УДК 517.938

Центральные показатели линейных систем дифференциальных уравнений

Миллионщиков В. М.

§ 1. Пусть на полном метрическом пространстве $(\mathfrak{B},\ d_{\mathfrak{B}})$ задано непрерывное действие f^t группы $\mathbf{R}$. Множество S всех непрерывных ограниченных отображений пространства $(\mathfrak{B},\ d_{\mathfrak{B}})$ в пространство $\operatorname{End} E^n$ линейных преобразований n-мерного евклидова пространства E^n наделяется топологией равномерной сходимости. Скалярное произведение в E^n обозначается через $(\cdot,\ \cdot)$.

Пусть $\lambda_1(A,\ x)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(A,\ x)$ — *показатели Ляпунова* [1] линейной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}, \tag{1}$$

где $A\in S$, $x\in\mathcal{B}$.

Центральные показатели $\Omega^{(k)}(A,\ x)$ $(k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $A\in S$, $x\in\mathfrak{B})$ системы (1) определяются формулой (ср. [2, §§ 7, 8, 13, 15])

$$\Omega^{(k)}(A,\ x)=\inf_{\tau\in\mathbf{R}^+_*}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|\mathfrak{X}((j+1)\tau,\ j\tau;\ A,\ x)_{\mathfrak{X}(j\tau,\ 0;\ A,\ x)E_{n-k+1}(A,\ x)}\|, \tag{2}$$

где $\mathfrak{X}(\sigma,\ \theta;\ A,\ x)$ — оператор Коши системы (1), а $E_{n-k+1}(A,\ x)$ — векторное пространство начальных значений решений системы (1), имеющих показатели Ляпунова $\leqslant\lambda_k(A,\ x)$; через X_L обозначается сужение отображения X на подпространство L.

Результат этой статьи состоит в следующем.

Т е о р е м а 1. *В пространстве $S\times\mathfrak{B}$ типична полунепрерывность сверху центральных показателей, т. е. в $B=S\times\mathfrak{B}$ имеется всюду плотное множество $\mathcal{D}$ типа G_δ такое, что при всяком $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\Omega^{(k)}:B\to\mathbf{R}$ полунепрерывна сверху во всякой точке $b=(f,\ x)\in\mathcal{D}$.*

Прежде чем доказывать эту теорему, поясним ее содержание.

§ 2. Показатели Ляпунова служат для исследования устойчивости (условной устойчивости) решений систем дифференциальных уравнений. Показатели Ляпунова оцениваются сверху центральными показателями, представляющими собой не что иное, как те же показатели Ляпунова, но только не самих решений данной системы, а функций, получаемых из ее решений путем применения к последним некоторой процедуры усреднения. Следствием этой процедуры является наличие у центральных показателей таких свойств, которыми показатели Ляпунова самих решений не обладают. Так, из отрицательности старшего показателя Ляпунова линейной системы

$$\dot{\mathfrak{x}} = A(t)\mathfrak{x}\ \ (\mathfrak{x}\in E^n) \tag{3}$$

не всегда следует устойчивость нулевого решения системы

$$\dot{\mathfrak{x}} = A(t)\mathfrak{x}+g(\mathfrak{x},\ t), \tag{4}$$

где $g:U\times\mathbf{R}^+\to E^n$ — непрерывное отображение, имеющее непрерывную частную производную $g'_{\mathfrak{x}}$ (здесь U — некоторая окрестность нуля в евклидовом пространстве E^n) и удовлетворяющее условию

$$\sup_{t\in\mathbf{R}^+} |g(\mathfrak{x},\ t)| = o(|\mathfrak{x}|).$$

Но из отрицательности *верхнего центрального показателя* системы (3) следует устойчивость нулевого решения системы (4). Упомянутый здесь верхний центральный показатель системы (3) определяется формулой (см. [2, §§7, 8, 13, 15])

$$\Omega(A) = \inf_{\tau\in\mathbf{R}^+_*} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \| \mathfrak{X}((i+1)\tau,\ i\tau) \|, \tag{5}$$

где $\mathfrak{X}(\sigma,\ \theta)$ — оператор Коши системы (3). Если коэффициенты системы (3) — постоянные или периодические, то ее верхний центральный показатель $\Omega(A)$ равен ее старшему показателю Ляпунова $\lambda_1(A)$; в общем случае $\Omega(A) \geqslant \lambda_1(A)$, причем известно, что это неравенство бывает строгим.

Для исследования *условной устойчивости* по первому приближению вводятся центральные показатели других порядков. Условной устойчивостью А. М. Ляпунов [1, п. 24] назвал свойство движения равномерно по $t\in\mathbf{R}^+$ мало возмущаться при малом возмущении начальной точки, при условии, что это возмущение принадлежит некоторому подмногообразию фазового пространства, проходящему через начальную точку невозмущенного движения.

Для системы (1) центральные показатели различных порядков определены выше формулой (2). Поясним эту формулу.

Сначала заметим, что центральный показатель $\Omega^{(1)}(A,\ x)$, определенный формулой (2) при $k=1$, есть не что иное как верхний центральный показатель системы (1), определенный (для системы (3)) формулой (5). Отметим также, что $\Omega^{(n)}(A,\ x) = \lambda_n(A,\ x)$, если $\lambda_{n-1}(A,\ x) \neq \lambda_n(A,\ x)$. Оба эти замечания непосредственно вытекают из формулы (2); первое — поскольку $E_n(A,\ x) = E^n$, а второе — поскольку норма произведения линейных преобразований одномерного нормированного пространства равна произведению их норм.

Теперь займемся формулой (2) в полном ее объеме, т. е. для любых $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$. Векторные подпространства $E_k(A,\ x)$ пространства E^n можно определить, не опираясь на определение показателей Ляпунова $\lambda_k(A,\ x)$ системы (1). Напомним это определение. Фиксируем любые $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$. Определив для всякого $\mathfrak{x}\in E^n$ показатель Ляпунова $\lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x})$ формулой

$$\lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x}) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}|$$

($\ln 0$ полагаем равным $-\infty$), рассмотрим при всяком $\lambda\in\mathbf{R}$ множество $E(A,\ x,\ \lambda) = \{\mathfrak{x}\in E^n : \lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x}) \leqslant \lambda\}$.

Л е м м а 1. *Для всяких* $\mathfrak{x}\in E^n$, $\mathfrak{y}\in E^n$, $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}$ *имеет место неравенство*

$$\lambda(A,\ x;\ \alpha\mathfrak{x}+\beta\mathfrak{y}) \leqslant \max\{\lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x}),\ \lambda(A,\ x;\ \mathfrak{y})\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны $\mathfrak{x}\in E^n$, $\mathfrak{y}\in E^n$, $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}$. Если $\alpha=\beta=0$, то $\lambda(A,\ x;\ \alpha\mathfrak{x}+\beta\mathfrak{y}) = \lambda(A,\ x;\ 0) = -\infty$; доказывать в этом случае нечего. Пусть $|\alpha|+|\beta|>0$. Имеем

$$\lambda(A,\ x;\ \alpha\mathfrak{x}+\beta\mathfrak{y}) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\,(\alpha\mathfrak{x}+\beta\mathfrak{y})| =$$

$$= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |\alpha \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x} + \beta \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{y}| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln (|\alpha|\,|\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}| + |\beta|\,|\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{y}|) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \{(|\alpha| + |\beta|) \max\{|\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}|,\ |\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{y}|\}\} =$$

$$= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \left\{ \frac{1}{t} \ln (|\alpha| + |\beta|) + \frac{1}{t} \ln \max\{|\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}|,\ |\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{y}|\} \right\} =$$

$$= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \max \left\{ \frac{1}{t} \ln |\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}|,\ \frac{1}{t} \ln |\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{y}| \right\} =$$

$$= \max \left\{ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}|,\ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{y}| \right\} =$$

$$= \max\{\lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x}),\ \lambda(A,\ x;\ \mathfrak{y})\}.$$

Лемма доказана.

