МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 39, № 3 (1986)

НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ГЛАДКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

В. М. Миллионщиков

В работе доказывается совпадение топологий, индуцированных некоторыми метриками, определенными в [1]. Прежде чем привести точные формулировки, напомним некоторые обозначения и определения.

§ 1. 1. Пусть на связном n-мерном дифференцируемом многообразии V (со счетной базой) класса C^2 задана риманова метрика δ класса C^1; $n \geqslant 1$

Как известно, с помощью римановой метрики δ связное дифференцируемое многообразие V наделяется структурой метрического пространства с помощью следующего построения. Для всяких $y \in V, z \in V$ через $G(y,z)$ обозначается множество всех кусочно-гладких путей, идущих из z в y, т. е. множество всех кусочно-гладких отображений $u:[0,1] \to V$ таких, что $u_0 = z, u_1 = y$ (через u_t обозначается значение отображения u в точке $t \in [0,1]$). Как известно, из связности дифференцируемого многообразия V следует, что для всяких $y \in V, z \in V$ множество $G(y,z)$ не пусто. Расстояние ρ на V определяется для всяких $y \in V, z \in V$ формулой

$$p(y,z) = \inf_{u \in G(y,z)} s(u)$$

где

$$s(u) \overset{der}{=} \int_0^1 [\delta(\dot{u}_t, \dot{u}_t)]^{1/2} dt \qquad (1)$$

— длина пути u.

2. О п р е д е л е н и е 1. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех отображений $V \to V$ класса C^1.

3. О п р е д е л е н и е 2. Для всякого $\mathfrak{j} = \mathfrak{S}$ обозначим через $\mathfrak{S}_j$ множество всех $\mathfrak{f} = \mathfrak{S}$, удовлетворяющих неравенству

$$\overline{\delta}(f, j) < +\infty \qquad (2)$$

где $\overline{\delta} : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \overline{R}$ — отображение, определенное формулой

$$\overline{\delta}(g,h) = \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(gx,hx)} \{s(u) + \| \varphi_u dh_x - dg_x \|\} \qquad (3)$$

(для всяких $g \in \mathfrak{S}, h \in \mathfrak{S}$).

Здесь и далее через φ_u обозначается параллельный перенос вдоль пути u (в силу римановой связности, индуцированной римановой метрикой δ). Как известно, параллельный перенос φ_u вдоль любого пути $u \in G(y,z)$, соединяющего любые точки $y \in V, z \in V$, является изоморфизмом евклидова пространства $(T_z V, \delta)$ на евклидово пространство $(T_y V, \delta)$. Через $(T_x V, \delta)$ здесь обозначено касательное пространство $T_x V$ многообразия V в точке x, наделенное структурой евклидова пространства с помощью римановой метрики δ (точнее, с помощью ее сужения на $T_xV \times T_xV$).

4. Определение 3. Для всякого $j \in \mathfrak{S}$ обозначим через $\widetilde{\delta_j}$ сужение на $\mathfrak{S}_j \times \mathfrak{S}_j$ отображения $\overline{\delta} : \mathfrak{S}_j \times \mathfrak{S}_j \to \overline{R}$, определенного формулой (3).

5. В [1] доказано следующее предложение (это — теорема 1 цитируемой статьи).

Предложение 1. *Для всякого $j \in \mathfrak{S}$ отображение $\widetilde{\delta_j}$ есть расстояние на $\mathfrak{S}_j$.*

6. Определение 4. Обозначим через $\mathfrak{S}^*$ множество всех отображений $\mathfrak{f} = \mathfrak{S}$, производная которых не вырождена в каждой точке $x \in V$.

Определение 5. Для всякого $j \in \mathfrak{S}^*$ обозначим через $\mathfrak{S}^*_j$ множество всех $j \in \mathfrak{S}^*$, удовлетворяющих неравенству

$$\delta(f, j) < +\infty, \tag{4}$$

где $\delta : \mathfrak{S}^* \times \mathfrak{S}^* \to \overline{R}$ — отображение, определенное формулой

$$\delta(g,h) = \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(gx,hx)} \{s(u) + \| \varphi_u dh_x - dg_x \| + \| (\varphi_u dh_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \| \} \tag{5}$$

(для всяких $g \in \mathfrak{S}^*, h \in \mathfrak{S}^*$)

8. Определение 6. Для всякого $j \in \mathfrak{S}^*$ обозначим через δ_j сужение на $\mathfrak{S}^*_j \times \mathfrak{S}^*_j$ отображения $\delta : \mathfrak{S}^* \times \mathfrak{S}^* \to \overline{R}$, определенного формулой (5).

9. В [1] доказано следующее предложение (теорема 2 цитируемой статьи).

Предложение 2. *Для всякого $j \in \mathfrak{S}^*$ отображение δ_j есть расстояние на $\mathfrak{S}^*_j$*

§ 2. Предложение 3. *Имеет место включение* $\mathfrak{S}^* \subset \mathfrak{S}$

Доказательство. Это включение вытекает из определения 4. Предложение доказано.

ЛЕММА 1. *Для всяких $f \in \mathfrak{S}^*, g \in \mathfrak{S}^*$ имеет место неравенство $\tilde{\delta}(f,g) \leqslant \delta(f,g)$.*

Доказательство. Пусть даны $f \in \mathfrak{S}^*, g \in \mathfrak{S}^*$. Для всяких $x \in V, u \in G(fx, gx)$ имеет место неравенство

$$\| (\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1} \| \geqslant 0$$

откуда

$$s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \| \leqslant s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \| + \| (\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1} \|.$$

Отсюда следует, что при всяком $x \in V$ выполнено неравенство

$$\inf_{u \in G(gx,hx)} \{s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \| \} \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{u \in G(fx,gx)} \{s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \| + \| (\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1} \| \}$$

Поэтому

$$\sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx,gx)} \{s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \| \} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx,gx)} \{s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \| + \| (\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1} \| \}$$

Левая часть доказанного неравенства вследствие формулы (3) равна $\tilde{\delta}(f,g)$, а его правая часть в силу формулы (5) равна $\delta(f,g)$. Поэтому доказанное неравенство переписывается в виде $\tilde{\delta}(f,g)_1 \le \delta(f,g)$. Лемма доказана.

