,L), вытекающей из точки x, отображение L^{-1}: $T_yV \to T_xV$ существует (см. п. 4). Напомним также, что для всяких точек $y \in V$, $z \in V$, для всякого пути $u \in G(y,z)$ отображение φ_u: $T_zV \to T_yV$ (параллельный перенос вдоль пути u) имеет обратное $\varphi_u^{-1}: T_yV \to T_zV$ (более того, φ_u — изоморфизм евклидовых пространств). Поэтому для всяких

$$(y,L) \in J_x^*V, (z,M) \in J_x^*V, u \in G(y,z)$$

существуют линейные отображения $L^{-1}: T_yV \to T_xV$ и $(\varphi_u M)^{-1} = M^{-1}\varphi_u^{-1}$: $T_yV \to T_xV$; их разность есть линейное отображение $(\varphi_u M)^{-1} - (L)^{-1}$: $T_yV \to T_xV$. Норма линейного отображения $T_yV \to T_xV$, как уже пояснялось выше, есть по определению точная верхняя грань нормы образа нормированного вектора.

6. Предложение 2. *Для всякого $x \in V$ отображение ρ_x^* есть расстояние не множестве J_x^*V.*

Доказательство этого предложения получается из доказательства предложения 1 заменой ρ_x на ρ_x^* и каждого выражения вида $\| \varphi_s P - Q \|$ выражением $\| \varphi_s P - Q \| + \| (\varphi_s P)^{-1} - Q^{-1} \|$.

§ 3. 1. *Абстрактным расслоением* называется тройка $(\mathfrak{E}, p, \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{B}$ — некоторые множества, а p — отображение множества $\mathfrak{E}$ на множество $\mathfrak{B}$. Слово «абстрактное» предпослано слову «расслоение» с целью указать на отсутствие топологии или какой-либо иной структуры на множествах $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{B}$. Соответственно этому и от проекции не требуется ничего, кроме того, что она есть отображение множества $\mathfrak{E}$ на множество $\mathfrak{B}$.

Сечением абстрактного расслоения $(\mathfrak{E}, p, \mathfrak{B})$ называется отображение σ : $\mathfrak{B} \to \mathfrak{E}$ такое, что диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E} \arrow[dr, "p"] & \\
\mathfrak{B} \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "{}^{1}\mathfrak{B}"'] & & \mathfrak{B}
\end{tikzcd}
$$

коммутативна. Множество всех сечений абстрактного расслоения $(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$ обозначим через $\sum(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$.

2. *Метрическим абстрактным расслоением* называется пара $((\mathcal{E}, p, \mathfrak{B}), \rho)$, где $(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$ — абстрактное расслоение, а ρ — отображение, которое каждому $b \in \mathfrak{B}$ ставит в соответствие расстояние $\rho_b = \rho_b(\cdot,\cdot)$ на слое $p^{-1}(b)$.

Пусть дано сечение $\sigma \in \sum(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$. Через $\sum_\sigma(\rho)$ обозначим множество всех сечений $\tau \in \sum(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{b \in B} \rho_b(\tau b, \sigma b) < +\infty. \tag{9}$$

3. Определение 7. Пусть дано метрическое абстрактное расслоение $((\mathcal{E}, p, \mathfrak{B}), \rho)$. Для каждого $\sigma \in \sum(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$ определим отображение $dist_\sigma : \sum_\sigma(\rho) \times \sum_\sigma(\rho) \to \overline{R}$ формулой

$$dist_\sigma(\tau, \upsilon) = \sup_{b \in \mathfrak{B}} \rho_b(\tau b, \upsilon b). \tag{10}$$

4. Предложение 3. *Для всякого* $\sigma \in \sum(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$ *отображение* $dist_\sigma$ *есть расстояние на множестве* $\sum_\sigma(\rho)$.

Доказательство. Пусть дано $\sigma \in \sum(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$.