В силу леммы 1 и формулы $\lambda(A,\ x;\ 0) = -\infty$ множество $E(A,\ x,\ \lambda)$ есть векторное подпространство в E^n. Так как $E(A,\ x,\ \mu) \subset E(A,\ x,\ \nu)$ для всяких действительных чисел $\mu \leqslant \nu$, то среди подпространств $E(A,\ x,\ \lambda)$ имеется не более $n+1$ различных. Пусть $E^{(0)}(A,\ x) \subset \ldots \subset E^{(m)}(A,\ x)$ — все эти различные подпространства. При этом $m \in \{0,\ \ldots,\ n\}$, $E^{(0)}(A,\ x) = \{0\}$, $E^{(m)}(A,\ x) = E^n$. Два последних равенства вытекают из того, что вследствие ограниченности коэффициентов системы (1) показатель Ляпунова всякого ненулевого решения этой системы есть число, по модулю не превосходящее $\sup_{x\in\mathcal{B}} \| A(x) \|$. Положим

$$E_k(A,\ x) = E^{(s)}(A,\ x) \tag{6}$$

при $\dim E^{(s-1)}(A,\ x) < k \leqslant \dim E^{(s)}(A,\ x)$, $s \in \{1,\ \ldots,\ m\}$. Это и есть определение подпространств $E_k(A,\ x)$, не опирающееся на определение показателей Ляпунова системы (1). Благодаря этому определению сформулированная выше теорема 1 может быть понята без обращения к другим источникам.

Общая конструкция систем вида (1) хорошо известна не только сама по себе, но и известна как конструкция, включающая в себя два хорошо изученных класса линейных систем дифференциальных уравнений. Речь идет о линейных системах с постоянными коэффициентами, т. е. о линейных автономных системах, и о линейных системах с периодическими коэффициентами. Первые получаются в случае, когда пространство $\mathfrak{B}$ состоит из одной точки (отображения f^t оставляют эту точку на месте). Вторые получаются в случае, когда пространство $\mathfrak{B}$ есть окружность, а отображение f^t — поворот этой окружности на угол t (при всяком $t \in \mathbf{R}$).

Эти два частных случая не только хорошо изучены вообще, но и применительно к сформулированной выше теореме 1 стоят несколько особняком. Дело в том, что хотя теорема 1, формально говоря, охватывает и эти два случая, она не расширяет, а если так можно выразиться, сужает в этих случаях имеющуюся в нашем распоряжении информацию о центральных показателях. Дело в том, что в силу построений [3] и §§ 3 — 5 настоящей статьи из предложений о центральных показателях, содержащихся в [4], следует (впрочем, по существу это известно из [2]), что для линейных систем с постоянными коэффициентами и для линейных систем с периодическими коэффициентами центральные показатели $\Omega^{(k)}$ этих систем совпадают с их показателями Ляпунова λ_k ($k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$). Показатели Ляпунова автономной линейной системы, как известно, непрерывно зависят от ее коэффициентов, так как показатели Ляпунова такой системы равны действительным частям собственных значений матрицы коэффициентов системы. Показатели Ляпунова систем с периодическими коэффициентами суть логарифмы модулей мультипликаторов, деленные на период. Мультипликаторы же, будучи по определению собственными значениями оператора монодромии $\mathfrak{X}(T,\ 0)$, где $\mathfrak{X}(\theta,\ \tau)$ — оператор Коши, а T — период, непрерывно зависят от коэффициентов системы (в равномерной метрике) вследствие теоремы о непрерывной зависимости решений от коэффициентов системы.

Содержательность сформулированной выше теоремы 1 проявляется при выходе за пределы класса систем с постоянными или периодическими коэффициентами.

§ 3. Пусть $(E,\ p,\ B)$ — векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$ и римановой метрикой $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$. E — пространство, p — проекция, B — база векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — гомоморфизм группы $\mathbf{R}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$. Образ $\mathfrak{H}t$ точки $t\in\mathbf{R}$ обозначается далее через $(X^t,\ \chi^t)$, где $X^t:E\to E$, $\chi^t:B\to B$ — отображения пространства и базы соответственно. Сужение отображения X^t на слой $p^{-1}(b)$ обозначается через $X^t[b]$. Напомним, что $X^t[b]$ при всяких $t\in\mathbf{R}$, $b\in B$ — линейное отображение $p^{-1}(b)\to p^{-1}(\chi^t b)$. Его норма определяется формулой

$$\| X^t[b]\| = \sup_{\xi\in p^{-1}(b)_*}\{| X^t\xi|\,|\xi|^{-1}\},$$

где $|\eta| = \langle\eta,\ \eta\rangle^{1/2}$, а звездочка справа внизу означает выбрасывание нуля.

Подчиним гомоморфизм $\mathfrak{H}$ следующему условию: потребуем, чтобы существовала функция $a(\cdot):B\to\mathbf{R}^+$, инвариантная относительно отображений χ^t, т. е. удовлетворяющая равенству

$$a(\chi^t b) = a(b) \tag{7}$$

при всяких $t\in\mathbf{R}$, $b\in B$ и такая, что при всяких $t\in\mathbf{R}$, $b\in B$ выполнено неравенство

$$\| X^t[b]\| \leqslant \exp(|t|\, a(b)). \tag{8}$$

Показатель Ляпунова $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)$ гомоморфизма $\mathfrak{H}$ в точке $\xi\in E$ определяется формулой

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi) = \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln| X^t\xi|. \tag{9}$$

Напомним, что $\ln 0 = -\infty$; поэтому показатель Ляпунова нулевого вектора 0_b всякого слоя $p^{-1}(b)$ равен $-\infty$. Поэтому при всяких $\lambda\in\mathbf{R}$, $b\in B$ вектор 0_b принадлежит множеству

$$E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda) \overset{\text{def}}{=} \{\xi\in p^{-1}(b):\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\leqslant\lambda\}. \tag{10}$$

Из леммы 1 [3], положив в ней $\mathfrak{M}=\mathfrak{H}$, получаем, что при всяких $\lambda\in\mathbf{R}$, $b\in B$ множество $E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda)$ есть векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$.

Множество всех векторных подпространств векторного пространства EV будем обозначать через $\widetilde{EV}$. В частности, через $\widetilde{p^{-1}(b)}$ будем обозначать множество всех векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$.