Предложение 4. *Для всякого $j \in \mathfrak{S}^*$ имеет место включение $\mathfrak{S}^*_j \subset \mathfrak{S}_j$*

Доказательство. Пусть дано $j \in \mathfrak{S}^*$. Пусть дано $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{S}^*_j$. Согласно определению 5 это означает, что $f \in \mathfrak{S}^*$ и выполнено неравенство

$$\delta(f, j) < +\infty \tag{6}$$

Поскольку $j \in \mathfrak{S}^*, f \in \mathfrak{S}^*$, то $\tilde{\delta}(f,j) < \delta(f,j)$ в силу леммы 1. Поэтому из (6) следует неравенство

$$\widetilde{\delta}(f,j) < +\infty \tag{7}$$

Далее, $j \in \mathfrak{S}$, так как $j \in \mathfrak{S}^*$, а $\mathfrak{S}^* \subset \mathfrak{S}$ в силу предложения 3. Так как $f \in \mathfrak{S}^*$, то в силу предложения 3 имеем $f \in \mathfrak{S}$

Итак, $f \in \mathfrak{S}$ и удовлетворяет неравенству (7). В силу определения 2 это означает, что $f \in \mathfrak{S}_j$. Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 5. *Для всякого $j \in \mathfrak{S}^*$ топология, индуцированная на $\mathfrak{S}_j^*$ метрикой δ_j, мажорирует топологию, индуцированную сужением метрики $\widetilde{\delta_j}$ на $\mathfrak{S}_j^*$*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть дано $j \in \mathfrak{S}^*$. 1) Пусть даны $f \in \mathfrak{S}_j^*, g \in \mathfrak{S}_j^*$. Из определения 5 следует включение $\mathfrak{S}_j^* \subset \mathfrak{S}^*$. Поэтому $f \in \mathfrak{S}^*, g \in \mathfrak{S}^*$. В силу леммы 1 имеет место неравенство

$$\widetilde{\delta}(f,g) \leqslant \delta(f,g) \tag{8}$$

Так как $f \in \mathfrak{S}_j^*, g \in \mathfrak{S}_j^*$, то в силу определения 6 правая часть неравенства (8) равна $\delta_j(f,g)$. Так как $f \in \mathfrak{S}_j^*, g \in \mathfrak{S}_j^*$, а согласно предложению 4 имеет место включение $\mathfrak{S}_j^* \subset \mathfrak{S}_j$, то $f \in \mathfrak{S}_j, g \in \mathfrak{S}_j$. Поэтому в силу определения 3 левая часть неравенства (8) может быть переписана в виде $\widetilde{\delta}_j(f,g)$. В результате само неравенство (8) можно переписать в виде

$$\widetilde{\delta}_j(f,g) \leqslant \delta_j(f,g) \tag{9}$$

2) Итак, для всяких $f \in \mathfrak{S}_j^*, g \in \mathfrak{S}_j^*$ имеет место неравенство (9). Отсюда следует, что топология, индуцированная на $\mathfrak{S}_j^*$ метрикой δ_j, мажорирует топологию, индуцированную сужением метрики $\widetilde{\delta}_j$ на $\mathfrak{S}_j^*$. Предложение доказано.

Заметим, что отображение $\delta : \mathfrak{S}^* \times \mathfrak{S}^* \to \overline{R}$, определенное формулой (5), есть в то же время отображение $\delta : \mathfrak{S}^* \times \mathfrak{S}^* \to \overline{R}^+$, где $\overline{R}^+ = \overline{R}^+ \bigcup \{+\infty\}$. Для любых элементов множества $\overline{R}^+$ определена сумма: для чисел — обычная, а если хоть одно из слагаемых равно $+\infty$, то сумма по определению равна $+\infty$.

Л Е М М А 2. *Отображение $\delta : \mathfrak{S}^* \times \mathfrak{S}^* \to \overline{R}^+$ удовлетворяет неравенству треугольника: $\delta(f,g) \le \delta(f,h) + \delta(h,g)$ для всяких $f \in \mathfrak{S}^*, g \in \mathfrak{S}^*, h \in \mathfrak{S}^*$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть даны $f \in \mathfrak{S}^*, g \in \mathfrak{S}^*, h \in \mathfrak{S}^*$. Для всяких $x \in V, y \in V, z \in V, u \in V(x,y), v \in G(y,z)$ обозначим через $\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v}$ путь, определенный формулой

$$(u \circ v)_t = \begin{cases} v_{2t} \text{ при } t \in [0,1/2) \\ u_{2t-1} \text{ при } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

Из этой формулы следует, что $u \circ v \in G(x,z)$. Кроме того, из этой формулы в силу определения длины пути следует формула

$$s(u \circ v) = s(u) + s(v) \tag{10}$$

а в силу определения параллельного перенесения вытекает равенство

$$\varphi_{u \circ v} = \varphi_u \varphi_v. \tag{11}$$

Для всяких $x \in V, u \in G(fx,hx), v \in G(hx,gx)$ имеем в силу (11)

$$\varphi_{u \circ v} dg_x - df_x = \varphi_u \varphi_v dg_x - df_x =$$
$$= \varphi_u(\varphi_u dg_x - dh_x) + \varphi_u dh_x - df_x$$

откуда следует

$$\| \varphi_{u \circ v} dg_x - df_x \| \le \| \varphi_u dg_x - dh_x \| + \| \varphi_u dh_x - df_x \| \tag{12}$$

так как φ_u — изоморфизм евклидовых пространств. Для всяких $x \in V, u \in G(fx,hx), v \in G(hx,gx)$ имеем

$$(\varphi_{u \circ v} dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1} = (dg_x)^{-1} \varphi_{u \circ v}^{-1} - (df_x)^{-1} = (dg_x)^{-1} (\varphi_u \varphi_v)^{-1} - (df_x)^{-1} =$$
$$= [(dg_x)^{-1} \varphi_v^{-1} - (dh_x)^{-1}] \varphi_u^{-1} + (dh_x)^{-1} \varphi_u^{-1} - (df_x)^{-1} = [(\varphi_v dg_x)^{-1} - (dh_x)^{-1}] \varphi_u^{-1} + (\varphi_u dh_x)^{-1} - (df_x)^{-1};$$

второе равенство в этой цепочке следует из (11); отсюда, воспользовавшись тем, что φ_u — изоморфизм евклидовых пространств, получаем

$$\|(\varphi_{u\circ v}dg_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|\leqslant\|(\varphi_v dg_x)^{-1}-(dh_x)^{-1}\|+\|(\varphi_u dh_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\| \tag{13}$$