1) Пусть даны $\tau \in \sum_\sigma(\rho)$, $\upsilon \in \sum_\sigma(\rho)$. Тогда

$$\sup_{b \in \mathfrak{B}} \rho_b(\tau b, \sigma b) < +\infty, \tag{11}$$

$$\sup_{b \in \mathfrak{B}} \rho_b(\upsilon b, \sigma b) < +\infty. \tag{12}$$

В силу определения 7 имеем

$$dist_\sigma(\tau, \upsilon) = \sup_{b \in \mathfrak{B}} \rho_b(\tau b, \upsilon b) \le \sup_{b \in \mathfrak{B}} \big(\rho_b(\tau b, \sigma b) + \rho_b(\sigma b, \upsilon b)\big) \le \sup_{b \in \mathfrak{B}} \rho_b(\tau b, \sigma b) + \sup_{b \in B} \rho_b(\sigma b, \upsilon b).$$

Правая часть последнего неравенства меньше $+\infty$ вследствие неравенств (11), (12). Поэтому $dist_\sigma(\tau, \upsilon) < +\infty$.

2) Так как при всяком $b \in B$ отображение $\rho_b(\cdot,\cdot)$ есть расстояние на $p^{-1}(b)$ и, следовательно, все его значения неотрицательны, то из определения 7 вытекает, что все значения отображения $dist_\sigma$ неотрицательны.

3) Соединив результаты пунктов 1) и 2), получаем, что $dist_\sigma$, первоначально определенное как отображение $\sum_\sigma(\rho) \times \sum_\sigma(\rho) \to \overline{R}$, в действительности является отображением $\sum_\sigma(\rho) \times \sum_\sigma(\rho) \to R^+$.

4) Для всякого $\tau \in \sum_\sigma(\rho)$ имеет место следующая цепочка, первое равенство в которой следует из определения 7, а второе — из того, что $\rho_b(\cdot,\cdot)$ — расстояние на $p^{-1}(b)$ и потому $\rho_b(c, c) = 0$ для всякого $c \in p^{-1}(b)$:

$$dist_\sigma(\tau, \tau) = \sup_{b \in \mathfrak{B}} \rho_b(\tau b, \tau b) = 0.$$

5) Пусть даны $\tau \in \sum_\sigma(\rho)$, $\upsilon \in \sum_\sigma(\rho)$, для которых $dist_\sigma(\tau,\upsilon)=0$. В силу определения 7 это значит, что

$$\sup_{b\in\mathfrak{B}} \rho_b(\tau b, \upsilon b) = 0,$$

откуда $\rho_b(\tau b,\upsilon b) \le 0$ для всякого $b \in \mathfrak{B}$. А так как $\rho_b(\cdot,\cdot)$ — расстояние, то отсюда следует, что $\tau b = \upsilon b$ для всякого $b \in \mathfrak{B}$, т. е. $\tau = \upsilon$.

6) Пусть даны $\tau \in \sum_\sigma(\rho), \upsilon \in \sum_\sigma(\rho)$. Из определения 7 следуют равенства

$$dist_\sigma(\tau,\upsilon) = \sup_{b\in\mathfrak{B}} \rho_b(\tau b,\upsilon b),$$

$$dist_\sigma(\upsilon,\tau) = \sup_{b\in\mathfrak{B}} \rho_b(\upsilon b,\tau b).$$

правые части которых равны между собой, поскольку функция $\rho_b(\cdot,\cdot)$, будучи расстоянием, симметрична.

7) Пусть даны $\tau \in \sum_\sigma(\rho)$, $\upsilon \in \sum_\sigma(\rho)$, $\omega \in \sum_\sigma(\rho)$. При всяком $b \in \mathfrak{B}$ из неравенства треугольника для расстояния $\rho_b(\cdot,\cdot)$ на $p^{-1}(b)$ имеем

$$\rho_b(\tau b,\upsilon b) \le \rho_b(\tau b,\omega b) + \rho_b(\omega b,\upsilon b).$$

Отсюда следует цепочка неравенств

$$\sup_{b\in\mathfrak{B}} \rho_b(\tau b,\upsilon b) \le \sup_{b\in\mathfrak{B}}(\rho_b(\tau b,\omega b) + \rho_b(\omega b,\upsilon b)) \le \sup_{b\in\mathfrak{B}} \rho_b(\tau b,\omega b) + \sup_{b\in\mathfrak{B}} \rho_b(\omega b,\upsilon b).$$

Левая часть первого неравенства этой цепочки в силу определения 7 равна $dist_\sigma(\tau,\upsilon)$, а слагаемые в правой части последнего неравенства этой цепочки в силу того же определения 7 равны соответственно $dist_\sigma(\tau,\omega)$ и $dist_\sigma(\omega,\upsilon)$. Поэтому

$$dist_\sigma(\tau,\upsilon) \le dist_\sigma(\tau,\omega) + dist_\sigma(\omega,\upsilon).$$

Предложение доказано.