Из определения множеств $E(\mathfrak{H},\ b,\ \lambda)$ следует, что для всяких действительных чисел $\mu\leqslant\nu$ имеет место включение $E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu)\subset E(\mathfrak{H},\ b,\ \nu)$. Другими словами, отображение $E(\mathfrak{H},\ b,\ \cdot):\mathbf{R}\to\widetilde{p^{-1}(b)}$ — монотонно неубывающее. Так как $\dim p^{-1}(b)=n$, то из монотонности этого отображения следует, что при всяком $b\in B$ оно принимает не более $n+1$ различных значений. Пусть $\mu_0<\mu_1<\ldots<\mu_m$ — точки действительной прямой $\mathbf{R}$, в которых отображение $E(\mathfrak{H},\ b,\ \cdot):\mathbf{R}\to\widetilde{p^{-1}(b)}$ принимает все свои различные значения: $E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_0)\subset\ldots\subset E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_m)$ (включения строгие, $m\in\{0,\ \ldots,\ n\}$). При всяком $b\in B$

имеют место равенства $E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_0) = \{0_b\}$, $E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_m) = p^{-1}(b)$, вытекающие из следующей леммы (в которой ненулевым вектором $\xi \in E$ называется такое $\xi \in E$, для которого $\xi \neq 0_{p\xi}$).

Л е м м а 2. *Для всякого ненулевого вектора* $\xi \in E$ *имеет место включение* $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \in [-a(p\xi),\ a(p\xi)]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть дан ненулевой вектор $\xi \in E$. 1) Имеем

$$\begin{aligned} \lambda(\mathfrak{H},\ \xi) &= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |X^t \xi| \leqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln(\| X^t[p\xi] \| |\xi|) = \\ &= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \left\{ \frac{1}{t} \ln \| X^t[p\xi] \| + \frac{1}{t} \ln |\xi| \right\} = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \| X^t[p\xi] \| \leqslant a(p\xi). \end{aligned} \tag{11}$$

Первое равенство этой цепочки — формула (9); в последнем равенстве цепочки (11) использовано неравенство $|\xi| \neq 0$, вытекающее из того, что $\xi \in E$, по условию, — ненулевой вектор; последнее неравенство цепочки (11) вытекает из (8).

2) Для всякого $t \in \mathbf{R}$ имеем

$$\xi = X^{-t} X^t \xi = X^{-t}[pX^t\xi] X^t \xi = X^{-t}[\chi^t p\xi] X^t \xi.$$

Поэтому $|\xi| \leqslant \| X^{-t}[\chi^t p\xi] \| |X^t \xi|$, откуда, вследствие (7), (8), имеем:

$$|\xi| \leqslant |X^t \xi| \exp(|t|\, a(p\xi)).$$

Таким образом, для всякого $t \in \mathbf{R}$ имеет место неравенство

$$|X^t \xi| \geqslant |\xi| \exp(-|t|\, a(p\xi)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lambda(\mathfrak{H},\ \xi) &= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |X^t \xi| \geqslant \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln\{ |\xi| \exp(-ta(p\xi)) \} = \\ &= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \left\{ \frac{1}{t} \ln |\xi| - a(p\xi) \right\} = -a(p\xi); \end{aligned} \tag{12}$$

в последнем равенстве этой цепочки использовано неравенство $|\xi| \neq 0$.

3) Соединив неравенства (11), (12), получаем включение $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \in [-a(p\xi),\ a(p\xi)]$. Лемма доказана.

Положив $E_k(\mathfrak{H},\ b) = E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_s)$ при $\dim E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_{s-1}) < k \leqslant \dim E(\mathfrak{H},\ b,\ \mu_s)$, $s \in \{1,\ \ldots,\ m\}$, получаем цепочку подпространств $\{0_b\} \neq E_1(\mathfrak{H},\ b) \subset \ldots \subset E_n(\mathfrak{H},\ b) = p^{-1}(b)$ (включения нестрогие).

Центральный показатель $\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H}$ определяется при всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, $b \in B$ формулой

$$\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ b) = \inf_{\tau\in\mathbf{R}_*^+} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau} E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)} \|. \tag{13}$$

Гомоморфизм $\mathfrak{H}$ называется *насыщенным,* если для всякой точки $b \in B$ такой, что $\chi^\theta b \neq b$ при всяком $\theta \in \mathbf{R}_*$, для всякой окрестности $W(b)$ точки b (в пространстве B), всякого базиса $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ и всяких окрестностей $U(\xi_i)$ точек ξ_i ($i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$) (в пространстве E) найдется $\delta \in \mathbf{R}_*^+$ такое, что для всякого $t \in \mathbf{N}$ и всяких невырожденных линейных операторов

$$Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1} b) \to p^{-1}(\chi^m b) \ \ (m \in \{1,\ \ldots,\ t\}),$$

удовлетворяющих при всяком $m \in \{1,\ \ldots,\ t\}$ неравенству

$$\| Y_m (X[\chi^{m-1} b])^{-1} - I \| + \| X[\chi^{m-1} b] Y_m^{-1} - I \| < \delta,$$

найдется точка $c \in W(b)$ и для всякого $m \in \{0, \ldots, t\}$ найдется изоморфизм слоев (как евклидовых пространств) $\psi_m : p^{-1}(\chi^m c) \to p^{-1}(\chi^m b)$, причем выполнены следующие требования:

i) $\psi_0^{-1}\xi_i \in U(\xi_i)$ при всяком $i \in \{1, \ldots, n\}$,

ii) при всяком $m \in \{1, \ldots, t\}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\chi^{m-1}c) & \xrightarrow[X[\chi^{m-1}c]]{} & p^{-1}(\chi^m c) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_{m-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_m} \\ p^{-1}(\chi^{m-1}b) & \xrightarrow[Y_m]{} & p^{-1}(\chi^m b) \end{array} \tag{14}$$

коммутативна.

В [5][1] доказана следующая теорема, имеющая в цитируемой статье тот же номер, что и здесь.

Теорема 2. *Пусть база B метризуема и полна в некоторой метрике, а гомоморфизм $\mathfrak{H}$ — насыщенный. Тогда в пространстве B имеется всюду плотное множество $\mathcal{D}$ типа G_δ такое, что при всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\Omega^{(k)}(\mathfrak{H}, \cdot) : B \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху во всякой точке $b \in \mathcal{D}$.*

§ 4. Пусть снова, как и в начале статьи, на полном метрическом пространстве $(\mathfrak{B}, d_{\mathcal{B}})$ задана *динамическая система* (в смысле Маркова, т. е. непрерывное действие группы $\mathbf{R}$) f^t. Множество S всех непрерывных ограниченных отображений $A(\cdot) : \mathfrak{B} \to \operatorname{End} E^n$ (вместо $A(\cdot)$ пишем короче A; под $\operatorname{End} E^n$ понимается множество линейных преобразований пространства E^n) наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния

$$d_S(C, D) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathcal{B}} \| C(x) - D(x) \| \tag{15}$$

для всяких $C \in S$, $D \in S$. Хорошо известно, что так определенное метрическое пространство (S, d_S) полно. Для всяких $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$ через $\mathfrak{X}(\theta, \tau; A, x)$ обозначается оператор Коши системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$, т. е. отображение, которое значению любого решения системы в момент τ ставит в соответствие значение этого же решения в момент θ. При всяких $\theta \in \mathbf{R}$, $\tau \in \mathbf{R}$ отображение

$$\mathfrak{X}(\theta, \tau; \cdot) : S \times \mathfrak{B} \to \operatorname{Aut} E^n,$$

где $\operatorname{Aut} E^n$ — множество невырожденных линейных преобразований пространства E^n, непрерывно, притом равномерно относительно θ, τ, принадлежащих любому фиксированному отрезку; это — известная теорема о непрерывной зависимости решений линейной системы дифференциальных уравнений от ее коэффициентов.

