МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 39, № 1 (1986)

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА СЕМЕЙСТВА ЭНДОМОРФИЗМОВ МЕТРИЗОВАННОГО ВЕКТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
«Математические заметки», 1986

В. М. Миллионщиков

Показатели Ляпунова линейной системы дифференциальных уравнений с ограниченными локально суммируемыми коэффициентами определяются, как известно, следующим образом [1]. Среди всех фундаментальных систем решений выбираются нормальные, т. е. такие, у которых сумма показателей Ляпунова решений, входящих в фундаментальную систему, наименьшая. Показатели Ляпунова решений нормальной фундаментальной системы — доказывается, что они не зависят от выбора нормальной фундаментальной системы — называются показателями Ляпунова линейной системы дифференциальных уравнений.

Как видно из этого определения, нахождение показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений требует нахождения минимума функции сравнительно сложной природы, так как зависимость суммы показателей Ляпунова решений, входящих в ту или иную фундаментальную систему, от фундаментальной системы не является простой. Что касается самих показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений, то их зависимость от системы оказывается довольно сложной. Исследование показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений как функций от этих линейных систем облегчается благодаря формулам, выражающим показатели Ляпунова через счетные последовательности сравнительно простых функций от системы, точнее — через двойные счетные последовательности таких функций. Доказательство таких формул и составляет содержание этой статьи.

С целью расширить круг возможных приложений мы излагаем эти формулы сразу в более общей ситуации. Во-первых, мы отказываемся от условия ограниченности коэффициентов системы, обеспечивающего конечность показателей Ляпунова ненулевых решений. Подчеркнем, что мы именно снимаем это условие, а не заменяем его каким-либо другим, например, ограниченностью коэффициентов в среднем, которое было бы более слабым, но тоже влекло бы за собой конечность показателей Ляпунова всех ненулевых решений. В приложениях коэффициенты систем бывают и неограниченными, поэтому желание полностью освободиться от условия ограниченности коэффициентов продиктовано соображениями не только теоретического, но и прикладного характера.

Во-вторых, здесь, как и в [2], [3], изложение ведется не только для линейных систем дифференциальных уравнений, но и для линейных систем разностных уравнений, для нелинейных систем дифференциальных уравнений, для дифференцируемых преобразований римановых многообразий и для других объектов. Но рассматриваются здесь эти объекты не по отдельности, а сразу в общем виде — в виде семейства эндоморфизмов метризованного абстрактного векторного расслоения. Соответствующие определения напоминаются ниже в § 1.

§ 1. 1. *Абстрактным векторным расслоением* называется тройка (E, p, B), первый элемент которой — некоторое множество E, второй элемент — некоторое отображение

p множества E на некоторое множество B, являющееся третьим элементом этой тройки, причем на слое $p^{-1}(b)$ (так называется полный прообраз точки b при отображении p) над всякой точкой $b \in B$ задана структура *n*-мерного векторного пространства $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$. Далее для определенности будем всюду считать, что это — именно $\mathbf{R}^n$, однако заметим, что для перехода к варианту с $\mathbf{C}^n$ в дальнейшее изложение не потребовалось бы вносить сколько-нибудь существенные изменения.

В сущности, абстрактное векторное расслоение есть ничто иное как семейство (изоморфных, конечно, друг другу) n-мерных векторных пространств, параметризованное параметром $b \in B$. Так можно и воспринимать этот объект — абстрактное векторное расслоение. Более того, у читателя может возникнуть вопрос: зачем вообще использовать в этой ситуации язык теории векторных расслоений, когда можно столь легко обойтись без него? Соображения методологического характера, побуждающие к использованию здесь этого языка, состоят в следующем. Некоторые рассмотрения в теории показателей Ляпунова проводятся в существенно более богатых структурах, чем те, о которых говорится в первом абзаце этой статьи. В таких рассмотрениях векторные расслоения, понимаемые в обычном — топологическом — смысле, составляют естественный фон, на котором развертываются построения. Поэтому для изложения общих определений и теорем теории показателей Ляпунова целесообразно выбрать в качестве фона для построений такой объект, который позволил бы сочетать общность изложения с легкостью его конкретизации для векторных расслоений.

В следующих пунктах этого параграфа мы напоминаем определение римановой метрики на абстрактном векторном расслоении и определение семейства эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения. Методологическое замечание, которым снабжено сформулированное выше определение абстрактного векторного расслоения, в полной мере приложимо и к этим объектам, точнее, к выбору языка, на котором, на наш взгляд, целесообразно вести изложение результатов настоящей статьи.

2. *Метризованное абстрактное векторное расслоение* — абстрактное векторное расслоение, на котором задана риманова метрика $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$. Риманова метрика абстрактного векторного расслоения по определению есть отображение $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ множества пар $(\xi,\ \eta)$ точек ξ, η множества E таких, что $p\xi = p\eta$, в действительную прямую $\mathbf{R}$, обладающее свойством: при всяком $b \in B$ сужение отображения $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ на декартов квадрат слоя $p^{-1}(b)$ есть скалярное произведение на векторном пространстве $p^{-1}(b)$.

3. *Семейство эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения* $(E,\ p,\ B)$. Так называется отображение $\mathfrak{M}$ некоторого множества M в множество $\mathrm{End}\,(E,\ p,\ B)$ эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, т. е. в множество пар $(X,\ \chi)$, где отображения $X : E \to E$, $\chi : B \to B$ таковы, что $pX = \chi p$ и для всякого $b \in B$ сужение $X[b]$ отображения X на слой $p^{-1}(b)$ есть линейное отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi b)$.

Значение отображения $\mathfrak{M}$ в точке $t \in M$ будем обозначать через $(X_t,\ \chi_t)$.

Всюду в дальнейшем в этой статье под множеством M будем понимать неограниченное множество положительных действительных чисел. Основные частные случаи: $M = \mathbf{R}_*^+$, $M = \mathbf{N}$.

§ 2. 1. *Показатель Ляпунова* семейства $\mathfrak{M}$ эндоморфизмов метризованного абстрактного векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, риманова метрика на котором обозначается через $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$, при всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $b \in B$ определяется формулой

$$\lambda_k(\mathfrak{M},\ b) = \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^{n-k+1}} \| . \tag{1}$$

Здесь: $G_q(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие q-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$; в выражении «$t \to +\infty$» имеется в виду, что аргумент t стремится к $+\infty$, оставаясь в множестве M. Через $Y|_A$ обозначается сужение отображения Y на множество A. Наконец, норма линейного отображения $X_t|_{\mathbf{R}^q}: \mathbf{R}^q \to p^{-1}(\chi_t b)$ определяется стандартным образом через нормы в слоях, индуцированные римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а именно:

$$X_t|_{\mathbf{R}^q}\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\xi \in \mathbf{R}^q_*} \{ |X_t \xi| \cdot |\xi|^{-1} \}, \tag{2}$$

где $|\eta| \overset{\text{def}}{=} \langle \eta, \eta \rangle^{1/2}$ для всякого $\eta \in E$, а звездочка справа внизу (это обозначение для нас будет далее стандартным) означает выбрасывание нуля; таким образом, $\mathbf{R}^q_*$ — множество всех ненулевых векторов векторного пространства $\mathbf{R}^q$; $\ln 0 \overset{\text{def}}{=} -\infty$.