§4-1. Обозначив через $\mathcal{E}$ множество всех 1-струй на многообразии *V*, т. е. положив

$$\mathcal{E} = \bigcup_{x\in V} J_x V,$$

обозначив *V* через $\mathfrak{B}$ и положив $p(y,L)=x$ для всяких $x \in V$, $(y,L) \in J_x V$, мы получаем абстрактное расслоение $(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$.

2. Из этого определения следует, что слоем $p^{-1}(x)$ над точкой $x \in V$ является $J_x V$, т.е. множество всех 1-струй в многообразии *V*, вытекающих из точки *x*. Поэтому сечение *x* построенного абстрактного расслоения $(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$ есть нечто иное, как отображение, которое каждой точке $x \in V$ ставит в соответствие некоторую 1-струю, вытекающую из этой точки:

$$\tau x = (y(\tau,x), L_{\tau,x}),$$

где $y(\tau,x) \in V$, а $L_{\tau,x} \in Hom\left(T_x V, T_{y(\tau,x)} V\right)$. Таково описание множества $\sum(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$ всех сечений абстрактного расслоения, построенного в п. 1.

3. Для всякого непрерывно дифференцируемого отображения *f*: $V \to V$, т. е. для всякого $f \in \mathrm{G}$, через jet f обозначается одноструйное расширение отображения *f*, т. е. отображение, которое всякую точку $x \in V$ преобразует в 1-струю (fx, df_x), где df_x — производная отображения f в точке *x*. Тем самым определено отображение jet множества $\mathfrak{G}$ в множество $\sum(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$ сечений абстрактного расслоения $(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$, определенного в п. 1:

$$(\text{jet } f)x = (fx, df_x)$$

для всякого $x \in V$. В обозначениях предыдущего пункта это выглядит так:

$$y(\text{jet}\, f, x) = fx, \tag{13}$$

$$L_{\text{jet}\, f, x} = df_x. \tag{14}$$

4. Если $(\text{jet}\, g)x = (\text{jet}\, f)x$ при всяком $x \in V$, то $fx = gx$ при всяком $x \in V$, т. е, отображения f и g совпадают. Поэтому отображение jet есть инъекция множества $\mathfrak{S}$ в множество $\sum(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$.

§5. Доказательство теоремы 1.1) В силу предложения 1 для всякого $x \in V$ отображение $\rho_x : J_x V \times J_x V \to \bar{\mathbf{R}}$, определенное формулой (7), есть расстояние на $J_x V$. Множество $\sum(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$ всех сечений абстрактного расслоения $(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$, построенного в п. 1, описано в п. 2. Напомним, что для всякого $\sigma \in \sum(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$ через $\sum_\sigma(p)$ обозначается множество сечений τ метрического абстрактного расслоения $((\mathcal{E}, p, \mathfrak{B}), \rho)$, удовлетворяющих неравенству (9). В ситуации, рассматриваемой сейчас, когда ρ_x определено формулой (7), $\sum_\sigma(p)$ для всякого $\sigma \in \sum(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$ есть множество всех отображений

$$\tau : V \to \bigcup_{x \in V} J_x V$$

таких, что

$$\tau x = (y(\tau, x), L_{\tau, x}),$$

где $y(\tau, x) \in V$, $L_{\tau,x} \in \text{Hom}\, (T_x V, T_{y(\tau,x)} V)$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x \in V} \inf_{u \in G(y(\tau,x), y(\sigma,x))} \{s(u) + \| \varphi_u L_{\sigma,x} - L_{\tau,x} \|\} < +\infty. \tag{15}$$

2) Пусть дано $j \in \mathfrak{S}$. С помощью (13), (14) формула (15) для $\sigma = \text{jet}\, j$, $\tau = \text{jet}\, f$, где f — любой элемент множества $\mathfrak{S}$, записывается в виде неравенства

$$\sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx, jx)} \{s(u) + \| \varphi_u dj_x - df_x \|\} < +\infty. \tag{16}$$