Ситуация, которую мы только что напомнили, вкладывается в общую ситуацию, описанную в § 3, с помощью следующих построений.

Метрическое пространство (B, d_B) определяется как произведение метрических пространств (S, d_S) и $(\mathcal{B}, d_{\mathcal{B}})$:

$$B \overset{\text{def}}{=} S \times \mathfrak{B}, \tag{16}$$

$$d_B((C, y), (D, z)) \overset{\text{def}}{=} d_S(C, D) + d_{\mathcal{B}}(y, z). \tag{17}$$

Хорошо известно (и легко доказывается), что из полноты метрических пространств-сомножителей следует полнота метрического пространства-произведения.

---

[1] В [5] на с. 897, строка 7 сверху, вместо $\mathbf{R}^{k+1}$ должно быть $\mathbf{R}^{k-1}$.

Метрическое пространство $(E,\ d_E)$ определяется как произведение метрических пространств $(B,\ d_B)$ и $(E^n,\ d_{E^n})$, где

$$d_{E^n}(\mathfrak{x},\ \mathfrak{y}) \overset{\text{def}}{=} |\,\mathfrak{x}-\mathfrak{y}\,| \overset{\text{def}}{=} (\mathfrak{x}-\mathfrak{y},\ \mathfrak{x}-\mathfrak{y})^{\frac{1}{2}}$$

для всяких $\mathfrak{x} \in E^n$, $\mathfrak{y} \in E^n$:

$$E \overset{\text{def}}{=} B \times E^n, \tag{18}$$

$$d_E((b,\ \mathfrak{y}),\ (c,\ \mathfrak{z})) \overset{\text{def}}{=} d_B(b,\ c) + |\,\mathfrak{y}-\mathfrak{z}\,|. \tag{19}$$

Отображение $p: E \to B$ определяется как проекция произведения $B \times E^n$ на первый сомножитель. Поэтому для всякого $b \in B$ слой $p^{-1}(b)$ (т. е. полный прообраз точки b при отображении p) есть множество всех пар вида $(b,\ \mathfrak{x})$, где $\mathfrak{x} \in E^n$.

При всяком $b \in B$ определим отображение $F_b : p^{-1}(b) \to E^n$ следующим образом:

$$F_b(b,\ \mathfrak{x}) = \mathfrak{x} \tag{20}$$

для всякого $\mathfrak{x} \in E^n$. Из этого определения следует, что при всяком $b \in B$ отображение F_b есть биекция слоя $p^{-1}(b)$ на пространство E^n.

Зададим при всяком $b \in B$ структуру евклидова пространства на слое $p^{-1}(b)$, перенеся на $p^{-1}(b)$ с помощью отображения F_b структуру евклидова пространства, имеющуюся на E^n. Иными словами, полагаем:

$$\alpha(b,\ \mathfrak{x}) + \beta(b,\ \mathfrak{z})) \overset{\text{def}}{=} (b,\ \alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{z}), \tag{21}$$

$$\langle (b,\ \mathfrak{x}),\ (b,\ \mathfrak{z}) \rangle \overset{\text{def}}{=} (\mathfrak{x},\ \mathfrak{z}) \tag{22}$$

для всяких $n \in B$, $\mathfrak{x} \in E^n$, $\mathfrak{z} \in E^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$. В результате этих определений $F_b F_{\mathfrak{b}}$ становится (при всяком $b \in B$) изоморфизмом евклидова пространства $p^{-1}(b)$ на евклидово пространство E^n, а тройка $(E,\ p,\ B)$ — (тривиальным) векторным расслоением.

При всяком $t \in \mathbf{R}$ определим отображения $X^t : E \to E$, $\chi^t : B \to B$ формулами

$$X^t((A,\ x),\ \mathfrak{x}) = ((A,\ f^t x),\ \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}), \tag{23}$$

$$\chi^t(A,\ x) = (A,\ f^t x) \tag{24}$$

(для всяких $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{x} \in E^n$).

Л е м м а 3. *Для всякого* $t \in \mathbf{R}$ *пара* $(X^t,\ \chi^t)$ *есть эндоморфизм векторного расслоения* $(E,\ p,\ B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть дано $t \in \mathbf{R}$.

1) Пусть даны $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{x} \in E^n$. Из формулы (23) имеем $X^t((A,\ x),\ \mathfrak{x}) = ((A,\ f^t x),\ \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x})$, откуда в силу определения отображения p как проекции произведения $B \times E^n$ на первый сомножитель следует

$$pX^t((A,\ x),\ \mathfrak{x}) = (A,\ f^t x). \tag{25}$$

Из (24) следует

$$(A,\ f^t x) = \chi^t(A,\ x). \tag{26}$$

Из определения отображения p имеем

$$(A,\ x) = p((A,\ x),\ \mathfrak{x}). \tag{27}$$

Из (25) — (27) следует

$$pX^t((A,\ x),\ \mathfrak{x}) = \chi^t p((A,\ x),\ \mathfrak{x}). \tag{28}$$

2) В предыдущем пункте для всяких $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{x} \in E^n$ доказано равенство (28). Иными словами, доказана формула

$$pX^t = \chi^t p. \tag{29}$$

3) При всяком $b = (A,\ x) \in B$ (где $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$) сужение $X^t[(A,\ x)]$ отображения $X^t : E \to E$ на слой $p^{-1}(A,\ x)$ в силу формул (20), (23) представимо в виде

$$X^t[(A,\ x)] = F^{-1}_{(A,\ f^t x)} \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x) F_{(A,\ x)}. \tag{30}$$

Оператор Коши $\mathfrak{X}(\theta,\ \tau;\ A,\ x)$ линейной системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$ линеен и отображение F_b линейно при всяком $b \in B$. Поэтому из формулы (30) следует, что для всякого $b = (A,\ x) \in B$ сужение $X^t[b]$ отображения X^t на слой $p^{-1}(b)$ линейно.

4) Отображение $\chi^t : B \to B$ непрерывно в силу (15) — (17), (24), так как f^t — непрерывное действие группы $\mathbf{R}$ на $\mathfrak{B}$.

5) Отображение $X^t : E \to E$ непрерывно в силу непрерывности отображения $\chi^t : B \to B$ и формул (15) — (19), (23), так как отображение $\mathfrak{X}(\theta,\ \tau;\ \cdot) : S \times \mathfrak{B} \to \operatorname{Aut} E^n$ непрерывно (отмеченное выше следствие теоремы о непрерывной зависимости решений линейной системы дифференциальных уравнений от ее коэффициентов). Лемма доказана.

