В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрен спектр показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений. Изучены все линейные системы с непрерывными коэффициентами, которыми* могут служить и неограниченные функции. В этом случае некоторые показатели могут принимать бесконечные значения.

Характеристические показатели линейных систем дифференциальных уравнений, введенные А. М. Ляпуновым [,1], находят все более широкое применение в различных областях теории дифференциальных уравнений и ее приложений. В связи с этим возникла потребность в некотором пересмотре основ теории показателей Ляпунова. Обычно показатели определяются для линейных систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющих тому или иному условию ограниченности коэффициентов (равномерно или в среднем), которые обеспечивают конечность показателя Ляпунова всякого ненулевого решения и влекут за собой конечность показателей Ляпунова рассматриваемой системы. Между тем в ряде приложений теории дифференциальных уравнений такие условия не выполняются. Это лишает возможности пользоваться в таких ситуациях результатами теории показателей Ляпунова, так как даже само исходное определение оказывается тогда не совсем пригодным. В связи с этим возможен некоторый пересмотр основ данной теории, приводящий к расширению этого понятия «а системы с неограниченными коэффициентами. Для этого необходимо, чтобы показатели Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений могли принимать не только числовые значения, но и $-\infty, +\infty.$ значения

Статья ставит перед собой цель расширить основы теории показателей Ляпунова на линейные системы дифференциальных уравнений без каких бы то ни было условий ограниченности их коэффициентов и построить теорию показателей Ляпунова не только индивидуальной системы, но и различных классов систем, таких, как, например, системь с почти периодическими коэффициентами. С этой целью мы рассматри-ваем классическую конструкцию, в которой основным объектом является линейная система $\dot{u} = A(f^t x)u,$ зависящая от параметра $x,$ принимающего значения в некотором метрическом пространстве. При этом характере зависимости коэффициентов системы от «времени» t определяется тем, что f^t — динамическая система на этом метрическом пространстве. Термин «динамическая система» понимается при этом в смысле, приданном ему А. А. Марковым, т. е. как непрерывное действие группы действительных чисел на метрическом пространстве [2].

Опишем рассматриваемый объект точно. Пусть на метрическом пространстве D задано непрерывное действие группы действительных чисел R. Обозначим через S множество непрерывных отображений пространства D в пространство линейных преобразований евклидова пространства, обозначаемое через $\mathrm{End}\, E^n$. Скалярное произведение в E^n обозначим через $(\cdot,\ \cdot)$, а порожденную им норму — через $|\cdot|$. Для всяких $A(\cdot) \in S$, $x \in D$ рассматривается линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = A(f^t x)\, u, \tag{1}$$

где $u \in E^n$.

Чтобы пояснить смысл рассмотрения семейств линейных систем дифференциальных уравнений (1), коэффициенты которых указанным в формуле (1) образом зависят от «времени» $t \in R$ и от «параметров» $A \in S$, $x \in D$, напомним о некоторых частных случаях этой конструкции.

Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (автономные линейные системы). Этот класс систем получается из формулы (1) в случае, если пространство D состоит из единственной точки x: $D=\{x\}$; действие f^t группы R на D в этом случае, естественно, тривиально: $f^t x = x$ для всех $t \in R$.

Линейные системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Этот класс систем соответствует случаю, когда пространство D есть окружность, а действие f^t группы R состоит во вращении окружности на угол t.

Линейные системы (дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами с заданным модулем частот. Этот класс систем получается в случае, когда пространство D есть k-мерный тор T^k, а действие группы R на нем — *обмотка тора* T^k — задается формулой $f^t(x_1,\ \ldots,\ x_k)=(x_1+\mu_1 t,\ \ldots,\ x_k+\mu_k t)$, где $(x_1,\ \ldots,\ x_k)\,(\mathrm{mod}\,1)$ — циклические координаты на торе T^k, а $\mu_1,\ \ldots,\ \mu_k$ — заданные числа (порожденный ими модуль над кольцом целых чисел Z и есть *модуль частот*).