Из формулы (1) видно, что при всяких $k \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in B$ показатель Ляпунова есть точка расширенной действительной прямой $\overline{\mathbf{R}}$. Напомним, что расширенная действительная прямая $\overline{\mathbf{R}}$ получается присоединением к действительной прямой $\mathbf{R}$ двух символов: $-\infty$ и $+\infty$. Отношение линейного порядка, имеющееся на $\mathbf{R}$, продолжается до отношения линейного порядка на $\overline{\mathbf{R}}$ следующим образом: по определению $-\infty < r$ и $r < +\infty$ для всякого действительного числа r.

2. *Показателем Ляпунова вектора* $\xi \in E$ называется

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi) \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |X_t \xi|; \tag{3}$$

по определению считаем, что $\ln 0 = -\infty$.

Из этого определения следует, что $\lambda(\mathfrak{M}, \xi) \in \overline{\mathbf{R}}$ для всякого $\xi \in E$. В частности,

$$\lambda(\mathfrak{M}, 0_b) = -\infty \tag{4}$$

для всякого $b \in B$; через 0_b обозначается нуль векторного пространства $p^{-1}(b)$.

Предложение 1. *Для всяких* $k \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in B$ *имеет место равенство*

$$\lambda_k(\mathfrak{M}, b) = \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \sup_{\xi \in \mathbf{R}^{n-k+1}} \lambda(\mathfrak{M}, \xi). \tag{5}$$

В силу формулы (1) сформулированное предложение вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 1. *Для всяких* $b \in B$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbf{R}^q \in G_q(p^{-1}(b))$ *имеет место равенство*

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X_t|_{\mathbf{R}^q} \| = \sup_{\xi \in \mathbf{R}^q} \lambda(\mathfrak{M}, \xi),$$

причем верхняя грань в правой части этого равенства достигается.

Доказательство. Пусть даны $b \in B$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbf{R}^q \in G_q(p^{-1}(b))$.

1) Для всяких $t \in M$, $\xi \in \mathbf{R}^q_*$ из формулы (2) следует неравенство

$$|X_t \xi| \leqslant \| X_t|_{\mathbf{R}^q} \| \cdot |\xi|. \tag{6}$$

Из того, что при всех $t \in M$, $\xi \in \mathbf{R}^q_*$ имеет место неравенство (6), для всякого $\xi \in \mathbf{R}^q_*$ вытекает неравенство в цепочке

$$\begin{aligned} \lambda(\mathfrak{M}, \xi) &= \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |X_t \xi| \leqslant \\ &\leqslant \overline{\lim_{t \to +\infty}} \left(\frac{1}{t} \ln \| X_t|_{\mathbf{R}^q} \| + \frac{1}{t} \ln |\xi| \right) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X_t|_{\mathbf{R}^q} \|. \end{aligned} \tag{7}$$

Последнее равенство в этой цепочке следует из формулы

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|\xi|=0,$$

вытекающей из неравенства $|\xi|\neq 0$, которое, в свою очередь, следует из условия $\xi\in\mathbf{R}^q_*$.

Из (4) следует неравенство

$$\lambda(\mathfrak{M},\ 0_b)\leqslant\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\|X_t|_{\mathbf{R}^q}\|,$$

соединив которое с неравенством (7), доказанным для всякого $\xi\in\mathbf{R}^q_*$, получаем

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}^q}\lambda(\mathfrak{M},\ \xi)\leqslant\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\|X_t|_{\mathbf{R}^q}\|. \tag{8}$$

2) Пусть дано $t\in M$. На слое $p^{-1}(b)$, а следовательно, и на его векторном подпространстве $\mathbf{R}^q$ задано скалярное произведение, поскольку на $(E,\ p,\ B)$ задана риманова метрика $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$. Пусть $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_q\}$ — какой-нибудь ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbf{R}^q$. Пусть дано $\xi\in\mathbf{R}^q$. Тогда

$$\xi=\sum\nolimits_{j=1}^{q}\langle\xi,\ \xi_j\rangle\xi_j.$$

Имеем:

$$X_t\xi=\sum\nolimits_{j=1}^{q}\langle\xi,\ \xi_j\rangle X_t\xi_j,$$

откуда

$$|X_t\xi|\leqslant\sum\nolimits_{j=1}^{q}|\langle\xi,\ \xi_j\rangle||X_t\xi_j|. \tag{9}$$

Вследствие неравенства Коши-Буняковского $|\langle\xi,\ \xi_j\rangle|\leqslant|\xi|\cdot|\xi_j|=|\xi|$ для всякого $j\in\{1,\ \ldots,\ n\}$. Поэтому из (9) следует неравенство

$$|X_t\xi|\leqslant|\xi|\sum\nolimits_{j=1}^{q}|X_t\xi_j|. \tag{10}$$

Из неравенства (10), доказанного для всякого $\xi\in\mathbf{R}^q$, вследствие формулы (2) вытекает

$$\|X_t|_{\mathbf{R}^q}\|\leqslant\sum\nolimits_{j=1}^{q}|X_t\xi_j|.$$

Далее, имеет место неравенство

$$\sum\nolimits_{j=1}^{q}|X_t\xi_j|\leqslant q\max_{j\in\{1,\ \ldots,\ q\}}|X_t\xi_j|,$$

из соединения которого с предыдущим неравенством следует, что

$$\|X_t|_{\mathbf{R}^q}\|\leqslant q\max_{j\in\{1,\ \ldots,\ q\}}|X_t\xi_j|.$$

Отсюда

$$\ln\|X_t|_{\mathbf{R}^q}\|\leqslant\ln q+\ln\max_{j\in\{1,\ \ldots,\ q\}}|X_t\xi_j|. \tag{11}$$

Так как $\ln:\mathbf{R}^+\to\overline{\mathbf{R}}$ — монотонно возрастающая функция, то

$$\ln\max_{j\in\{1,\ \ldots,\ q\}}|X_t\xi_j|=\max_{j\in\{1,\ \ldots,\ q\}}\ln|X_t\xi_j|.$$

Поэтому из (11) следует неравенство

$$\ln\|X_t|_{\mathbf{R}^q}\|\leqslant\ln q+\max_{j\in\{1,\ \ldots,\ q\}}\ln|X_t\xi_j|. \tag{12}$$

3) Так как $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln q=0$, то

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left(\frac{1}{t}\ln q+\frac{1}{t}\ln\max_{j\in\{1,\ \ldots,\ q\}}\ln|X_t\xi_j|\right)=$$

$$=\qquad\qquad=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\max_{j\in\{1,\ \ldots,\ q\}}\frac{1}{t}\ln|X_t\xi_j|.$$

Из неравенства (12), доказанного в предыдущем пункте для всякого $t\in M$, следует поэтому