Положим по определению

$$\mathfrak{H} t = (X^t,\ \chi^t) \tag{31}$$

при всяком $t \in \mathbf{R}$.

В силу леммы 3 так определенное $\mathfrak{H}$ есть отображение действительной прямой $\mathbf{R}$ в множество эндоморфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$.

В следующих трех леммах речь идет об операторе Коши $\mathfrak{X}(\theta,\ \tau;\ A,\ x)$ системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$.

Л е м м а 4. *Для всяких* $\theta \in \mathbf{R}$, $\tau \in \mathbf{R}$, $A \in S$, $x \in \mathcal{B}$ *имеет место равенство*

$$\mathfrak{X}(\theta,\ 0;\ A,\ f^\tau x) = \mathfrak{X}(\theta + \tau,\ \tau;\ A,\ x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны $\theta \in \mathbf{R}$, $\tau \in \mathbf{R}$, $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$. Оператор Коши $\mathfrak{X}(\theta + \tau,\ \tau;\ A,\ x)$ по определению есть отображение $\mathfrak{x}(\tau) \mapsto \mathfrak{x}(\theta + \tau)$, где $\mathfrak{x}(\cdot)$ пробегает совокупность решений системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$; согласно тому же определению $\mathfrak{X}(\theta,\ 0;\ A,\ f^\tau x)$ есть отображение $\mathfrak{y}(0) \mapsto \mathfrak{y}(\theta)$, где $\mathfrak{y}(\cdot)$ пробегает множество решений системы $\dot{\mathfrak{y}} = A(f^t f^\tau x)\mathfrak{y}$. Последняя система может быть переписана в виде

$$\dot{\mathfrak{y}} = A(f^{t+\tau} x)\mathfrak{y}, \tag{32}$$

поскольку f^t — действие группы $\mathbf{R}$ на $\mathfrak{B}$. Коэффициенты системы (32) являются сдвигами на τ коэффициентов системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$, и поэтому решения системы (32) являются сдвигами на τ решений системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$. Следовательно, отображение $\mathfrak{y}(0) \mapsto \mathfrak{y}(\theta)$, где $\mathfrak{y}(\cdot)$ пробегает множество решений системы (32), совпадает с отображением $\mathfrak{x}(\tau) \mapsto \mathfrak{x}(\theta + \tau)$, где $\mathfrak{x}(\cdot)$ пробегает множество решений системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$. Первое из этих отображений есть, как отмечено выше, $\mathfrak{X}(\theta,\ 0;\ A,\ f^\tau x)$, а второе равно $\mathfrak{X}(\theta + \tau,\ \tau;\ A,\ x)$. Следовательно, $\mathfrak{X}(\theta,\ 0;\ A,\ f^\tau x) = \mathfrak{X}(\theta + \tau,\ \tau;\ A,\ x)$. Лемма доказана.

Л е м м а 5. *Для всяких действительных чисел* ρ, σ, τ *и всяких* $A \in S$, $x \in \mathcal{B}$ *имеет место равенство*

$$\mathfrak{X}(\rho,\ \tau;\ A,\ x)\mathfrak{X}(\tau,\ \sigma;\ A,\ x)=\mathfrak{X}(\rho,\ \sigma;\ A,\ x).$$

Доказательство. Пусть даны $\rho\in\mathbf{R}$, $\sigma\in\mathbf{R}$, $\tau\in\mathbf{R}$, $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$. Из определения оператора Коши следуют равенства

$$\mathfrak{x}(\rho)=\mathfrak{X}(\rho,\ \tau;\ A,\ x)\mathfrak{x}(\tau), \tag{33}$$

$$\mathfrak{x}(\tau)=\mathfrak{X}(\tau,\ \sigma;\ A,\ x)\mathfrak{x}(\sigma), \tag{34}$$

$$\mathfrak{x}(\rho)=\mathfrak{X}(\rho,\ \sigma;\ A,\ x)\mathfrak{x}(\sigma) \tag{35}$$

для всякого решения $\mathfrak{x}(\cdot)$ системы $\dot{\mathfrak{x}}=A(f^t x)\mathfrak{x}$. Подставив (34) в (33), получим равенство $\mathfrak{x}(\rho)=\mathfrak{X}(\rho,\ \tau;\ A,\ x)\mathfrak{X}(\tau,\ \sigma;\ A,\ x)\mathfrak{x}(\sigma)$, сравнив которое с (35) (и учтя, что и оно, и (35) верно для всякого решения $\mathfrak{x}(\cdot)$ системы $\dot{\mathfrak{x}}=A(f^t x)\mathfrak{x}$, а для этой системы всякая задача Коши однозначно разрешима), получаем равенство $\mathfrak{X}(\rho,\ \tau;\ A,\ x)\mathfrak{X}(\tau,\ \sigma;\ A,\ x)=\mathfrak{X}(\rho,\ \sigma;\ A,\ x)$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Для всяких* $\theta\in\mathbf{R}$, $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$ *имеет место равенство*

$$\mathfrak{X}(\theta,\ \theta;\ A,\ x)=1_{E^n}.$$

Доказательство. Пусть даны $\theta\in\mathbf{R}$, $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$. По определению оператора Коши $\mathfrak{X}(\theta,\ \theta;\ A,\ x)\mathfrak{x}(\theta)=\mathfrak{x}(\theta)$ для всякого решения $\mathfrak{x}(\cdot)$ системы $\dot{\mathfrak{x}}=A(f^t x)\mathfrak{x}$. Вследствие однозначной разрешимости всякой задачи Коши для этой системы отсюда следует равенство $\mathfrak{X}(\theta,\ \theta;\ A,\ x)=1_{E^n}$. Лемма доказана.

Вернемся к отображению $\mathfrak{H}:\mathbf{R}\to\mathrm{End}\,(E,\ p,\ B)$, определенному формулой (31).

Предложение 1. *Отображение* $\mathfrak{H}$ *есть гомоморфизм группы* $\mathbf{R}$ *в группу автоморфизмов векторного расслоения* $(E,\ p,\ B)$.

Доказательство. 1) Так как f^t — действие группы $\mathbf{R}$ на $\mathfrak{B}$, то для всяких $\theta\in\mathbf{R}$, $\tau\in\mathbf{R}$ имеет место равенство $f^{\theta+\tau}=f^\theta f^\tau$, из которого (для всяких $\theta\in\mathbf{R}$, $\tau\in\mathbf{R}$) в силу (24) следует равенство $\chi^{\theta+\tau}=\chi^\theta\chi^\tau$.