Для всяких $x\in V, u\in G(fx,hx), v\in G(hx,gx)$ почленным сложением равенства (10) и неравенств (12) и (13) получаем неравенство

$$s(u\circ v)+\|\varphi_{u\circ v}dg_x-df_x\|+\|(\varphi_{u\circ v}dg_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|\leqslant[s(u)+\|\varphi_u dh_x-df_x\|+$$
$$+\|(\varphi_u dh_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|]+[s(v)+\|\varphi_v dg_x-dh_x\|+\|(\varphi_v dg_x)^{-1}-(dh_x)^{-1}\|]$$

При всяком $x\in V$ первая квадратная скобка в правой части этого неравенства не зависит от *v*, а вторая не зависит от *u*, поэтому при всяком $x\in V$ имеем

$$\inf_{\substack{u\in G(fx,hx)\\ v\in G(hx,gx)}} s(u\circ v)+\|\varphi_{u\circ v}dg_x-df_x\|+\|(\varphi_{u\circ v}dg_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|\leqslant\inf_{u\in G(fx,hx)}[s(u)+\|\varphi_u dh_x-df_x\|+$$
$$+\|(\varphi_u dh_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|]+\inf_{v\in G(hx,gx)}[s(v)+\|\varphi_v dg_x-dh_x\|+\|(\varphi_v dg_x)^{-1}-(dh_x)^{-1}\|] \tag{14}$$

Так как $u\circ v\in G(fx,gx)$ при всяких $x\in V, u\in G(fx,gx), u\in G(hx,gx)$, то для всякого $x\in V$ из (14) следует

$$\inf_{w\in G(fx,gx)}[s(w)+\|\varphi_w dg_x-df_x\|+\|(\varphi_w dg_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|]\leqslant\inf_{u\in G(fx,hx)}[s(u)+\|\varphi_u dh_x-df_x\|+$$
$$+\|(\varphi_u dh_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|]+\inf_{v\in G(hx,gx)}[s(v)+\|\varphi_v dg_x-dh_x\|+\|(\varphi_v dg_x)^{-1}-(dh_x)^{-1}\|].$$

Взяв от обеих частей полученного неравенства точную верхнюю грань по $x\in V$ и воспользовавшись тем, что

$$\sup_{\alpha\in A}[\alpha(a)+\beta(a)]\leqslant\sup_{\alpha\in A}\alpha(a)+\sup_{\alpha\in A}\beta(a)$$

для всяких функций $\alpha(\cdot):A\to\overline{R^+}, \beta(\cdot):A\to\overline{R^+}$, где A — произвольное множество, получаем неравенство

$$\sup_{x\in V}\inf_{w\in G(fx,gx)}[s(w)+\|\varphi_w dg_x-df_x\|+\|(\varphi_w dg_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|]\leqslant\sup_{x\in V}\inf_{u\in G(fx,hx)}[s(u)+\|\varphi_u dh_x-df_x\|+$$
$$+\|(\varphi_u dh_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|]+\sup_{x\in V}\inf_{v\in G(hx,gx)}[s(v)+\|\varphi_v dg_x-dh_x\|+\|(\varphi_u dg_x)^{-1}-(dh_x)^{-1}\|] \tag{15}$$

В силу формул, получаемых из (5) заменами: 1) $g\to f, h\to g$, 2) $g\to f$, 3) $g\leftrightarrow h$, неравенство (15) можно переписать в виде $\delta(f,g)\leqslant\delta(f,h)+\delta(h,g)$. Лемма доказана

Л Е М М А 3. *Для всяких* $j\in\mathfrak{S}^*, f\in\mathfrak{S}_j^*$ *имеет место включение* $\mathfrak{S}_j^*\subset\mathfrak{S}_j^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть даны $j\in\mathfrak{S}^*, f\in\mathfrak{S}_j^*$. Из того, что $f\in\mathfrak{S}_j^*$, в силу определения 5 следует $f\in\mathfrak{S}^*$,

$$\delta(f,j)<+\infty \tag{16}$$

Пусть дано $g\in\mathfrak{S}_j^*$. Тогда из определения 5 имеем $g\in\mathfrak{S}^*$ и имеет место строгое неравенство

$$\delta(g,f)<+\infty \tag{17}$$

В силу леммы 2 имеем $\delta(g,j)\leqslant\delta(g,f)+\delta(f,j)$. Правая часть этого неравенства $<+\infty$ в силу (16), (17). Поэтому

$$\delta(g,j)<+\infty \tag{18}$$

Из того, что $g\in\mathfrak{S}^*$ удовлетворяет неравенству (18), в силу определения 5 следует, что $g\in\mathfrak{S}_j^*$.

Итак, доказано, что для всякого $g\in\mathfrak{S}_j^*$ имеем $g\in\mathfrak{S}_j^*$. Доказанное означает, что выполнено включение $\mathfrak{S}_j^*\subset\mathfrak{S}_j^*$. Лемма доказана.

Л Е М М А 4. *Отображение* $\delta : \mathfrak{S}^* \times \mathfrak{S}^* \to \overline{R^+}$, *определенное формулой* (5), *симметрично, т. е.* $\delta(f,g) = \delta^{'}(g,f)$ *для всяких* $f \in \mathfrak{S}^*, g \in \mathfrak{S}^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны $f \in \mathfrak{S}^*, g \in \mathfrak{S}^*$. Для всяких $y \in V, z \in V, u \in G(y,z)$ обозначим через u^{-1} путь, определенный формулой

$$(u^{-1})_t = u_{1-t} (t \in [0,1]).$$

Отображение $u \to u^{-1}$ есть биекция множества $G(z,y)$ на множество $G(z,y)$, так как для всяких $u \in G(y,z), v \in G(y,z)$ из равенства $u^{-1} = v^{-1}$ следует равенство $u = v$ (поскольку $u = (u^{-1})^{-1}, v = (v^{-1})^{-1}$) и для всякого $v \in G(z,y)$ имеем $v = (v^{-1})^{-1}$, причем $v^{-1} \in G(y,z)$. Из определения пути u^{-1} следует также равенство

$$s(u) = s(u^{-1}) \tag{19}$$

(в силу определения длины пути) и равенство

$$\varphi_{u-1} = \varphi_{u}^{-1} \tag{20}$$

(в силу определения параллельного переноса вдоль пути).