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_t|_{\mathbf{R}^q}\|\leqslant\varlimsup_{t\to+\infty}\max_{j\in\{1,\,\dots,\,q\}}\frac{1}{t}\ln|X_t\xi_j|. \tag{13}$$

Так как

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\max_{j\in\{1,\,\dots,\,q\}}f_j(t)=\max_{j\in\{1,\,\dots,\,q\}}\varlimsup_{t\to+\infty}f_j(t)$$

для любых функций $f_j(\cdot):M\to\overline{\mathbf{R}}$, то правая часть неравенства (13) равна

$$\max_{j\in\{1,\,\dots,\,q\}}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln|X_t\xi_j|=\max_{j\in\{1,\,\dots,\,q\}}\lambda(\mathfrak{M},\ \xi_j)$$

(чтобы получить последнее равенство, надо в (3) положить $\xi=\xi_j$). Поэтому из (13) следует неравенство

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_t|_{\mathbf{R}^q}\|\leqslant\max_{j\in\{1,\,\dots,\,q\}}\lambda(\mathfrak{M},\ \xi_j).$$

4) Так как $\xi_j\in\mathbf{R}^q$ ($j\in\{1,\ \dots,\ q\}$), то из последнего неравенства в силу (8) следует равенство

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\|X_t|_{\mathbf{R}^q}\|=\sup_{\xi\in\mathbf{R}^q}\lambda(\mathfrak{M},\ \xi).$$

Из этих же неравенств ((8) и последнего неравенства п. 3)) вытекает, что точная верхняя грань

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}^q}\lambda(\mathfrak{M},\ \xi)$$

достигается, т. е. вместо нее можно написать

$$\max_{\xi\in\mathbf{R}^q}\lambda(\mathfrak{M},\ \xi)$$

Лемма доказана.

3. *Показатели Ляпунова* $\lambda_k(\mathfrak{M},\,b)$ семейства $\mathfrak{M}$ можно определить иначе. Три других определения изложены в [2], [3]. Их эквивалентность друг другу доказана в цитируемых статьях. Эквивалентность первого определения из [2] определению, приведенному в настоящей статье (формула (1)), вытекает из доказанного выше предложения 1 и теоремы [2].

§ 3. В этом параграфе доказывается серия утверждений, которые по отношению к основному изложению этой статьи являются вспомогательными. Конечный результат этого параграфа позволит нам в дальнейшем изложении написать и доказать некоторые формулы для показателей Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного абстрактного векторного расслоения. Эти формулы будут доказаны именно в этой общей ситуации. Отсутствие в заглавии статьи прилагательного «абстрактное» при словах «векторное расслоение» объясняется стремлением к краткости заглавия.

В дальнейшем часто будет использоваться следующее обозначение. Для всякого $s\in\overline{\mathbf{R}}$ будем обозначать через $\overline{\mathbf{R}}_s$ множество, элементами которого являются $+\infty$ и все действительные числа, строго бóльшие, чем *s*, если таковые имеются. Таким образом, $\overline{\mathbf{R}}_{+\infty}=\{+\infty\}$, а для всякого $s\in\overline{\mathbf{R}}$, отличного от $+\infty$, т. е. для $-\infty$ и для всякого числа, $\overline{\mathbf{R}}_s=(s,\ +\infty]$.

Напомним, что топология в $\overline{\mathbf{R}}$ задается следующим образом. Открытые множества суть множества вида $[-\infty,\ \alpha)$, $(\beta,\ \gamma)$, $(\delta,\ +\infty]$ (где α, β, γ, δ — действительные числа, причем на β и γ накладывается условие $\beta<\gamma$, а в остальном все эти числа произвольны) и всевозможные объединения таких множеств, а также пустое множество.

Пусть задано компактное топологическое пространство F. Пусть $M\subset\mathbf{R}^+_*$ — некоторое неограниченное множество. Пусть при всяком $t\in M$ задана непрерывная функция $a(t,\ \cdot): F \to \overline{\mathbf{R}}$.

Для дальнейшего изложения удобно ввести некоторые обозначения. Положим

$$M_m \overset{\mathrm{def}}{=} M \bigcap [m,\ +\infty)$$

для любого $m \in M$ и

$$M_{m,\,q} \overset{\mathrm{def}}{=} M \bigcap [m,\ q]$$

для любых $m \in M$, $q \in M_m$.

Для всяких $m \in M$, $q \in M_m$ имеет место включение

$$M_{m,\,q} \subset M_m. \tag{14}$$

Для всяких $m \in M$ и всяких $r \in M_m$, $s \in M_m$, связанных неравенством $r \leqslant s$, имеется включение

$$M_{m,\,r} \subset M_{m,\,s}.$$

Для всякого $m \in M$ выполнено равенство

$$M_m = \bigcup\nolimits_{q \in M_m} M_{m,\,q}. \tag{15}$$

Л Е М М А 2. *Для всякого* $m \in M$ *функция* $a^{(m)}(\cdot): M_m \to \overline{\mathbf{R}}$, *определенная формулой*

$$a^{(m)}(q) = \inf_{x \in F} \sup_{t \in M_{m,\,q}} a(t,\ x), \tag{16}$$

— монотонно неубывающая. Для всяких $m \in M$, $q \in M_m$ *имеет место равенство*

$$a^{(m)}(q) = \min_{x \in F} \sup_{t \in M_{m,\,q}} a(t,\ x),$$

т. е. точная нижняя грань в формуле (16) *достигается.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть дано $m \in M$.

1) Пусть даны $r \in M_m$, $s \in M_m$, связанные неравенством $r \leqslant s$. При всяком $x \in F$ имеет место включение $M_{m,\,r} \subset M_{m,\,s}$, из которого следует неравенство

$$\sup_{t \in M_{m,\,r}} a(t,\ x) \leqslant \sup_{t \in M_{m,\,\mathrm{s}}} a(t,\ x). \tag{17}$$

Из того, что при всяком $x \in F$ имеет место (17), следует

$$\inf_{x \in F} \sup_{t \in M_{m,\,r}} a(t,\ x) \leqslant \inf_{x \in F} \sup_{t \in M_{m,\,\mathrm{s}}} a(t,\ x). \tag{18}$$

Положив в формуле (16) $q = r$, получим, что левая часть неравенства (18) равна $a^{(m)}(r)$. Положив в (16) $q = s$, получим, что правая часть неравенства (18) есть $a^{(m)}(s)$. Поэтому (18) можно переписать в виде неравенства $a^{(m)}(r) \leqslant a^{(m)}(s)$. Монотонное неубывание функции $a^{(m)}(\cdot): M_m \to \overline{\mathbf{R}}$ доказано.

2) Пусть дано $q \in M_m$.

а) Для всякого $r \in \overline{\mathbf{R}}$ определим множество

$$F(r,\ m,\ q) \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in F : \sup_{t \in M_{m,\,\mathrm{q}}} a(t,\ x) \leqslant r\}. \tag{19}$$

Конечно, при некоторых $r \in \overline{\mathbf{R}}$ это множество может оказаться пустым, но $F(r,\ m,\ q) \neq \varnothing$ для всякого $r \in \overline{\mathbf{R}}_{a^{(m)}(q)}$.