2) Пусть даны $\theta\in\mathbf{R}$, $\tau\in\mathbf{R}$, $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$, $\mathfrak{x}\in E^n$. Положив в (23) $t=\tau$, получаем формулу

$$X^\tau((A,\ x),\ \mathfrak{x})=((A,\ f^\tau x),\ \mathfrak{X}(\tau,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}). \tag{36}$$

Заменив в формуле (23) t на θ, x на $f^\tau x$ и $\mathfrak{x}$ на $\mathfrak{X}(\tau,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}$, получаем

$$\begin{aligned}&X^\theta((A,\ f^\tau x),\ \mathfrak{X}(\tau,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x})=\\&=((A,\ f^\theta f^\tau x),\ \mathfrak{X}(\theta,\ 0;\ A,\ f^\tau x)\mathfrak{X}(\tau,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}).\end{aligned} \tag{37}$$

Из (36) — (37) следует формула

$$X^\theta X^\tau((A,\ x),\ \mathfrak{x})=((A,\ f^\theta f^\tau x),\ \mathfrak{X}(\theta,\ 0;\ A,\ f^\tau x)\mathfrak{X}(\tau,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}). \tag{38}$$

В силу леммы 4 имеем

$$\mathfrak{X}(\theta,\ 0;\ A,\ f^\tau x)=\mathfrak{X}(\theta+\tau,\ \tau;\ A,\ x). \tag{39}$$

Вследствие леммы 5

$$\mathfrak{X}(\theta+\tau,\ \tau;\ A,\ x)\mathfrak{X}(\tau,\ 0;\ A,\ x)=\mathfrak{X}(\theta+\tau,\ 0;\ A,\ x). \tag{40}$$

Из (39) — (40) следует формула

$$\mathfrak{X}(\theta,\ 0;\ A,\ f^\tau x)\mathfrak{X}(\tau,\ 0;\ A,\ x)=\mathfrak{X}(\theta+\tau,\ 0;\ A,\ x),$$

подставив которую в правую часть формулы (38), получаем

$$X^\theta X^\tau((A,\ x),\ \mathfrak{x})=((A,\ f^\theta f^\tau x),\ \mathfrak{X}(\theta+\tau,\ 0;\ A,\ x)). \tag{41}$$

В силу равенства $f^{\theta+\tau}=f^\theta f^\tau$, вытекающего из того, что f^t — действие группы $\mathbf{R}$, формулу (41) можно переписать в виде

$$X^\theta X^\tau((A,\ x),\ \mathfrak{x})=((A,\ f^{\theta+\tau}x),\ \mathfrak{X}(\theta+\tau,\ 0;\ A,\ x)).$$

Положив в (23) $t=\theta+\tau$, получим

$$X^{\theta+\tau}((A,\ x),\ \mathfrak{x}) = ((A, f^{\theta+\tau}x),\ \mathfrak{X}(\theta+\tau,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}).$$

Правые части двух последних равенств совпадают, следовательно, совпадают и их левые части: $X^{\theta+\tau}((A,\ x),\ \mathfrak{x}) = X^{\theta}X^{\tau}((A,\ x),\ \mathfrak{x})$. Так как это совпадение доказано для всех $\theta\in\mathbf{R}$, $\tau\in\mathbf{R}$, $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$, $\mathfrak{x}\in E^n$, то

$$X^{\theta+\tau} = X^{\theta}X^{\tau} \tag{42}$$

для всяких $\theta\in\mathbf{R}$, $\tau\in\mathbf{R}$.

3) При всяком $\tau\in\mathbf{R}$ имеем $X^{\tau}X^{-\tau} = X^0$, $X^{-\tau}X^{\tau} = X^0$; оба равенства следуют из доказанного в предыдущем пункте тождества (42). Далее, $X^0 = 1_E$ — это вытекает из формулы (23), взятой при $t = 0$, в силу леммы 6. Поэтому

$$X^{\tau}X^{-\tau} = X^{-\tau}X^{\tau} = 1_E \tag{43}$$

для всякого $\tau\in\mathbf{R}$.

4) При всяком $\tau\in\mathbf{R}$ имеем $\chi^{\tau}\chi^{-\tau} = \chi^0$, $\chi^{-\tau}\chi^{\tau} = \chi^0$; оба эти равенства следуют из тождества $\chi^{\theta+\tau} = \chi^{\theta}\chi^{\tau}$, доказанного в п. 1) для всяких $\theta\in\mathbf{R}$, $\tau\in\mathbf{R}$. Далее, $\chi^0 = 1_B$ вследствие формулы (16), формулы (24), взятой при $t = 0$ и равенства $f^0 = 1_B$, вытекающего из того, что f^t — действие группы $\mathbf{R}$ на $\mathcal{B}$. Поэтому

$$\chi^{\tau}\chi^{-\tau} = \chi^{-\tau}\chi^{\tau} = 1_B \tag{44}$$

для всякого $\tau\in\mathbf{R}$.

5) Для всяких $\theta\in\mathbf{R}$, $\tau\in\mathbf{R}$ имеют место формула (42) и формула $\chi^{\theta+\tau} = \chi^{\theta}\chi^{\tau}$, доказанная в пункте 1). Совокупность этих двух формул можно записать в виде

$$(X^{\theta+\tau},\ \chi^{\theta+\tau}) = (X^{\theta},\ \chi^{\theta})\circ(X^{\tau},\ \chi^{\tau})\ \ (\theta\in\mathbf{R}, \tau\in\mathbf{R}), \tag{45}$$

где знак $\circ$ означает поэлементное умножение пар, т. е. произведение эндоморфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$.

Формула (45) вместе с леммой 3 означает, что отображение $\mathfrak{H}$, определенное формулой (31), есть гомоморфизм группы $\mathbf{R}$ в полугруппу эндоморфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$.

6) Для всякого $\tau\in\mathbf{R}$ совокупность формул (43), (44) можно в обозначениях предыдущего пункта записать в виде

$$(X^{\tau},\ \chi^{\tau})\circ(X^{-\tau},\ \chi^{-\tau}) = (1_E,\ 1_B)\,,\ (X^{-\tau},\ \chi^{-\tau})\circ(X^{\tau},\ \chi^{\tau}) = (1_E,\ 1_B)\,.$$

Последние два равенства вместе с леммой 3 означают, что эндоморфизм $(X^{-\tau},\ \chi^{-\tau})$ векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ является обратным к эндоморфизму $(X^{\tau},\ \chi^{\tau})$. Следовательно, при всяком $\tau\in\mathbf{R}$ пара $(X^{\tau},\ \chi^{\tau})$ есть автоморфизм векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$.

7) Объединение результатов пп. 5), 6) заканчивает доказательство предложения.

Л е м м а 7. *Для всяких* $t\in\mathbf{R}$, $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(b) & \xrightarrow[X^t[b]]{} & p^{-1}(\chi^t b) \\ \downarrow{\scriptstyle F_b} & & \downarrow{\scriptstyle F_{\chi^t b}} \\ E^n & \xrightarrow[\mathfrak{X}(t,\,0;\,A,\,x)]{} & E^n \end{array} \tag{46}$$

где $b = (A,\ x)$, *коммутативна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть даны $t\in\mathbf{R}$, $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$. Положим $b = (A,\ x)$, тогда $b\in B$ (напомним, что $B = S + \mathfrak{B}$ согласно формуле (16)). В силу (23) для всякого $\mathfrak{x}\in E^n$ имеем

$$X^t((A,\ x),\ \mathfrak{x}) = ((A, f^t x),\ \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}).$$

Воспользовавшись формулой (24) и заменив в двух местах (A, x) на $b = (A,\ x)$, перепишем это равенство для всякого $\mathfrak{x}\in E^n$ в виде

$$X^t(b,\ \mathfrak{x}) = (\chi^t b,\ \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}). \tag{47}$$