Наряду с термином «*квазипериодические*» используется также его синоним «*условнопериодические*». Кроме того, квазипериодические коэффициенты с $(\leqslant k)$-мерным модулем частот, т. е. с модулем частот, порожденным k частотами, называются иногда k-*периодическими* коэффициентами.

Линейные системы дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами с заданным модулем частот. Мы расположили классы систем в порядке их расширения; в частности, рассматриваемый сейчас класс шире предыдущего.

К этому классу относятся системы (1), построенные по динамическим системам, определяемым следующим образом. Пусть $\varphi(\cdot)$ — некоторая действительная почти периодическая функция действительного переменного. Множество всех ее сдвигов наделяется равномерной метрикой

$$d\,(\psi_1(\cdot),\ \psi_2(\cdot))=\sup_{t\in R}|\,\psi_1(t)-\psi_2(t)\,| \tag{2}$$

и пополняется в этой метрике. Полученное полное метрическое пространство обозначим через D; оно зависит, конечно, от функции $\varphi(\cdot)$. Действие f^t группы R на D задается формулой

$$f^t\psi\,(\cdot)=\psi\,(t+(\cdot)). \tag{3}$$

Ситуация, рассматриваемая здесь, очень напоминает конструкцию, называемую динамической системой сдвигов, но имеются и некоторые отличия. Напомним, что *динамическая система сдвигов* [2, с. 533—535] определяется той же формулой (3), но в другом пространстве. Точками пространства являются всевозможные непрерывные на прямой функции (не только почти периодические), и топология берется компактно-открытая, сходимость в которой равномерная на каждом комплекте (или, что эквивалентно, на каждом отрезке), а не равномерная на прямой.

Классическая конструкция (1) охватывает и более широкие классы — системы с рекуррентными коэффициентами, системы с устойчивыми по Пуассону коэффициентами и др.

Напомним, что *рекуррентной* (соответственно *устойчивой по Пуассону*) называется функция действительного переменного t, определенная формулой $\varphi(f^t x)$, где $\varphi(\cdot)$ — непрерывное отображение некоторого метрического пространства D в некоторое метрическое пространство (например, в действительную прямую R), а f^t — непрерывное действие группы R на D (иными словами, f^t — динамическая система на D), причем x — рекуррентная (соответственно устойчивая по Пуассону) точка динамической системы f^t. Напомним, что точка называется рекуррентной, если траектория всякой точки замыкания ее траектории плотна в этом замыкании, а само замыкание компактно. Устойчивость по Пуассону точки (относительно динамической системы f^t) определяется так: точка x устойчива по Пуассону, если она является α- и ω-предельной точкой своей траектории, т. е. если найдутся последовательности чисел $\Theta_m \in R$, $\tau_m \in R$, стремящиеся соответственно к $+\infty$ и к $-\infty$, и такие, что обе последовательности $\{f^{\theta_m} x\}_{m \in N}$, $\{f^{\tau_m} x\}_{m \in N}$ сходятся к точке x.

Перейдем теперь к рассмотрению показателей Ляпунова системы (1). Среди имеющихся определений показателей А. М. Ляпунова [1, 3, 4] оригинальное определение Ляпунова может на первый взгляд показаться наименее подходящим для обобщения на системы с неограниченными коэффициентами. Дело в том, что в этом определении фигурируют суммы показателей Ляпунова решений, образующих ту или иную фундаментальную систему, и, мало того, эти суммы приходится сравнивать по величине, чтобы отыскать среди них наименьшую. Если показатели Ляпунова всех ненулевых решений конечны, то это можно сделать, но ненулевые решения систем с неограниченными коэффициентами могут иметь бесконечные показатели Ляпунова, что приводит к некоторому затруднению. Это препятствие, однако, легко обходится. Небольшое видоизменение определения Ляпунова (положенное, кстати, в основу изложения в [5]) избавляет нас не только от необходимости складывать показатели Ляпунова, но и от необходимости сравнивать величины их сумм.

Далее мы излагаем три различных определения показателей Ляпунова системы (1) и формулируем теорему, устанавливающую попарную эквивалентность этих определений.