б) Для всяких $r \in \overline{\mathbf{R}}$, $t \in M$ определим множество

$$F(r,\ t) \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in F : a(t,\ x) \leqslant r\}. \tag{20}$$

Из (19), (20) следует, что для всякого $r \in \overline{\mathbf{R}}$ имеем

$$F(r,\ m,\ q) = \bigcap\nolimits_{t \in M_{m,\,q}} F(r,\ t). \tag{21}$$

в) При всяких $r \in \overline{\mathbf{R}}$, $t \in M$ множество $F(r,\, t)$ замкнуто, так как функция $a(t,\, \cdot): F \to \overline{\mathbf{R}}$ непрерывна при всяком $t \in M$. Поэтому при всяком $r \in \overline{\mathbf{R}}$ множество $F(r,\, m,\, q)$, будучи, согласно формуле (21), пересечением этих замкнутых множеств, замкнуто.

г) Из формулы (19), определяющей множества $F(r,\, m,\, q)$, следует, что для всяких $s \in \overline{\mathbf{R}}$, $r \in \overline{\mathbf{R}}$, связанных неравенством $r \geqslant s$, имеет место включение $F(s,\, m,\, q) \subset F(r,\, m,\, q)$. Отсюда следует, что для всякого конечного множества $\{r_1,\, \ldots,\, r_l\} \subset \overline{\mathbf{R}}$ имеет место равенство

$$\bigcap\nolimits_{k=1}^{l} F(r_k,\, m,\, q) = F(\min\{r_1,\, \ldots,\, r_l\},\, m,\, q). \tag{22}$$

В подпункте а) было отмечено, что множество $F(r,\, m,\, q)$ непусто для всякого $r \in \overline{\mathbf{R}}_{a^{(m)}(q)}$. Из формулы (22) следует, что пересечение любой конечной совокупности множеств $F(r,\, m,\, q)$, где $r \in \overline{\mathbf{R}}_{a^{(m)}(q)}$, есть снова множество такого же вида и потому непусто. Иными словами, совокупность множеств $F(r,\, m,\, q)$, где $r \in \overline{\mathbf{R}}_{a^{(m)}(q)}$, является *центрированной.* В компактном пространстве F всякая центрированная совокупность замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Поэтому

$$I(m,\, q) \overset{\text{def}}{=} \bigcap\nolimits_{r \in \overline{\mathbf{R}}_{a^{(m)}(q)}} F(r,\, m,\, q) \neq \varnothing.$$

д) Из формулы (19), определяющей множества $F(r,\, m,\, q)$, следует, что для всякого $x \in I(m,\, q)$ выполнено неравенство

$$\sup_{t \in M_{m,\,q}} a(t,\, x) \leqslant a^{(m)}(q).$$

Правая часть этого неравенства в силу (16) равна

$$\inf_{x \in F} \sup_{t \in M_{m,\,q}} a(t,\, x).$$

Поэтому для всякого $x \in I(m,\, q)$ выполнено неравенство

$$\sup_{t \in M_{m,\,q}} a(t,\, x) \leqslant \inf_{x \in F} \sup_{t \in M_{m,\,q}} a(t,\, x).$$

Так как $I(m,\, q) \subset F$, то для всякого $x \in I(m,\, q)$ имеем

$$\sup_{t \in M_{m,\,q}} a(t,\, x) \geqslant \inf_{x \in I(m,\,q)} \sup_{t \in M_{m,\,q}} a(t,\, x) \geqslant \inf_{x \in F} \sup_{t \in M_{m,\,q}} a(t,\, x).$$

Соединив две последние фразы, получаем: для всякого $x \in I(m,\, q)$ имеет место равенство

$$\sup_{t \in M_{m,\,q}} a(t,\, x) = \inf_{x \in F} \sup_{t \in M_{m,\,q}} a(t,\, x). \tag{23}$$

е) Так как $\varnothing \neq I(m,\, q) \subset F$, то из результата предыдущего подпункта следует: найдется $x \in F$, для которого выполнено (23). Это означает, что точная нижняя грань в правой части равенства (23) достигается, т. е.

$$\inf_{x \in F} \sup_{t \in M_{m,\,q}} a(t,\, x) = \min_{x \in F} \sup_{t \in M_{m,\,q}} a(t,\, x). \tag{24}$$

Левая часть равенства (24) в силу (16) равна $a^{(m)}(q)$. Поэтому из (24) следует равенство

$$a^{(m)}(q) = \min_{x \in F} \sup_{t \in M_{m,\,q}} a(t,\, x).$$

Лемма доказана.

Л Е М М А 3. *Для всякого* $m \in M$ *существует предел*

$$\lim_{q \to +\infty} a^{(m)}(q)$$

и для этого предела имеет место цепочка равенств

$$\lim_{q\to+\infty} a^{(m)}(q) = \inf_{x\in F}\sup_{t\in M_m} a(t,\ x) = \min_{x\in F}\sup_{t\in M_m} a(t,\ x). \tag{25}$$

Доказательство. Пусть дано $m\in M$.

1) Из первого утверждения леммы 2 в силу теоремы Вейерштрасса о пределе монотонных действительных функций, расширенной на монотонные функции с значениями в $\overline{\mathbf{R}}$, следует, что предел $\lim\limits_{q\to+\infty} a^{(m)}(q)$ (конечный или бесконечный, т. е. принадлежащий $\overline{\mathbf{R}}$) существует. Цитированное расширение теоремы Вейерштрасса сводится к теореме Вейерштрасса путем гомеоморфного отображения $\overline{\mathbf{R}}$ на отрезок — примером такого гомеоморфизма служит отображение, определяемое формулами: $-\infty\mapsto-\pi/2$, $+\infty\mapsto\pi/2$, $t\mapsto \operatorname{arctg} t$ ($t\in\mathbf{R}$).

2) При всяких $q\in M_m$, $x\in F$ имеет место неравенство

$$\sup_{t\in M_{m,\,q}} a(t,\ x)\leqslant \sup_{t\in M_m} a(t,\ x),$$

вытекающее из включения (14). Поэтому при всяком $q\in M_m$ выполнено неравенство

$$\inf_{x\in F}\sup_{t\in M_{m,\,q}} a(t,\ x)\leqslant \inf_{x\in F}\sup_{t\in M_m} a(t,\ x).$$

Левая часть последнего неравенства в силу (16) равна $a^{(m)}(q)$, поэтому

$$a^{(m)}(q)\leqslant \inf_{x\in F}\sup_{t\in M_m} a(t,\ x)$$

для всякого $q\in M_m$. Следовательно,

$$\lim_{q\to+\infty} a^{(m)}(q)\leqslant \inf_{x\in F}\sup_{t\in M_m} a(t,\ x). \tag{26}$$

3) а) Для всяких $r\in\overline{\mathbf{R}}$, $q\in M_m$ множество

$$F(r,\ m,\ q)\overset{\text{def}}{=}\{x\in F:\ \sup_{t\in M_{m,\,\text{q}}} a(t,\ x)\leqslant r\} \tag{27}$$

замкнуто. Это доказано в п. 2 в) доказательства леммы 2; формула (27) совпадает с формулой (19), поэтому здесь и там речь идет об одних и тех же множествах $F(r,\ m,\ q)$.

