ТИПИЧНОЕ СВОЙСТВО УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ

Миллионщиков В.М.
(г. Москва)

В теории устойчивости наиболее законченные результаты относятся к исследованию устойчивости положений равновесия к периодических колебаний (циклов) автономных систем дифференциальных уравнений и диффеоморфизмов.

Причина этого состоит в простоте как решений линейных систем с постоянными коэффициентами - эти системы получаются в результате линеаризации автономной системы в положении равновесия, так и решений линейных систем с периодическими коэффициентами; последние возникают при линеаризации автономной системы вдоль цикла. Линейные системы с постоянными коэффициентами интегрируются в элементарных функциях - суммах квазимногочленов. Линейные системы с периодическими коэффициентами приводятся к линейным системам с постоянными коэффициентами линейными преобразованиями, периодически зависящими от времени.

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению утверждает следующее. Пусть нулевое решение уравнения в вариациях автономной системы, взятого в неподвижной или периодической точке, асимптотически устойчиво. Тогда эта неподвижная или периодическая точка автономной системы устойчива.

Правда, при линеаризации автономной системы дифференциальных уравнений вдоль периодической траектории никогда не возникает линейная система с асимптотически устойчивым нулевым решением. Поэтому сформулированная теорема в случае периодической точки содержательна только для автономных систем с дискретным временем (для диффеоморфизмов). Но для автономных систем дифференциальных уравнений имеется эрзац устойчивости - орбитальная устойчивость - и эрзац теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению - теорема Андронова-Витта об орбитальной устойчивости по первому приближению.

Вопрос об устойчивости неособых траекторий изучен значительно меньше. Причина этого двоякая. С одной стороны - невозможность проинтегрировать в квадратурах линейную систему с переменными коэффициентами сколько-нибудь общего вида. С другой - отсутствие для таких систем аналога теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Контрпример к воображаемому аналогу такого рода был построен Перроном. Этот пример показывает, что для произвольного решения нелинейной автономной системы из асимптотической и даже из экспоненциальной устойчивости нулевого решения уравнения в вариациях нельзя сделать вывод об устойчивости решения нелинейной автономной системы, вдоль которого берется уравнение в вариациях.

Мы сформулируем здесь теорему об устойчивости по первому приближению, относящуюся не ко всем, но к типичным траекториям, и не всех, но типичных автономных систем. Мы рассматриваем здесь автономные системы с дискретным временем, порожденные диффеоморфизмами. Свойство называется типичным (по Бэру), если им обладает всюду плотное множество точек, являющееся счетным пересечением открытых множеств. Пусть связное полное риманово многообразие V равномерно картографируемо, т.е. шар некоторого постоянного радиуса с центром в любой точке имеет карту, в которой элементы матрицы метрического тензора, обратной к ней матрицы и их первые производные ограничены по модулю числом, не зависящим от точки - центра шара.

Всякое компактное риманово многообразие, а также евклидово пространство равномерно картографируемо.

Обозначим через S множество диффеоморфизмов V на V, у которых производная самого диффеоморфизма и обратного к нему равномерно непрерывна и ограничена. Для всякого $j \in S$ в множестве S_j диффеоморфизмов $f \in S$ удовлетворяющих неравенству $\sup\limits_{x \in v} \rho(fx, jx) < +\infty$; где ρ расстояние на V, вводится расстояние

$$d(f,g) = \sup_{x \in v} \inf_{u \in G(fx, gx)} \left\{ s(u) + \left\| \varphi_u dg_x - df_x \right\| \right\};$$

здесь: $G(y,z)$ множество кусочно-гладких путей u, идущих в многообразии V из точки z в точку $y : s(u)$-длина пути $u : \varphi_u$ - параллельный перекос вдоль пути u.

Точка $y \in V$ называется экспоненциально устойчивой относительно диффеоморфизма $g : V \to V$, если

$$\varlimsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \ln \sup_{z\in w} \rho\left(g^m z, g^m y\right) < 0$$

для некоторой окрестности W точки y.

ТЕОРЕМА. При всяком $j \in S$ в пространстве $S_j \times V$ типична стабильная устойчивость по первому приближению, т. е. для типичной (по Бэру) точки $(f,x) \in S_j \times V$ из неравенства

$$\varlimsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \ln \left\| d\left(f^m\right)_x \right\| < 0$$

следует, что множество тех $\left(g,y\right) \in S_j \times V$, для которых точка y экспоненциально устойчива относительно диффеоморфизма g, есть окрестность точки $\left(f,x\right)$. Частные случаи см. в [1], [2].

Литература

1. Миллионщиков В.М. Типичность стабильной устойчивости по первому приближению. - Математические заметки, 1984, т.36, №4, с. 517-530.

2. Миллионщиков В.М. Типичное свойство устойчивости по первому приближению. - Успехи математических наук, 1984, т.39, №5, с. 258-259.

Типичное свойство устойчивости по Ляпунову. Миллионщиков В.М. Доклады расширенных заседаний семинара Института прикладной математики им. И.Н.Векуа, 1986, т.1, №3.

Известно, что из отрицательности всех показателей Ляпунова линеаризированной системы нельзя, вообще говоря, сделать вывод об устойчивости решения нелинейной системы. Теорема, сформулированная в докладе, утверждает, что для типичного решения типичной системы такой вывод справедлив.

Библ. 2 назв.