Сначала общий для всех определений этап — определение показателя Ляпунова любого решения системы (1). При всяких $A \in S$, $x \in D$, $u \in E^n$ *показатель Ляпунова* $\lambda(A, x; u)$ *решения* $u(\cdot)$ системы (1), начинающегося в точке u, т. е. удовлетворяющего начальному условию $u(0) = u$, определяется формулой

$$\lambda(A, x; u) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} t^{-1} \ln |u(t)|. \tag{4}$$

Здесь, как и всюду, мы полагаем $\ln 0 = -\infty$. *В* силу этого соглашения из формулы (4) следует, в частности, что $\lambda(A, x; u) = -\infty$.

О п р е д е л е н и е 1. Для всяких $k \in \{1, \ldots, n\}$, $A \in S$, $x \in D$ *показатель Ляпунова* $\lambda_k(A, x)$ *системы* (1) определяется формулой $\lambda_k(A, x) = \inf\limits_{R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(E^n)} \sup\limits_{u \in R^{n-k+1}} \lambda(A, x; u)$, где через $G_q(E^n)$ обозначается множество всех q-мерных векторных подпространств пространства E^n.

Поясним, что inf и sup в этой формуле, вообще говоря, не числа, а точки расширенной числовой прямой $\overline{R}$, получаемой присоединением к R элементов $-\infty$, $+\infty$; отношение порядка, имеющееся на R, известным образом продолжается до отношения порядка на $\overline{R}$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть даны $A \in S$, $x \in D$. Расположив в порядке неубывания по включению все различные значения отображения $\lambda \to \{u \in E^n : \lambda(A, x; u) \leqslant \lambda\}$ расширенной числовой прямой $\overline{R}$ в множество векторных подпространств пространства E^n и написав первое из них столько раз подряд, какова его размерность, а затем каждое следующее столько раз подряд, какова разность его размерности с размерностью предыдущего подпространства, получим цепочку нестрогих включений $E_1(A, x) \subset \ldots \subset E_n(A, x)$.

Положим

$$\lambda_k(A, x) = \sup_{u \in E_{n-k+1}(A, x)} \lambda(A, x; u) \quad (k \in \{1, \ldots, n\}).$$

О п р е д е л е н и е 3. Базис $\{u_1, \ldots, u_n\}$ пространства E^n называется *нормальным* для системы (1), если для всякого базиса $\{v_1, \ldots, v_n\}$ того же пространства, расположенного в порядке невозрастания показателей Ляпунова $\lambda(A, x; v_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(A, x; v_n)$, при всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$, выполнено неравенство $\lambda(A, x; v_k) \geqslant \lambda(A, x; u_k)$.

При всяких $k \in \{1, \ldots, n\}$, $A \in S$, $x \in D$ положим $\lambda_k(A, x) = \lambda(A, x; u_k)$, где $\{u_1, \ldots, u_n\}$ — нормальный базис пространства E^n для системы (1).

Т е о р е м а. Определения 1—3 попарно эквивалентны. Доказательство этой теоремы, равно как и доказательство корректности определений 2, 3, состоит в применении к системе (1) теорем, доказанных в более общей ситуации — *для семейства эндоморфизмов метризованного абстрактного векторного расслоения* [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений. М.; Л., 1956. Т. 2. 472 с.
2. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1949. 550 с.
3. *Былое Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966. 576 с.
4. *Изобов Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.— В кн.: Итоги науки и техники. М., 1974, т. 12, с. 71—146.
5. *Миллионщиков В. М.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. — В кн.:: Международный конгресс математиков в Ницце: Докл. советских математиков. М., 1972, с. 207—211.
6. *Миллионщиков В. М.* Показатели Ляпунова семейства эндоморфизмов метризо**ванного** векторного расслоения. — Мат. заметки, 1985, т. 38, вып. 1, с. 92—109.
7. *Миллионщиков В. М.* Нормальные базисы семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения. — Там же, вып. 5, с. 691—708.

Резюме

Макалада сызыкты дифференциалдык тендеулер системалары Ляпунов керсетюш-терінін спектрі карастырылган.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва

Поступила 2 октября 1985г.