б) Напомним, что для всякого $q\in M_m$, для всякого $r\in\overline{\mathbf{R}}_{a^{(m)}(q)}$ множество $F(r,\ m,\ q)$ непусто. Это доказано в п. 2 а) доказательства леммы 2.

в) Далее, из формулы (27) в силу включения $M_{m,\,w}\subset M_{m,\,v}$, имеющего место для всяких $v\in M_m$, $w\in M_m$ таких, что $v\geqslant w$, следует, что для всяких $r\in\overline{\mathbf{R}}$, $s\in\overline{\mathbf{R}}$, $v\in M_m$, $w\in M_m$, связанных неравенствами $r\geqslant s$, $v\geqslant w$, имеет место включение $F(s,\ m,\ v)\subset F(r,\ m,\ w)$. Отсюда следует, что

$$\textstyle\bigcap_{k=1}^{l} F(r_k,\ m,\ q_k)\supset F(\min\{r_1,\ \ldots,\ r_l\},\ m,\ \max\{q_1,\ \ldots,\ q_l\}) \tag{28}$$

для всяких $l\in\mathbf{N}$, $r_1\in\overline{\mathbf{R}},\ \ldots,\ r_l\in\overline{\mathbf{R}}$, $q_1\in M_m,\ \ldots,\ q_l\in M_m$.

г) Рассмотрим совокупность множеств $F(r,\ m,\ q)$, где $q\in M_m$, $r\in\overline{\mathbf{R}}_{a^{(m)}(q)}$. Из формулы (28) следует, что пересечение любого конечного набора множеств из этой совокупности содержит множество из этой совокупности. В подпункте б) было отмечено, что пустое множество не входит в рассматриваемую совокупность. Из двух последних фраз вытекает, что рассматриваемая совокупность замкнутых (см. подпункт а)) множеств — центрированная, т. е. конечное пересечение любых множеств из этой совокупности непусто.

д) Центрированная совокупность замкнутых множеств компактного пространства F имеет непустое пересечение. Поэтому из результата предыдущего подпункта следует:

$$I(m) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{q\in M_m} \bigcap_{r\in \bar{\mathbf{R}}_{a^{(m)}(q)}} F(r,\ m,\ q) \neq \varnothing. \tag{29}$$

е) Из формулы (27), определяющей множества $F(r,\ m,\ q)$, и равенства в формуле (29), определяющего множество $I(m)$, вытекает следующее. Для всякого $x \in I(m)$ и всяких $q \in M_m$, $r \in \bar{\mathbf{R}}_{a^{(m)}(q)}$ имеет место неравенство

$$\sup_{t\in M_{m,\,q}} a(t,\ x) \leqslant r.$$

Следовательно, для всяких $x \in I(m)$, $q \in M_m$ выполнено неравенство

$$\sup_{t\in M_{m,\,q}} a(t,\ x) \leqslant a^{(m)}(q).$$

Поэтому

$$\sup_{q\in M_m} \sup_{t\in M_{m,\,q}} a(t,\ x) \leqslant \sup_{q\in M_m} a^{(m)}(q) \tag{30}$$

для всякого $x \in I(m)$.

ж) Из (15) следует, что левая часть неравенства (30) равна

$$\sup_{t\in M_m} a(t,\ x).$$

В силу леммы 2 функция $a^{(m)}(\cdot): M_m \to \bar{\mathbf{R}}$ — монотонно неубывающая, и поэтому правая часть неравенства (30) равна $\lim\limits_{q\to+\infty} a^{(m)}(q)$.

з) Из результатов подпунктов е), ж) вытекает следующий результат, который, наряду с формулой (29), представляет собой итог третьего пункта: для всякого $x \in I(m)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t\in M_m} a(t,\ x) \leqslant \lim_{q\to+\infty} a^{(m)}(q). \tag{31}$$

4) Так как $I(m) \neq \varnothing$ (см. формулу (29)), то из сопоставления результатов пунктов 2) и 3) (см. фразы, содержащие формулы (26) и (31)) вытекает следующее. Величина

$$\sup_{t\in M_m} a(t,\ x),$$

рассматриваемая как функция от $x \in F$, достигает своей точной нижней грани (во всякой точке множества $I(m)$), и эта точная нижняя грань равна

$$\lim_{q\to+\infty} a^{(m)}(q).$$

Последняя фраза эквивалентна цепочке (25). Лемма 3 доказана.

Л Е М М А 4. *Функция* $A(\cdot): M \to \bar{\mathbf{R}}$, *определенная формулой*

$$A(m) \overset{\text{def}}{=} \inf_{x\in F} \sup_{t\in M_m} a(t,\ x), \tag{32}$$

— *монотонно невозрастающая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Напомним, что множества M_m ($m \in M$) определены формулой

$$M_m \overset{\text{def}}{=} M \bigcap [m,\ +\infty).$$

Из этой формулы следует, что для всяких $l \in M$, $m \in M$, связанных неравенством $l \leqslant m$, имеет место включение $M_m \subset M_l$. Поэтому для всяких $l \in M$, $m \in M$ таких, что $l \leqslant m$, для всякого $x \in F$, выполнено неравенство

$$\sup_{t\in M_m} a(t,\ x) \leqslant \sup_{t\in M_l} a(t,\ x).$$

Следовательно, для всяких $l \in M$, $m \in M$, удовлетворяющих неравенству $l \leqslant m$, имеет место неравенство

$$\inf_{x\in F} \sup_{t\in M_m} a(t,\ x) \leqslant \inf_{x\in F} \sup_{t\in M_l} a(t,\ x).$$

Последнее неравенство с помощью формулы (32), определяющей функцию $A(\cdot): M \to \overline{\mathbf{R}}$ переписывается в виде $A(m) \leqslant A(l)$. Мы доказали, что для всяких $l \in M$, $m \in M$ из $l \leqslant m$ следует $A(m) \leqslant A(l)$. Лемма доказана.

Л Е М М А 5. *Предел*

$$\lim_{m \to +\infty} A(m)$$

существует и равен $\inf_{m \in M} A(m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Сформулированная лемма следует из леммы 4 в силу теоремы Вейерштрасса; более подробные сведения о цитируемой теореме см. выше в п. 1) доказательства леммы 3. Лемма доказана.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* F *— компактное топологическое пространство, а* M *— неограниченное множество в* $\mathbf{R}_*^+$. *Пусть при всяком* $t \in M$ *задана непрерывная функция* $a(t, \cdot): F \to \overline{\mathbf{R}}$. *Тогда*

$$\begin{aligned} \inf_{x \in F} \overline{\lim_{t \to +\infty}} a(t, x) = \lim_{m \to +\infty} \lim_{q \to +\infty} \min_{x \in F} \sup_{s \in M_{m,q}} a(t, x) = \\ = \inf_{m \in M} \lim_{q \to +\infty} \min_{x \in F} \sup_{t \in M_{m,q}} a(t, x), \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$M_{m,q} \overset{\text{def}}{=} M \bigcap [m, q]$$

для всяких $m \in M$, $q \in M_m \overset{\text{def}}{=} M \bigcap [m, +\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . 1) Для всякого $x \in F$ имеем

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} a(t, x) = \inf_{m \in M} \sup_{t \in M_m} a(t, x). \tag{34}$$

Это — следствие равенства

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} a(t) = \inf_{m \in M} \sup_{t \in M_m} a(t),$$

имеющего место для всякой функции $a(\cdot): M \to \overline{\mathbf{R}}$.