Применим формулу (20):

$$F_b(b,\ \mathfrak{x}) = \mathfrak{x} \tag{48}$$

и формулу, получающуюся из (20) заменой $b \mapsto \chi^t b$, $\mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}$ (эти замены допустимы, так как $b \in B$ и $\mathfrak{x} \in E^n$ в (20) произвольны):

$$F_{\chi^t b}(\chi^t b,\ \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}) = \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}. \tag{49}$$

Из (47) — (49) следует, что

$$F_{\chi^t b} X^t(b,\ \mathfrak{x}) = \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x) F_b(b,\ \mathfrak{x}) \tag{50}$$

для всякого $\mathfrak{x} \in E^n$. Так как $X^t[b]$ по определению есть сужение отображения $X^t : E \to E$ на слой $p^{-1}(b) = \{(b,\ \mathfrak{x})\}_{\mathfrak{x} \in E^n}$, то (50) можно переписать в виде $F_{\chi^t b} X^t[b] = \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x) F_b$. Эта формула и есть не что иное, как утверждение о коммутативности диаграммы (46). Лемма доказана.

Лемма 8. *Для всяких* $t \in \mathbf{R}$, $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$ *имеет место равенство*

$$\| X^t[b] \| = \| \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x) \|,$$

где $b = (A,\ x)$.

Доказательство. Пусть даны $t \in \mathbf{R}$, $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$. Положим $b = (A,\ x)$. Отображение F_b F_b является изоморфизмом евклидова пространства $p^{-1}(b)$ на евклидово пространство E^n, а отображение $F_{\chi^t b}$ — изоморфизмом евклидова пространства $p^{-1}(\chi^t b)$ на евклидово пространство E^n — вследствие определения структур евклидова пространства на слоях векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$. Эти отображения соответствуют вертикальным стрелкам диаграммы (46), коммутативной в силу леммы 7. Следовательно, нормы отображений, соответствующих горизонтальным стрелкам этой диаграммы, равны: $\| X^t[b] \| = \| \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x) \|$.

Поясним, что последнее заключение основано на стандартном определении нормы линейного отображения нормированного пространства в нормированное пространство, согласно которому

$$\| X^t[b] \| = \sup_{\xi \in p^{-1}(b)_*} \{ | X^t \xi | \, | \xi |^{-1} \},$$

где $|\eta| = \langle \eta,\ \eta \rangle^{1/2}$ для всякого $\eta \in E$ ($\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ определено формулой (22)),

$$\| \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x) \| = \sup_{\mathfrak{x} \in E^n_*} \{ | \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x} | \, | \mathfrak{x} |^{-1} \},$$

где $|\mathfrak{y}| = (\mathfrak{y},\ \mathfrak{y})^{1/2}$ для всякого $\mathfrak{y} \in E^n$, а $(\cdot,\ \cdot)$ — скалярное произведение в E^n. Лемма доказана.

Определим функцию $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$ формулой

$$a(A,\ x) = \sup_{y \in \mathcal{B}} \| A(y) \|. \tag{51}$$

Лемма 9. *Для всяких* $t \in \mathbf{R}$, $b \in B$ *имеет место равенство* $a(\chi^t b) = a(b)$.

Доказательство. Пусть даны $t \in \mathbf{R}$, $b \in B$. Согласно формуле (16) имеем $b = (A,\ x)$, где $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$. Согласно формуле (24), служащей определением отображения χ^t, имеет место равенство $\chi^t(A,\ x) = (A,\ f^t x)$. Поэтому из (51) следует

$$a(\chi^t b) = a(A,\ f^t x) = \sup_{y \in \mathcal{B}} \| A(y) \| = a(A,\ x) = a(b).$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Для всяких* $t \in \mathbf{R}$, $b \in B$ *имеет место неравенство*

$$\left\| X^t \left[b \right] \right\| \le \exp\left(|t| a\left(b \right) \right).$$

Доказательство. Пусть даны $t \in \mathbf{R}$, $b \in B$. В силу (16) имеем

$$b = \left(A, x \right), \tag{52}$$

где $A \in S$, $x \in \mathcal{B}$.

Напомним известное неравенство, вытекающее из леммы Гроноулла:

$$\left\| \mathfrak{X}\left(t, 0; A, x \right) \right\| \le \exp \left| \int_0^t \left\| A\left(f^S x \right) \right\| ds \right|, \tag{53}$$

которому удовлетворяет оператор Коши $\left\| \mathfrak{X}\left(t, 0; A, x \right) \right\|$ системы $\dot{\mathfrak{x}} = A\left(f^t \mathfrak{x} \right)$. Так как $\left\| A\left(f^s x \right) \right\| \le a\left(A, x \right)$ — это следует из формулы (51), определяющей функцию $a\left(\cdot \right)$, — то из (53) следует неравенство

$$\left\| \mathfrak{X}\left(t, 0; A, x \right) \right\| \le \exp\left(|t| a\left(A, x \right) \right).$$

Левая часть этого неравенства в силу леммы 8 равна $\left\| X^t \left[b \right] \right\|$, а правая — в силу (52) — равна $\exp\left(|t| a\left(b \right) \right)$. Поэтому $\left\| X^t \left[b \right] \right\| \le \exp\left(|t| a\left(b \right) \right)$. Лемма доказана.

Итак, в этом параграфе построены метризованное векторное расслоение $(\left(E, p, B \right), \langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle)$ и гомоморфизм $\mathfrak{H}$ группы $\mathbf{R}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения $\left(E, p, B \right)$, удовлетворяющий условию, наложенному в начале § 3 (в фразе, содержащей формулы (7), (8)).

§ 5. К гомоморфизму $\mathfrak{H}$, построенному в предыдущем параграфе, применимы, естественно, все определения и утверждения параграфа 3. С целью выяснения вопроса о том, как эти определения и результаты можно сформулировать непосредственно «в терминах» системы $\dot{\mathfrak{x}} = A\left(f^t x \right) \mathfrak{x}$, проведем дополнительные рассмотрения.

Лемма 11. *Для всяких $\tau \in \mathbf{R}$, $A \in S$, $x \in \mathcal{B}$, для всякого векторного подпространства L слоя $p^{-1}\left(b \right)$, где $b = \left(A, x \right)$, имеет место равенство*

$$\left\| X_L^\tau \right\| = \left\| \mathfrak{X}\left(\tau, 0; A, x \right)_{F_b L} \right\|.$$

Доказательство. Пусть даны $\tau \in \mathbf{R}$, $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$. Напомним, что символ справа внизу в доказываемой сейчас формуле означает сужение отображения на множество, обозначенное этим символом. Напомним также, что для всякого векторного подпространства L слоя $p^{-1}\left(b \right)$ образ $F_b L$ этого подпространства при отображении F_b есть векторное подпространство пространства E^n, поскольку F_b есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}\left(b \right)$ на E^n. Наконец, напомним, что, согласно определению нормы линейного отображения,

$$\left\| X_L^\tau \right\| = \sup_{\xi \in L^*} \left\{ \left| X^\tau \xi \right| \left| \xi \right|^{-1} \right\},$$

где норма $|\ \cdot\ |$ индуцирована римановой метрикой $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle$, а

$$\left\| \mathfrak{X}\left(\tau, 0; A, x \right)_{F_b L} \right\| = \sup_{\mathfrak{x} \in F_b L_*} \left\{ \left| \mathfrak{X}\left(\tau, 0; A, x \right) \mathfrak{x} \right| \left| \mathfrak{x} \right|^{-1} \right\},$$

где норма $|\ \cdot\ |$ индуцирована скалярным произведением $\left(\cdot, \cdot \right)$. В силу этих формул доказываемая лемма следует из коммутативности диаграммы (46) (утверждение об этой коммутативности составляет содержание леммы 7), поскольку отображения, соответствующие вертикальным стрелкам в диаграмме (46), являются изоморфизмами евклидовых пространств, стоящих у начал стрелок, на евклидовы пространства, стоящие у концов стрелок. Лемма доказана.