Для всяких $x \in V, u \in G(fx, gx)$ запишем выражение $\varphi_u dg_x - df_x$ в виде $\varphi_u [dg_x - \varphi_u^{-1} df_x] = \varphi_u [dg_x - \varphi_{u-1} df_x]$ (последнее равенство следует из (20)). Так как φ_u — изоморфизм евклидовых пространств, то из записи выражения $\varphi_u dg_x - df_x$ в указанном виде следует равенство норм

$$\| \varphi_u dg_x - df_x \| = \| \varphi_{u-1} df_x - dg_x \|. \tag{21}$$

Для всяких $x \in V, u \in G(fx, gx)$ запишем выражение $(\varphi_u dj_x)^{-1} - (df_x)^{-1}$ в виде

$$(dg_x)^{-1} \varphi_u^{-1} - (df_x)^{-1} = (dg_x)^{-1} \varphi_{u-1} - (df_x)^{-1} = [(dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1} \varphi_{u-1}^{-1}] \varphi_{u-1} = [(dg_x)^{-1} - (\varphi_{u-1} df_x)^{-1}] \varphi_{u-1}$$

(первое равенство этой цепочки следует из (20)). Так как φ_{u-1} — изоморфизм евклидовых пространств, то из записи выражения $(\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1}$ в указанном виде следует равенство норм

$$\| (\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1} \| = \| (\varphi_{u^{-1}} df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \|. \tag{22}$$

Сложив при всяких $x \in V, u \in G(fx, gx)$ равенства (19), (21), (22), получаем, что при всяких $x \in V, u \in G(fx, gx)$ имеет место равенство

$$s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \| + \| (\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1} \| = s(u^{-1}) + \| \varphi_{u^{-1}} df_x - dg_x \| + \| (\varphi_{u^{-1}} df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \|.$$

Отсюда следует, что при всяком $x \in V$ выполнено равенство

$$\inf_{u \in G(fx,gx)} \{ s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \| + \| (\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1} \| \} =$$

$$= \inf_{u \in G(fx,gx)} \{ s(u^{-1}) + \| \varphi_{u^{-1}} df_x - dg_x \| + \| (\varphi_{u^{-1}} df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \| \}. \tag{23}$$

Так как при всяком $x \in V$ отображение $u \to u^{-1}$ есть биекция множества $G(fx, gx)$ на множество $G(gx, fx)$, то правая часть полученного равенства при всяком $x \in V$ равна

$$\inf_{v \in G(gx,fx)} \{ s(v) + \| \varphi_v df_x - dg_x \| + \| (\varphi_v df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \| \}.$$

Поэтому точная верхняя грань по $x \in V$ от этого выражения равна точной верхней грани по $x \in V$ от левой части равенства (23):

$$\sup_{x \in V} \inf_{u \in G(fx,gx)} \{ s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \| + \| (\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1} \| \} = \sup_{x \in V} \inf_{v \in G(gx,fx)} \{ s(v) +$$

$$+ \| \varphi_v df_x - dg_x \| + \| (\varphi_v df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \| \} \tag{24}$$

Заменив в формуле (5) (g,h) на (f,g), получаем, что левая часть равенства (24) равна $\delta(f,g)$. Заменив в формуле (5) *h* на *f*, получаем, что правая часть равенства (24) равна $\delta(g,f)$. Следовательно, $\delta(f,g) = \delta(g,f)$. Лемма доказана.

П р е д л о ж е н и е 6. *Для всяких* $j \in \mathfrak{S}^*, f \in \mathfrak{S}_j^*$ *имеет место равенство* $\mathfrak{S}_f^* = \mathfrak{S}_j^*$.

Доказательство. Пусть даны $j \in \mathfrak{S}^*, f \in \mathfrak{S}^*_j$. В силу леммы 3 имеет место включение

$$\mathfrak{S}^*_f \subset \mathfrak{S}^*_j \tag{25}$$

Так как $f \in \mathfrak{S}^*_j$, то (согласно определению 5) $f \in \mathfrak{S}^*$ и выполнено неравенство $\delta(f,g) < +\infty$. В силу леммы 4 это неравенство можно переписать в виде $\delta(j,f) < +\infty$. Поэтому (снова учитывая, что $j \in \mathfrak{S}^*, f \in \mathfrak{S}^*$) в силу определения 5 имеем $j \in \mathfrak{S}^*_j$

Итак, $f \in \mathfrak{S}^*, j \in \mathfrak{S}^*_j$, т. е. выполнены условия леммы 3 (с заменой $f \leftrightarrow j$). Поэтому в силу леммы 3 имеет место включение

$$\mathfrak{S}^*_j \subset \mathfrak{S}^*_f. \tag{26}$$

Соединив включения (25), (26), получаем равенство $\mathfrak{S}^*_j = \mathfrak{S}^*_j$. Предложение доказано.

ЛЕММА 5. *Для всякого $j \in \mathfrak{S}^*$ имеет место равенство $\delta(j,j) = 0$.*

Доказательство. Пусть дано $j \in \mathfrak{S}^*$. Для всякого $x \in V$ для пути $u[jx]$, определенного формулой $u[jx]_t \equiv jx$, имеют место равенства

$$s(u[jx]) = 0, \varphi_{u[jx]} = 1_{T_{jx}V};$$

поэтому

$$s(u[jx]) + \| \varphi_{u[jx]} dj_x - dj_x \| + \| (\varphi_{u[jx]} dj_x)^{-1} - (dj_x)^{-1} \| = 0 \tag{27}$$

для всякого $x \in V$. Раз для всякого $x \in V$ нашелся путь $u[jx] \in G(jx, jx)$, для которого выполнено (27), то

$$\inf_{u \in G(jx,jx)} \{ s(u) + \| \varphi_u dj_x - dj_x \| + \| (\varphi_u dj_x)^{-1} - (dj_x)^{-1} \| \} = 0$$

для всякого $x \in V$ (поскольку фигурная скобка ≥ 0), откуда

$$\sup_{x \in V} \inf_{u \in G(jx,jx)} \{ s(u) + \| \varphi_u dj_x - dj_x \| + \| (\varphi_u dj_x)^{-1} - (dj_x)^{-1} \| \} = 0$$

Последнее равенство с помощью формулы (5) переписывается в виде $\delta(j,j) = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Для всякого $j \in \mathfrak{S}^*$ имеет место формула $j \in \mathfrak{S}^*_j$.*

Доказательство. Пусть дано $j \in \mathfrak{S}^*$. В силу леммы 5 имеем $\delta(j,j) = 0 < +\infty$. Отсюда в силу определения 5 следует, что $j \in \mathfrak{S}^*_j$. Лемма доказана.