2) Из того, что для всякого $x \in F$ выполнено (34), следует равенство

$$\inf_{x \in F} \overline{\lim_{t \to +\infty}} a(t, x) = \inf_{x \in F} \inf_{m \in M} \sup_{t \in M_m} a(t, x).$$

Поскольку операции взятия точной нижней грани по разным аргументам коммутируют, правая часть этого равенства равна

$$\inf_{m \in M} \inf_{x \in F} \sup_{t \in M_m} a(t, x).$$

Последнее выражение согласно формуле (32), служащей определением функции $A(\cdot): M \to \overline{\mathbf{R}}$, равно $\inf_{m \in M} A(m)$. В силу леммы 5 предел $\lim_{m \to +\infty} A(m)$ существует и равен $\inf_{m \in M} A(m)$. Из предыдущих фраз этого пункта следует цепочка равенств

$$\inf_{x \in F} \overline{\lim_{t \to +\infty}} a(t, x) = \lim_{m \to +\infty} A(m) = \inf_{m \in M} A(m). \tag{35}$$

2) Правая часть первого равенства цепочки (25), согласно формуле (32), равна $A(m)$. Поэтому из леммы 3 следует равенство

$$\lim_{q \to +\infty} a^{(m)}(q) = A(m) \tag{36}$$

для всякого $m \in M$. В силу второго утверждения леммы 2

$$a^{(m)}(q) = \min_{x \in F} \sup_{t \in M_{m,q}} a(t, x)$$

для всяких $m \in M$, $q \in M_m$. Подставив последнее равенство в формулу (36), получаем

$$A(m) = \lim_{q \to +\infty} \min_{x \in F} \sup_{t \in M_{m,q}} a(t,\, x)$$

для всякого $m \in M$. Подставив это равенство в цепочку (35), получаем цепочку (33). Предложение доказано.

§ 4. В этом параграфе в удобных для дальнейшего изложения обозначениях напоминаются некоторые известные сведения.

Расслоением называется тройка $(\mathcal{E},\, \pi, \mathfrak{B})$, где $\mathcal{E}$ и $\mathfrak{B}$ — топологические пространства, а π — непрерывное отображение $\mathcal{E}$ на $\mathcal{B}$. Расслоение $(\mathcal{E},\, \pi,\, \mathfrak{B})$ называется локально тривиальным, если найдется топологическое пространство $\mathcal{F}\mathfrak{J}$ (стандартный слой) такое, что для всякой точки $\beta \in \mathfrak{B}$ найдутся окрестность V_β точки β и гомеоморфизм h_β пространства $V_\beta \times \mathcal{F}$ на подпространство $\pi^{-1}(V_\beta)$ пространства $\mathcal{E}$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} V_\beta \times \mathcal{F} \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(V_\beta) \arrow[dl, "\pi"] \\ & V_\beta & \end{tikzcd} \quad , \tag{37}$$

где pr_1 — проекция произведения $V_\beta \times \mathfrak{J}$ на первый сомножитель, коммутативна. Отсюда следует, что для всяких $\beta \in \mathfrak{B}$, $\gamma \in V_\beta$ имеет место равенство

$$\pi^{-1}(\gamma) = \{h_\beta(\gamma,\, x)\}_{x \in \mathcal{F}}. \tag{38}$$

Пара $\{V_\beta,\, h_\beta : V_\beta \times \mathfrak{J} \to \pi^{-1}(V_\beta)\}$, обладающая указанными свойствами, или, короче, пара $\{V_\beta,\, h_\beta\}$, называется картой окрестности V_β.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть* $(\mathcal{E},\, \pi,\, \mathfrak{B})$ — *локально тривиальное расслоение с компактным стандартным слоем* $\mathfrak{J}$. *Пусть функция* $f(\cdot) : \mathcal{E} \to \mathbf{R}$ *непрерывна. Тогда*

$$\sup_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\beta)} f(\mathfrak{z}) = \max_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\beta)} f(\mathfrak{z})$$

для всякого $\beta \in \mathcal{B}$ *и функция*

$$g(\cdot) \overset{\mathrm{def}}{=} \max_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\cdot)} f(\mathfrak{z}) : \mathfrak{B} \to \mathbf{R}$$

непрерывна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть дано $\beta \in \mathfrak{B}$. Пусть $\{V_\beta,\, h_\beta\}$ — карта некоторой окрестности V_β точки β. Так как стандартный слой $\mathfrak{F}$ компактен, а координатное отображение $h_\beta : V_\beta \times \mathfrak{F} \to \pi^{-1}(V_\beta)$ непрерывно, то из (38) следует, что слой $\pi^{-1}(\beta)$ компактен. Функция $f(\cdot) : \mathcal{E} \to \mathbf{R}$ по условию непрерывна, поэтому точная верхняя грань ее сужения на компактное множество $\pi^{-1}(\beta)$ достигается, т. е.

$$\sup_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\beta)} f(\mathfrak{z}) = \max_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\beta)} f(\mathfrak{z}).$$

2) Пусть дана точка $\beta \in \mathfrak{B}$. Пусть $\{V_\beta,\, h_\beta\}$ — карта некоторой окрестности V_β точки β.

а) Для всякого $\gamma \in V_\beta$ из (38) следует формула

$$g(\gamma) \overset{\mathrm{def}}{=} \max_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\gamma)} f(\mathfrak{z}) = \max_{x \in \mathfrak{F}} g_\beta(\gamma,\, x), \tag{39}$$

где

$$g_\beta(\gamma,\, x) \overset{\mathrm{def}}{=} f(h_\beta(\gamma,\, x)). \tag{40}$$

б) Функция $g_\beta(\cdot,\, \cdot) : V_\beta \times \mathfrak{F} \to \mathbf{R}$, определенная формулой (40), непрерывна как суперпозиция непрерывных отображений $h_\beta : V_\beta \times \mathfrak{F} \to \pi^{-1}(V_\beta) \subset \mathcal{E}$, $f : \mathcal{E} \to \mathbf{R}$.