Поэтому множество тех $f \in \mathfrak{S}$, для которых $\text{jet}\, f \in \sum_{\text{jet}\, j}(\rho)$, есть множество тех $f \in \mathfrak{S}$, которые удовлетворяют неравенству (16). А это есть ничто иное, как множество $\mathfrak{S}_j$, введенное в определении 1. Отсюда следует включение

$$\text{jet}\, \mathfrak{S}_j \subset \sum_{\text{jet}\, j}(\rho).$$

3) В силу предложения 3 для всякого $\sigma \in \sum(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$ отображение dist_σ: $\sum_\sigma(\rho) \times \sum_\sigma(\rho) \to \bar{\mathbf{R}}$, определенное формулой (10), есть расстояние на множестве $\sum_\sigma(\rho)$. Формула (10) выглядит теперь (когда ρ_x определено формулой (7)) так:

$$\text{dist}_\sigma(\tau, \upsilon) = \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(y(\tau,x), y(\sigma,x))} \{s(u) + \| \varphi_u L_{\sigma,x} - L_{\tau,x} \|\}.$$

Положив в только что доказанном утверждении $\sigma = \text{jet}\, j$, получаем, что отображение $\text{dist}_{\text{jet}\, j} : \sum_{\text{jet}\, j}(\rho) \times \sum_{\text{jet}\, j}(\rho) \to \bar{\mathbf{R}}$, определенное формулой

$$\text{dist}_{\text{jet}\, j}(\tau, \upsilon) = \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(y(\tau,x), y(\sigma,x))} \{s(u) + \| \varphi_u L_{\upsilon,x} - L_{\tau,x} \|\}, \tag{17}$$

является расстоянием на $\sum_{\text{jet}\, j}(\rho)$.

4) Пусть даны $f \in \mathfrak{S}_j$, $g \in \mathfrak{S}_j$. Положив $\tau = \text{jet}\, f$, $\upsilon = \text{jet}\, g$ в формуле (17) и используя (13), (14), получаем формулу

$$\text{dist}_{\text{jet}\, j}(\text{jet}\, j, \text{jet}\, g) = \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx, gx)} \{s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \|\}, \tag{18}$$

Правые части равенств (18) и (4) совпадают, следовательно, совпадают и левые:

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{jet}\, j}(\mathrm{jet}\ \boldsymbol{j}, \mathrm{jet}\ \boldsymbol{g}) = \tilde{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}_j(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}).$$

Выше мы доказали, что $\mathrm{dist}_{\mathrm{jet}\, j}$ есть расстояние на $\sum_{\mathrm{jet}\, j}(\rho) \supset \mathrm{jet}\ \mathfrak{S}_j$. Отображение jet есть инъекция множества $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{S}_j$ в множество $\sum(\mathcal{E}, p, \mathfrak{B})$ (см. п. 4, § 4). Следовательно, отображение $\tilde{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}_j : \mathfrak{S}_j \times \mathfrak{S}_j \to \bar{\mathbf{R}}$ есть расстояние на множестве $\mathfrak{S}_j$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 получается из доказательства теоремы 1 заменой ρ_x на ρ_x^*, $\boldsymbol{J}_x\boldsymbol{V}$ на $\boldsymbol{J}_x^*\boldsymbol{V}$, $\mathfrak{S}$ на $\mathfrak{S}^*$, $\mathfrak{S}_j$ на $\mathfrak{S}_j^*$, $\tilde{\boldsymbol{\mathfrak{d}}}_j$ на $\boldsymbol{\mathfrak{d}}_j$, всякого выражения вида $\| \varphi_u \boldsymbol{M} - \boldsymbol{L} \|$ на выражение $\| \varphi_u \boldsymbol{M} - \boldsymbol{L} \| + \| (\varphi_u \boldsymbol{M})^{-1} - \boldsymbol{L}^{-1} \|$ и ссылки на предложение 1 ссылкой на предложение 2. Все указанные замены должны быть сделаны всюду, где встречаются указанные выражения. Теорема доказана.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
09.04.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Миллионщиков В.М. О некоторых метрических пространствах диффеоморфизмов. — Математические заметки, 1985, т. 37, вып. 4, с. 561—579.