§ 3. Определение 7. Обозначим через $\mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$ множество всех $f \in \mathfrak{S}^*$, удовлетворяющих неравенству

$$||| (df_x)^{-1} ||| \overset{def}{=} \sup_{x \in V} \| (df_x)^{-1} \| < +\infty$$

Определение 8. Для всякого $j \in \mathfrak{S}^*$ положим

$$\mathfrak{B}\mathfrak{S}^*_j \overset{def}{=} \mathfrak{B}\mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{S}^*_j \tag{28}$$

Предложение 7. *Для всякого $j \in \mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$ имеет место равенство $\mathfrak{B}\mathfrak{S}^*_j = \mathfrak{S}^*_j$. Для всякого $j \in \mathfrak{S}^* \setminus \mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$ множество $\mathfrak{B}\mathfrak{S}^*_j$ пусто.*

Доказательство. 1. Пусть дано $j \in \mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$. Согласно определению 7 это значит, что дано $j \in \mathfrak{S}^*$, удовлетворяющее неравенству

$$||| (dj)^{-1} ||| = \sup_{x \in V} \| (dj_x)^{-1} \| < +\infty \tag{29}$$

Пусть дано $f \in \mathfrak{S}^*_j$. Согласно определению 5 это означает, что дано $f \in \mathfrak{S}^*$, удовлетворяющее неравенству

$$\delta(f,j)=\sup_{x\in V}\inf_{u\in G(fx,jx)}\{s(u)+\|\varphi_u dj_x-df_x\|+\|(\varphi_u dj_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|\}<+\infty \tag{30}$$

Для всякого $x\in V$ имеем

$$\inf_{u\in G(fx,jx)}\{s(u)+\|\varphi_u dj_x-df_x\|+\|(\varphi_u dj_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|\}\leqslant\delta(f,j).$$

Поэтому для всякого $x\in V$ найдется путь $u(x)\in G(fx,jx)$, удовлетворяющий неравенству

$$s(u(x))+\|\varphi_{u(x)}dj_x-df_x\|+\|(\varphi_{u(x)}dj_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|<\delta(f,j)+1,$$

из которого следует, что

$$\|(\varphi_{u(x)}dj_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|\leqslant\delta(f,j)+1 \tag{31}$$

для всякого $x\in V$. Для всякого $x\in V$, записав $(df_x)^{-1}$ в виде

$$(\varphi_{u(x)}dj_x)^{-1}-[(\varphi_{u(x)}dj_x)^{-1}-(df_x)^{-1}]=(dj_x)^{-1}\varphi_{u(x)}^{-1}-[(\varphi_{u(x)}dj_x)^{-1}-(df_x)^{-1}],$$

получаем неравенство для норм

$$\|(df_x)^{-1}\|\leqslant\|(dj_x)^{-1}\|\cdot\|\varphi_{u(x)}^{-1}\|+\|(\varphi_{u(x)}dj_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|=\|(dj_x)^{-1}\|+\|(\varphi_{u(x)}dj_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|; \tag{32}$$

последнее равенство — следствие формулы $\|\varphi_{u(x)}^{-1}\|=1$, вытекающей из того, что $\varphi_{u(x)}$ — изоморфизм евклидовых пространств. При всяком $x\in V$ правая часть равенства в формуле (32) в силу формул (29), (31) не превосходит величины $|||(dj)^{-1}|||+\delta(f,j)+1$. Поэтому из формулы (32) следует, что

$$\sup_{x\in V}\|(df_x)^{-1}\|\leqslant|||(dj)^{-1}|||+\delta(f,j)+1.$$

Правая часть этого неравенства $<+\infty$ вследствие (29), (30). Следовательно,

$$|||(df_x)^{-1}|||\overset{def}{=}\sup_{x\in V}\|(df_x)^{-1}\|<+\infty \tag{33}$$

Так как $f\in\mathfrak{S}^*$ и выполнено неравенство (33), то в силу определения 7 имеем: $f\in\mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$. Так как это доказано для всякого $f\in\mathfrak{S}_j^*$, то $\mathfrak{S}_j^*\subset\mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$. Отсюда в силу определения 8 следует равенство $\mathfrak{B}\mathfrak{S}_j^*=\mathfrak{S}_j^*$.

2. Пусть дано $j\in\mathfrak{S}^*\setminus\mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$. Предположим, что

$$\mathfrak{B}\mathfrak{S}_j^*\overset{def}{=}\mathfrak{B}\mathfrak{S}^*\bigcap\mathfrak{S}_j^*\neq\varnothing.$$

Тогда найдется $f\in\mathfrak{B}\mathfrak{S}^*\bigcap\mathfrak{S}_j^*$. Так как $j\in\mathfrak{S}^*, f\in\mathfrak{S}_j^*$, то в силу предложения 6 имеет место равенство

$$\mathfrak{S}_f^*=\mathfrak{S}_j^* \tag{34}$$

В силу леммы 6 имеем $j\in\mathfrak{S}_j^*$, откуда в силу (34) следует, что

$$j\in\mathfrak{S}_f^*. \tag{35}$$

Так как $f\in\mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$, то в силу доказанного в п. 1) первого утверждения предложения 7 (в котором надо сделать замену $f\leftrightarrow j$) получаем, что $\mathfrak{S}_f^*\in\mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$. Отсюда в силу (35) вытекает, что $j\in\mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$. Это противоречит условию $j\in\mathfrak{S}^*\setminus\mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$. Противоречие выведено из предположения, что множество $\mathfrak{B}\mathfrak{S}_j^*$ не пусто. Следовательно, $\mathfrak{B}\mathfrak{S}_j^*=\varnothing$. Предложение доказано.

Л Е М М А 7. *Для всяких $j\in\mathfrak{S}^*, f\in\mathfrak{B}\mathfrak{S}_j^*$ всякое $g\in\mathfrak{S}_j$, удовлетворяющее неравенству*

$$\delta_j(g,f)<\frac{1}{2}|||(df)^{-1}|||^{-1}, \tag{36}$$

принадлежит множеству $\mathfrak{S}_j^*$ и удовлетворяет неравенству

$$\delta_j(g,f)\leqslant(1+2|||(df)^{-1}|||^2)\tilde{\delta}_j(g,f). \tag{37}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть даны $j \in \mathfrak{S}^*, f \in \mathfrak{B}\mathfrak{S}_j^*$. Из определений 5, 8 следует, что

$$f \in \mathfrak{S}_j^* \subset \mathfrak{S}^*. \tag{38}$$

Пусть дано $g \in \mathfrak{S}_j$, удовлетворяющее неравенству (36).