в) Пусть дано $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$. Для всякого $x \in \mathfrak{F}$ выберем окрестность U_x точки β в пространстве $V_\beta \subset \mathfrak{B}$ и открытую окрестность W_x точки x в пространстве $\mathfrak{F}$ так, чтобы для всяких $\gamma \in U_x$, $y \in W_x$ выполнялось неравенство

$$|g_\beta(\gamma, y) - g_\beta(\beta, x)| < \varepsilon / 2.$$

Из открытого покрытия $\{W_x\}_{x \in \mathfrak{F}}$ компактного пространства $\mathcal{F}$ выберем конечное покрытие

$$\{W_{x_i}\}_{i \in \{1, \ldots, s\}}. \tag{41}$$

Множество

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^{s} U_{x_i}$$

есть окрестность точки β, в пространстве $V_\beta \subset \mathfrak{B}$. Для всякого $i \in \{1, \ldots, s\}$, для всякого $\gamma \in U \subset U_{x_i}$ и всякого $y \in W_{x_i}$ имеем

$$|g_\beta(\gamma, y) - g_\beta(\beta, x_i)| < \varepsilon / 2. \tag{42}$$

г) Для всякого $\gamma \in U$ возьмем какое-нибудь $x_\gamma \in \mathfrak{F}$, для которого

$$g_\beta(\gamma, x_\gamma) = \max_{x \in \mathcal{F}} g_\beta(\gamma, x). \tag{43}$$

Так как (41) — покрытие пространства $\mathfrak{F}$, то для всякого $\gamma \in U$ найдется $i(\gamma) \in \{1, \ldots, s\}$, для которого $x_\gamma \in W_{x_{i(\gamma)}}$. Взяв в (42) $i = i(\gamma)$, $y = x_\gamma$, получаем для всякого $\gamma \in U$ неравенство

$$|g_\beta(\gamma, x_\gamma) - g_\beta(\beta, x_{i(\gamma)})| < \varepsilon / 2, \tag{44}$$

которое переписывается с помощью (43) в виде

$$|\max_{x \in \mathcal{F}} g_\beta(\gamma, x) - g_\beta(\beta, x_{i(\gamma)})| < \varepsilon / 2.$$

Следовательно,

$$\max_{x \in \mathfrak{F}} g_\beta(\gamma, x) < g_\beta(\beta, x_{i(\gamma)})| + \varepsilon / 2 \leqslant \max_{x \in \mathfrak{F}} g_\beta(\beta, x) + \varepsilon / 2 \tag{45}$$

для всякого $\gamma \in U$.

д) При $\gamma = \beta$ неравенство (44) переписывается в виде

$$|g_\beta(\beta, x_\beta) - g_\beta(\beta, x_{i(\beta)})| < \varepsilon / 2. \tag{46}$$

Для всякого $\gamma \in U$ из фразы, содержащей формулу (42) (при $i = i(\beta)$, $y = x_{i(\beta)}$), следует неравенство

$$|g_\beta(\gamma, x_{i(\beta)}) - g_\beta(\beta, x_{i(\beta)})| < \varepsilon / 2. \tag{47}$$

Из (46), (47) следует, что

$$g_\beta(\beta, x_\beta) < g_\beta(\gamma, x_{i(\beta)}) + \varepsilon \tag{48}$$

для всякого $\gamma \in U$. Формула (43), взятая при $\gamma = \beta$, выглядит так

$$g_\beta(\beta, x_\beta) = \max_{x \in \mathfrak{F}} g_\beta(\beta, x).$$

Подставив это равенство в формулу (48), получаем

$$\max_{x \in \mathfrak{F}} g_\beta(\beta, x) < g_\beta(\gamma, x_{i(\beta)}) + \varepsilon \leqslant \max_{x \in \mathfrak{F}} g_\beta(\gamma, x) + \varepsilon \tag{49}$$

для всякого $\gamma \in U$.

е) Из доказанных для всякого $\gamma \in U$ неравенств (45), (49) следует, что для всякого $\gamma \in U$ имеет место неравенство

$$|\max_{x \in \mathfrak{F}} g_\beta(\gamma, x) - \max_{x \in \mathfrak{F}} g_\beta(\beta, x)| < \varepsilon. \tag{50}$$

Итак, по любому $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ найдена окрестность U точки β такая, что для всякого $\gamma \in U$

имеет место неравенство (50). Тем самым доказана непрерывность функции

$$\max_{x\in\mathfrak{F}} g_\beta(\cdot,\ x): V_\beta \to \mathbf{R}$$

в точке β. В силу формулы (39), имеющей место для всякого $\gamma \in V_\beta$, отсюда следует, что функция $g(\cdot): V_\beta \to \mathbf{R}$ непрерывна в точке β. Так как $\beta \in \mathfrak{B}$ было задано (в начале п. 2)) произвольно, а V_β — окрестность точки β в пространстве $\mathfrak{B}$, то мы доказали, что функция $g(\cdot): \mathfrak{B} \to \mathbf{R}$ непрерывна. Предложение доказано.

§ 5. В этом параграфе мы возвращаемся к рассмотрению семейства $\mathfrak{M}: M \to \mathrm{End}\,(E,\ p,\ B)$ эндоморфизмов абстрактного векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, на котором задана риманова метрика $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$. Вновь, как и в §§ 1, 2, в качестве M фигурирует неограниченное подмножество положительной полупрямой $\mathbf{R}^+_*$ (напомним, что звездочка справа внизу означает выбрасывание нуля; таким образом, $\mathbf{R}^+_*$ — множество положительных действительных чисел).

Л Е М М А 6. *Для всяких* $t \in M$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $b \in B$ *формула*

$$a(t,\ \mathbf{R}^k) = \frac{1}{t}\ln \| X_t\,|_{\mathbf{R}^k} \| \tag{51}$$

определяет непрерывную функцию $a(t,\ \cdot): G_k(p^{-1}(b)) \to \overline{\mathbf{R}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть даны $t \in M$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $b \in B$.

1) Функция $\frac{1}{t}\ln: \mathbf{R}^+ \to \overline{\mathbf{R}}$, как известно, непрерывна ($\ln 0 = -\infty$).

2) Рассмотрим функцию $G_k(p^{-1}(b)) \to \mathbf{R}^+$, определенную формулой $\mathbf{R}^k \mapsto \| X_t\,|_{\mathbf{R}^k} \|$ для всякого $\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))$. Для доказательства непрерывности этой функции проведем вспомогательные построения.

Обозначим через $\mathcal{E}$ подпространство топологического пространства $G_k(p^{-1}(b)) \times p^{-1}(b)$, состоящее из пар $(\mathbf{R}^k,\ \xi)$ таких, что $\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))$, $\xi \in S(\mathbf{R}^k)$, где $S(\mathbf{R}^k)$ — единичная сфера в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^k$ ($\mathbf{R}^k$ наделено евклидовой структурой как подпространство слоя $p^{-1}(b)$).

Обозначим через $\mathcal{B}$ грассманово многообразие $G_k(p^{-1}(b))$, рассматриваемое как топологическое пространство.

Определим отображение $\pi: \mathcal{E} \to \mathfrak{B}$ формулой $\pi(\mathbf{R}^k,\ \xi) = \mathbf{R}^k$ для всяких $\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))$, $\xi \in S(\mathbf{R}^k)$; таким образом, отображение π есть сужение на $\mathcal{E}$ проекции топологического произведения $G_k(p^{-1}(b)) \times p^{-1}(b)$ на первый сомножитель. Из этого определения следует, что π — непрерывное отображение $\mathcal{E}$ на $\mathfrak{B}$ и что

$$\pi^{-1}(R^k) = \{(R^k, \xi)\}_{\xi\in S(R^k)} \tag{52}$$

для всякого $R^k \in G_k(p^{-1}(b))$.

Построенное расслоение $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$ является — это известно и легко выводится из определения — локально тривиальным расслоением со стандартным слоем — $(k-1)$-мерная сфера S^{k-1}.

Функция $G_k(p^{-1}(b)) \times p^{-1}(b) \to R^+$, определенная для всяких $R^k \in G_k(p^{-1}(b))$, $\xi \in p^{-1}(b)$ формулой $(R^k, \xi) \to |X_t\xi|$, непрерывна как суперпозиция трех непрерывных отображений: а) отображения $p^{-1}(\chi_t b) \to R^+$, определенного для всякого $\eta \in p^{-1}(\chi_t b)$

формулой $\eta \to |\eta| = \langle \eta, \eta \rangle^{1/2}$, б) сужения отображения $X_t : E \to E$ на слой $p^{-1}(b)$ (это сужение есть линейное отображение n-мерного векторного пространства $p^{-1}(b)$ в n-мерное векторное пространство $p^{-1}(\chi_t b)$ и потому непрерывно) и в) отображения $G_k(p^{-1}(b)) \times p^{-1}(b) \to p^{-1}(b)$, определенного для всяких $R^k \in G_k(p^{-1}(b)), \xi \in p^{-1}(b)$ формулой $(R^k, \xi) \to \xi$; последнее отображение есть проекция топологического произведения $G_k(p^{-1}(b)) \times p^{-1}(b)$ на второй сомножитель и потому непрерывно.

Сужение на $\mathcal{E}$ функции $(R^k, \xi) \to \xi \,|\, \overline{X_t \xi}\,|$, непрерывно отображающей $G_k(p^{-1}(b)) \times p^{-1}(b)$ в R^+, обозначим через $f(\bullet)$. Функция $f(\cdot) : \mathcal{E} \to R^+$, будучи сужением непрерывной функции, сама непрерывна. В силу предложения 3 функция

$$g(\cdot) \overset{der}{=} \sup_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\cdot)} f(\mathfrak{z}) : \mathfrak{B} \to R$$

непрерывна. Для всякого $R^k \in G_k(p^{-1}(b))$ имеем

$$g(R^k) \overset{der}{=} \sup_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(R^k)} f(\mathfrak{z}) = \sup_{\xi \in S(R^k)} f(R^k, \xi) = \sup_{\xi \in S(R^k)} |X_t \xi| = \| X_t R^k \|.$$

Второе равенство этой цепочки следует из (52), третье — из определения функции $f(\bullet)$, а четвертое — из формулы (2). Эта цепочка показывает, что непрерывная функция $g(\bullet) : G_k(p^{-1}(b)) \to R$ совпадает с функцией, определенной в первой фразе п. 2).

3) Функция $a(t, \bullet) : G_k(p^{-1}(b)) \to R$, определенная формулой (51), есть суперпозиция функции $\frac{1}{t}\ln : R^+ \to \overline{R}$ функции $G_k(p^{-1}(b)) \to R^+$, определенной формулой $R^k \to \| X_t R^k \|$. Непрерывность первой, как отмечено в п. 1), известна, непрерывность второй доказана в ц. 2). Следовательно, функция $a(t, \bullet) : G_k(p^{-1}(b)) \to \overline{R}$, определенная формулой (51), непрерывна. Лемма доказана.

§ 6, Напомним, что показатели Ляпунова $\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{W}, b)$ семейства эндоморфизмов $\mathfrak{W} : M \to End(E, p, B)$ метризованного абстрактного векторного расслоения (E, p, B) при всяких $k \in \{1, ..., n\}, b \in B$ определены формулой

$$\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{W}, b) = \inf_{R^k \in G_k(p^{-1}(b))} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X_t R^k \| \tag{53}$$

эквивалентность этой формулы формуле (1) устанавливается биекцией $k \to n-k+1$ отрезка $\{1, ..., n\}$ на себя. Напомним, что M — неограниченное подмножество открытого луча R_*^+ и что

$$M_{m,q} \overset{der}{=} M \cap [m, q]$$

для всяких $m \in M, q \in M \cap [m, +\infty]$

Т Е О Р Е М А. *Для всяких* $k \in \{1, ..., n\}, b \in B$ *имеет место равенство*

$$\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{W}, b) = \lim_{m \to +\infty} \lim_{q \to +\infty} \min_{R^k \in G_k(p^{-1}(b))} \sup_{t \in M_{m,q}} \frac{1}{t} \ln \| X_t R^k \|$$

и это равенство остается верным, если $\lim\limits_{m \to +\infty}$ *в его правой части заменить на* $\inf\limits_{m \in M}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны $k \in \{1, ..., n\}, b \in B$. Положим $F \in G_k(p^{-1}(b))$. Грассмановы многообразия, как известно, компактны, значит, F компактно. В силу леммы 6 при всяком $t \in M$ функция $a(t,\bullet): F \to \overline{R}$, определенная формулой $a(t,R^k) = \frac{1}{t}\ln \| X_t |_{R^k} \|$, непрерывна. В силу предложения 2 имеет место цепочка равенств

$$\inf_{\in F} \lim_{t\to+\infty} a(t,R^k) = \lim_{m\to+\infty} \lim_{q\to+\infty} \min_{R^k \in F} \sup_{t\in M_{m,q}} a(t,R^k) = \inf_{m\in M} \lim_{q\to+\infty} \min_{R^k\in F} \sup_{t\in M_{m,q}} a(t,R^k)$$

Подставив в эту цепочку формулы $F = G_k(p^{-1}(b))$ и $a(t,R^k) = \frac{1}{t}\ln \| X_t |_{R^k} \|$, получаем, что имеет место равенство

$$\inf_{R^k\in G_k(p^{-1}(b))} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln \| X_t R^k \| = \lim_{m\to+\infty} \lim_{q\to+\infty} \min_{R^k\in G_k(p^{-1}(b))} \sup_{t\in M_{m,q}} \frac{1}{t}\ln \| X_t R^k \|$$

и что это равенство останется верным, если $\lim\limits_{m\to+\infty}$ в его правой части заменить на $\inf\limits_{m\in M}$. Левая часть этого равенства в силу (53) есть $\lambda_{n-k+1}(?,b)$. Теорема доказана.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
05.07.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ляпунов А. М. Собр. соч., т. 2.— М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

[2] Миллионщиков В.М. Показатели Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения.— Математические заметки, 1985, т. 38, вып. 1, с. 92—109.

[3] Миллионщиков В.М. Нормальные базисы семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения.— Математические заметки, 1985, т. 38, вып. 5, с. 691—708.