1. Левая часть неравенства (36) в силу определения 3 и формулы, получаемой из (3) заменой $h \to f$, равна

$$\sup_{x \in V} \inf_{u \in G(gx, fx)} \{s(u) + \| \varphi_{u(x)} df_x - dg_x \|\}.$$

Поэтому из (36) следует, что для всякого $x \in V$ имеет место неравенство

$$\inf_{u \in G(gx, fx)} \{s(u) + \| \varphi_u df_x - dg_x \|\} < \frac{1}{2} \||(df_x)^{-1}\||^{-1}.$$

Следовательно, для всякого $x \in V$ найдется путь $u(x) \in G(gx, fx)$ такой, что

$$s(u(x)) + \| \varphi_{u(x)} df_x - dg_x \| < \frac{1}{2} \||(df_x)^{-1}\||^{-1}.$$

Так как длина любого пути $s(u) \geqslant 0$, то для этого пути $u(x)$ имеет место неравенство

$$\| \varphi_{u(x)} df_x - dg_x \| < \frac{1}{2} \||(df_x)^{-1}\||^{-1}. \tag{39}$$

2. Для всякого $x \in V$ фиксируем любой путь $u(x) \in G(gx, fx)$, удовлетворяющий неравенству (39); существование такого пути доказано в предыдущем пункте. Для всякого $x \in V$ положим

$$L_x \overset{def}{=} (\varphi_{u(x)} df_x - dg_x)(\varphi_{u(x)} df_x)^{-1} = (\varphi_{u(x)} df_x - dg_x)(df_x)^{-1} \varphi_{u(x)}^{-1} = 1_{T_{gx}V} - dg_x (df_x)^{-1} \varphi_{u(x)}^{-1}. \tag{40}$$

для всякого $x \in V$ имеем

$$\| L_x \| \leqslant \| \varphi_{u(x)} df_x - dg_x \| \cdot \| (df_x)^{-1} \| \leqslant \| \varphi_{u(x)} df_x - dg_x \| \cdot \||(df_x)^{-1}\|| < 1/2.$$

Первое неравенство написанной цепочки следует из формулы (40) (поскольку $\varphi_{u(x)}$ — изоморфизм евклидовых пространств), второе — из определения 7, а третье — из неравенства (39). Итак,

$$\| L_x \| < 1/2 \tag{41}$$

для всякого $x \in V$.

3. Хорошо известно (и легко доказывается), что для всякого линейного преобразования L нормированного n-мерного пространства, удовлетворяющего неравенству $\| L \| < 1$, линейное преобразование $I - L$ этого пространства *(I* — тождественное преобразование) обратимо, причем обратное преобразование выражается формулой

$$(I - L)^{-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} L^k$$

и удовлетворяет неравенству

$$\| (I - L)^{-1} - I \| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \| L \|^k \ (1 - \| L \|)^{-1}. \tag{42}$$

Согласно формуле (41) для всякого $x \in V$ выполнено неравенство $\| L_x \| < 1/2$ и потому при всяком $x \in V$ линейное преобразование $L = L_x$ касательного пространства $T_{gx}V$ удовлетворяет условию только что сформулированного утверждения. Следовательно, преобразование $(I_x - L_x)^{-1}$, где I_x — тождественное преобразование касательного пространства $T_{gx}V$, существует и удовлетворяет неравенству

$$\| (I_x - L_x)^{-1} - I_x \| \leqslant \| L_x \| (1 - \| L_x \|)^{-1}.$$

Напомним, что

$$I_x \overset{def}{=} 1_{T_{gx}V}. \tag{43}$$

Из полученного неравенства при всяком $x \in V$ вытекает неравенство (вследствие (41))

$$\| (I_x - L_x)^{-1} - I_x \| \leqslant 2 \| L_x \|. \tag{44}$$

4. Для всякого $x \in V$ из (40), (43) следует равенство

$$L_x = I_x - dg_x(df_x)^{-1}\varphi^{-1}_{u(x)}, \tag{45}$$

откуда

$$dg_x = (I_x - L_x)\varphi_{u(x)} df_x$$

при всяком $x \in V$. В силу результата п. 3 линейное преобразование $I_x - L_x : T_{gx}V \to T_{gx}V$ обратимо при всяком $x \in V$. При всяком $x \in V$ преобразование $df_x : T_x V \to T_{fx}V$ обратимо, так как $f \in \mathfrak{S}^*$; параллельный перенос $\varphi_{u(x)} : T_{jx}V \to T_{gx}V$, будучи изоморфизмом касательных пространств, также обратим; поэтому из обратимости при всяком $x \in V$ линейного преобразования $I_x - L_x : T_{gx}V \to T_{gx}V$ следует обратимость при всяком $x \in V$ преобразования

$$dg_x = (I_x - L_x)\varphi_{u(x)} df : T_x V \to T_{gx}V.$$

5. По условию $g \in \mathfrak{S}_j$. Из определения 2 следует, что $\mathfrak{S}_j \subset \mathfrak{S}$. Следовательно, $g \in \mathfrak{S}$. В пункте 4 доказано, что производная dg_x отображения не вырождена $g : V \to V$ при всяком $x \in V$. Поэтому, в силу определения 4.

6. При всяком $x \in V$ из формулы (45) получаем

$$(I_x - L_x)^{-1} = (dg_x(df_x)^{-1}\varphi^{-1}_{u(x)})^{-1} = \varphi_{u(x)} df_x (dg_x)^{-1},$$

откуда

$$(I_x - L_x)^{-1} - I_x = \varphi_{u(x)} df_x (dg_x)^{-1} - I_x = \varphi_{u(x)} df_x[(dg_x)^{-1} - (\varphi_{u(x)} df_x)^{-1}]. \tag{46}$$

При всяком $x \in V$ из формулы (40) имеем

$$L_x = (\varphi_{u(x)} df_x - dg_x)(df_x)^{-1}\varphi^{-1}_{u(x)}.$$

Подставив эту формулу в правую часть неравенства (44), а формулу (46) — в его левую часть, перепишем (44) в виде

$$\| \varphi_{u(x)} df_x[(dg_x)^{-1} - (\varphi_{u(x)} df_x)^{-1}] \| \leqslant 2 \| (\varphi_{u(x)} df_x - dg_x)(dg_x)^{-1}\varphi^{-1}_{u(x)} \|.$$

Правая часть последнего неравенства не превосходит величины

$$2 \| \varphi_{u(x)} df_x - dg_x \| \cdot \| (df_x)^{-1} \| \cdot \| \varphi^{-1}_{u(x)} \| = 2 \| \varphi_{u(x)} df_x - dg_x \| \cdot \| (df_x)^{-1} \|,$$

где равенство следует из формулы $\varphi^{-1}_{u(x)} = 1$, вытекающей из того, что $\varphi_{u(x)}$ — изоморфизм евклидовых пространств. Поэтому из доказанного неравенства при всяком $x \in V$ вытекает неравенство

$$\| \varphi_{u(x)} df_x[(dg_x)^{-1} - (\varphi_{u(x)} df_x)^{-1}] \| \leqslant 2 \| \varphi_{u(x)} df_x - dg_x - \| \cdot \| (df_x)^{-1} \|. \tag{47}$$

Из представления (при всяком $x \in V$) выражения $(\varphi_{u(x)} df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1}$ в виде - $(df_x)^{-1}\varphi^{-1}_{u(x)}\{\varphi_{u(x)} df_x[(dg_x)^{-1} - (\varphi_{u(x)} df_x)^{-1}]\}$ следует неравенство

$$\| (\varphi_{u(x)} df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \| \leqslant \| (df_x)^{-1} \| \cdot \| \varphi^{-1}_{u(x)} \| \cdot \| \varphi_{u(x)} df_x[(dg_x)^{-1} - (\varphi_{u(x)} df_x)^{-1}] \|.$$

Снова воспользовавшись формулой $\| \varphi^{-1}_{u(x)} \| = 1$, перепишем при всяком $x \in V$ полученное неравенство в виде

$$\| (\varphi_{u(x)} df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \| \leqslant \| (df_x)^{-1} \| \cdot \| \varphi_{u(x)} df_x[(dg_x)^{-1} - (\varphi_{u(x)} df_x)^{-1}].$$

Соединив это неравенство с неравенством (47), получаем

$$\| (\varphi_{u(x)} df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \| \leqslant \| 2 \||(df_x)^{-1}\||^2 \cdot \| \varphi_{u(x)} df_x - dg_x \|. \tag{48}$$

Так как $\| (df_x)^{-1} \| \leqslant \||(df_x)^{-1}\||$ при всяком $x \in V$ (см. определение 7), то из (48) при всяком $x \in V$ следует неравенство

$$\| (\varphi_{u(x)} df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \| \leqslant \| 2 \||(df_x)^{-1}\||^2 \cdot \| \varphi_{u(x)} df_x - dg_x \|. \tag{49}$$

7. Для всякого $x \in V$ из (49) следует неравенство

$$s(u(x)) + \| \varphi_u df_x - dg_x \| + \| (\varphi_{u(x)} df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \| \leqslant (1 + 2\||(df)^{-1}\||^2) \cdot (s(u(x)) + \| \varphi_{u(x)} df_x - dg_x \|).$$

8. Для всякого $x \in V$ обозначим через $F(x)$ множество всех путей $u \in G(gx, jx)$, удовлетворяющих неравенству

$$s(u) + \| \varphi_u df_x - dg_x \|\} < (2\||(df)^{-1}\||)^{-1}.$$

В п. 1 доказано, что $F(x) \neq \varnothing$ при всяком $x \in V$. Имеем (при всяком $x \in V$)

$$\inf_{u \in G(gx,fx)} \{s(u) + \| \varphi_u df_x - dg_x \|\} = \inf_{u \in F(x)} \{s(u) + \| \varphi_u df_x - dg_x \|\}. \tag{50}$$

Последнее вытекает из равенства

$$\inf_{\alpha \in A} \xi(\alpha) = \inf_{\alpha \in \{\beta : \xi(\beta) < \gamma\}} \xi(\alpha),$$

верного для всякого $\gamma \in R$ такого, что множество $\{\beta : \xi(\beta) < \gamma\}$ не пусто; здесь A — любое множество, а $\xi(\bullet) : A \to R$ - любая функция. В пп. 1—7 доказано, что для всякого $x \in V$, для всякого пути $u \in F(x)$ имеет место неравенство

$$s(u) + \| \varphi_u df_x - dg_x \| + \| (\varphi_u df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \| \leqslant (1 + 2 ||| (df)^{-1} |||^2) \{s(u) + \| \varphi_u df_x - dg_x \|\}.$$

Отсюда следует неравенство в цепочке

$$\begin{aligned} &\inf_{u \in F(x)} \{s(u) + \| \varphi_u df_x - dg_x \| + \| (\varphi_u df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \|\} \leqslant \\ &\leqslant (1 + 2 ||| (df)^{-1} |||^2) \inf_{u \in F(x)} \{s(u) + \| \varphi_u df_x - dg_x \|\} = \\ &= (1 + 2 ||| (df)^{-1} |||^2) \inf_{u \in G(gx,fx)} \{s(u) + \| \varphi_u df_x - dg_x \|\}, \end{aligned} \tag{51}$$

равенство в которой вытекает из (50); подчеркнем, что формула (51) доказана для всякого $x \in V$. Так как для всякого $x \in V$ имеет место включение $F(x) \subset G(gx, fx)$, вытекающее из определения множества $F(x)$, то для всякого $x \in V$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} &\inf_{u \in G(gx,fx)} \{s(u) + \| \varphi_u df_x - dg_x \| + \| (\varphi_u df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \|\} \leqslant \\ &\leqslant \inf_{u \in F(x)} \{s(u) + \| \varphi_u df_x - dg_x \| + \| (\varphi_u df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \|\}. \end{aligned}$$

Поэтому из (51) при всяком $x \in V$ следует неравенство

$$\inf_{u \in G(gx,fx)} \{s(u) + \| \varphi_u df_x - dg_x \| + \| (\varphi_u df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \|\} \leqslant (1 + 2 ||| (df)^{-1} |||^2) \inf_{u \in G(gx,fx)} \{s(u) + \| \varphi_u df_x - dg_x \|\}.$$

Имеем, далее,

$$\sup_{x \in V} \inf_{u \in G(gx,fx)} \{s(u) + \| \varphi_u df_x - dg_x \| + \| (\varphi_u df_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \|\} \leqslant (1 + 2 ||| (df)^{-1} |||^2) \sup_{x \in V} \inf_{u \in G(gx,fx)} \{s(u) + \| \varphi_u df_x - dg_x \|\}; \tag{52}$$

неравенство (52) получено взятием точной верхней грани по $x \in V$ от левой и правой части предыдущего неравенства.

Левая часть неравенства (52) согласно формуле (5) есть $\delta(g, f)$. Правая часть неравенства (52) есть произведение круглой скобки, в которой стоит $1 + 2 ||| (df)^{-1} |||^2$, на величину, которая в силу формулы (3) равна $\widetilde{\delta_j}(g, f)$. Так как по условию $g = \mathfrak{S}_j$, а $f \in \mathfrak{B}\mathfrak{S}_j^* \subset \mathfrak{S}_j^* \subset \mathfrak{S}_j$ (последние два включения — следствия определения 8 и предложения 4), то $\delta_j(g, f) = \widetilde{\delta_j}(g, f)$ в силу определения 3. Поэтому формула (52) переписывается в виде

$$\delta(g, f) \leqslant (1 + 2 ||| (df)^{-1} |||^2) ||| \widetilde{\delta_j}(g, f). \tag{53}$$

9. Из (36), (53) следует неравенство

$$\delta(g, f) \leqslant \frac{1}{2} (1 + 2 ||| (df)^{-1} |||^2) ||| (df)^{-1} |||^{-1}. \tag{54}$$

По условию $f \in \mathfrak{B}\mathfrak{S}_j^* \subset \mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$ (последнее включение следует из определения 8), откуда в силу определения 7 вытекает неравенство

$$||| (df)^{-1} ||| < +\infty. \tag{55}$$

Далее,

$$||| (df)^{-1} ||| > 0; \tag{56}$$

это неравенство вытекает из определения 7, поскольку при всяком $x \in V$ имеем $||| (df)^{-1} |||^{-1} > 0$, так как обратный оператор к линейному оператору $df : T_x V \to T_{fx} V$ не может равняться нулю (поскольку $\dim T_x V = \dim V = n \geqslant 1$) и поэтому его норма строго положительна. Из (56) следует неравенство

$$||| (df)^{-1} |||^{-1} < +\infty \tag{57}$$

Из (54), (55), (57) следует строгое неравенство

$$\delta(g, f) < +\infty \tag{58}$$

В силу (38) имеем $f \in \mathfrak{S}^*$, а в п. 5 доказано, что $g \in \mathfrak{S}^*$. Поэтому из (58) в силу определения 5 (заменив в нем *j* на *f,* а *f* на *g)* получаем

$$g \in \mathfrak{S}_j^*. \tag{59}$$

Из (38), (59) в силу предложения 6 следует $g \in \mathfrak{S}_j^*$ (ссылку на предложение 6 здесь можно заменить ссылкой на лемму 3). Из условия $f \in \mathfrak{B}\mathfrak{S}_j^*$ в силу определения 8 следует $f \in \mathfrak{S}_j^*$. Поэтому в силу определения 6 имеет место равенство $\mathfrak{d}_j(g, f) = \mathfrak{d}(g, f)$. С помощью этого равенства формула (53) переписывается в виде (37). Лемма доказана.

Т Е О Р Е М А. *Для всякого* $j \in \mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$ *топология, индуцированная на* $\mathfrak{S}_j^*$ *метрикой* $\mathfrak{d}_j$, *совпадает с топологией, индуцированной на* $\mathfrak{S}_j^*$ *сужением на* $\mathfrak{S}_j^*$ *метрики* $\tilde{\mathfrak{d}}_j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дано $j \in \mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$.

Тогда $j \in \mathfrak{S}^*$ (см. определение 7). Поэтому $\mathfrak{S}_j^* \subset \mathfrak{S}_j$ в силу предложения 4.

1. Согласно предложению 5 первая из названных топологий мажорирует вторую.

2. Так как $j \in \mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$, то в силу предложения 7 имеет место равенство $\mathfrak{S}_j^* = \mathfrak{B}\mathfrak{S}_j^*$. Поэтому в силу леммы 7 для всякого $f \in \mathfrak{S}_j^*$, для всякого $g \in \mathfrak{S}_j^*$ (напомним, что $\mathfrak{S}_j^* \subset \mathfrak{S}_j$), удовлетворяющего неравенству

$$\tilde{\mathfrak{d}}_j(g, f) < (2\, ||| (\mathrm{d}f)^{-1} |||)^{-1},$$

выполнено неравенство

$$\mathfrak{d}_j(g, f) \leqslant (1 + 2\, ||| (\mathrm{d}f)^{-1} |||^2)\tilde{\mathfrak{d}}_j(g, f).$$

Отметим, что для всякого $f \in \mathfrak{S}_j^*$ имеем

$$(2\, ||| (\mathrm{d}f)^{-1} |||)^{-1} > 0; \tag{60}$$

чтобы убедиться в этом, вспомним, что $\mathfrak{S}_j^* = \mathfrak{B}\mathfrak{S}_j^* \subset \mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$ (равенство здесь, как уже отмечалось, вытекает из условия $j \in \mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$ в силу предложения 7, а включение следует из определения 8); из $f \in \mathfrak{B}\mathfrak{S}^*$ в силу определения 7 следует $0 \leqslant ||| (\mathrm{d}f)^{-1} ||| < +\infty$, откуда и вытекает (60).

Поэтому из доказанного следует, что топология, индуцированная на $\mathfrak{S}_j^*$ сужением на $\mathfrak{S}_j^*$ метрики $\tilde{\mathfrak{d}}_j$, мажорирует топологию, индуцированную на $\mathfrak{S}_j^*$ метрикой $\mathfrak{d}_j$. Иными словами, вторая из названных в формулировке доказываемой теоремы топологий мажорирует первую.

3. Соединив результаты пп. 1, 2, получаем, что две топологии, названные в формулировке теоремы, совпадают. Теорема доказана.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
26.06.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] М и л л и о н щ и к о в В.М. Некоторые метрические пространства гладких преобразований риманова многообразия. — Математические заметки, 1985, т. 38, вып. 4, с 576 — 586.