В следующей лемме речь идет о показателях Ляпунова решений системы $\dot{\mathfrak{x}} = A\left(f^t x\right)\mathfrak{x}$, определенных в § 2 формулой

$$\lambda\left(A, x; \mathfrak{x}\right) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\left|\mathfrak{X}\left(t, 0; A, x\right)\mathfrak{x}\right| \tag{54}$$

для всяких $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{x} \in E^n$, и о показателях Ляпунова (см. формулу (9))

$$\lambda\left(\mathfrak{H}, \xi\right) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right| \tag{55}$$

гомоморфизма $\mathfrak{H}$ в точке $\xi \in E$.

Лемма 12. *Для всяких* $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$, $\xi \in p^{-1}\left(b\right)$, *где* $b = \left(A, x\right)$, *имеет место равенство* $\lambda\left(A, x; F_b\xi\right) = \lambda\left(\mathfrak{H}, \xi\right)$, *где* $\mathfrak{H}$ *— гомоморфизм, определенный в* § 4.

Доказательство. Пусть даны $A \in S$, $x \in \mathcal{B}$, $\xi \in p^{-1}\left(b\right)$, где $b = \left(A, x\right)$. Из (54) следует равенство

$$\lambda\left(A, x; F_b\xi\right) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\left|\mathfrak{X}\left(t, 0; A, x\right)F_b\xi\right|. \tag{56}$$

В силу леммы 7 имеет место формула

$$\mathfrak{X}\left(t, 0; A, x\right)F_b\xi = F_{\chi^t b}X^t\left[b\right]\xi,$$

из которой следует равенство $\mathfrak{X}\left(t, 0; A, x\right)F_b\xi = \left|X^t\left[b\right]\xi\right|$, поскольку $F_{\chi^t b}$ — изоморфизм евклидовых пространств. Далее, $X^t\left[b\right]\xi = X^t\xi$, поскольку $X^t\left[b\right]$ — сужение отображения X^t. Поэтому $\left|\mathfrak{X}\left(t, 0; A, x\right)F_b\xi\right| = \left|X^t\xi\right|$. Подставив последнюю формулу в (56), получаем

$$\lambda\left(A, x; F_b\xi\right) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right|.$$

Поскольку правая часть этого равенства совпадает с правой частью равенства (55), левые части указанных равенств равны: $\lambda\left(A, x; F_b\xi\right) = \lambda\left(\mathfrak{H}, \xi\right)$. Лемма доказана.

В следующей лемме рассматриваются векторные подпространства $E\left(A, x, \lambda\right)$ евклидова пространства E^n, определенные в § 2 для всяких $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ формулой

$$E\left(A, x, \lambda\right) = \left\{\mathfrak{x} \in E^n : \lambda\left(A, x, \mathfrak{x}\right) \le \lambda\right\}, \tag{57}$$

и подпространства $E\left(\mathfrak{H}, b, \lambda\right)$ слоев векторного расслоения $\left(E, p, B\right)$, построенного в § 4, определенные по гомоморфизму $\mathfrak{H} : \mathbf{R} \to \operatorname{Aut}\left(E, p, B\right)$, построенному в § 4, формулой (10):

$$E\left(\mathfrak{H}, b, \lambda\right) = \left\{\xi \in p^{-1}\left(b\right) : \lambda\left(\mathfrak{H}, \xi\right) \le \lambda\right\} \tag{58}$$

для всяких $b \in B$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

В лемме 14 фигурируют подпространства $E_k\left(A, x\right)$ пространства $E^n\left(k \in \left\{1, \ldots, n\right\}\right)$, определенные в § 2 исходя из подпространств $E\left(A, x, \lambda\right)$, а также подпространства $E_k\left(\mathfrak{H}, b\right)$ слоев $p^{-1}\left(b\right)$ векторного расслоения $\left(E, p, B\right)$, определенные в § 3, исходя из подпространств $E\left(\mathfrak{H}, b, \lambda\right)$.

Лемма 13. *Для всяких* $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ *имеет место равенство* $E\left(A, x, \lambda\right) = F_b E\left(\mathfrak{H}, b, \lambda\right)$, *где* $b = \left(A, x\right)$, *а* $\mathfrak{H}$ *— гомоморфизм, определенный в* § 4.

Доказательство. Пусть даны $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Положим $b = \left(A, x\right)$. Так как F_b — биекция слоя $p^{-1}\left(b\right)$ на пространство E^n, то из (57) следует формула

$$E\left(A, x, \lambda\right) = F_b\left\{\xi \in p^{-1}\left(b\right) : \lambda\left(A, x; F_b\xi\right) \le \lambda\right\}.$$

В силу леммы 12 имеем равенство $\lambda(A,x;F_b\xi)=\lambda(\mathfrak{H},\xi)$. Подставив его в предыдущую формулу, получаем

$$F_b^{-1}E(A,x,\lambda)=\left\{\xi\in p^{-1}(b):\lambda(\mathfrak{H},\xi)\le\lambda\right\}.$$

Правая часть этого равенства совпадет с правой частью равенства (58). Следовательно, левые части этих равенств совпадают $E(A,x,\lambda)=F_bE(\mathfrak{H},b,\lambda)$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Для всяких* $k\in\{1,...,n\}$, $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$ *имеет место равенство* $E_k(A,x)=F_bE_k(\mathfrak{H},b)$, *где* $b=(A,x)$, *а* $\mathfrak{H}$ *— гомоморфизм, определенный* в § 4.

Доказательство. Эта лемма следует из предыдущей, так как подпространства $E_k(\mathfrak{H},b)$ определяются через подпространства $E(\mathfrak{H},b,\lambda)$ (см. § 3) так же, как подпространства $E_k(A,x)$ определяются (см. § 2) через подпространства $E(A,x,\lambda)$. Лемма доказана.

В следующем предложении рассматриваются центральные показатели, определенные формулой (2), и центральные показатели, определенные формулой (13).

Предложение 2. *Для всяких* $k\in\{1,...,n\}$, $A\in S$, $x\in\mathcal{B}$ *имеет место равенство* $\Omega^{(k)}(A,x)=\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},(A,x))$, *где* $\mathfrak{H}$ *— гомоморфизм, определенный* в § 4.

Доказательство. Пусть даны $k\in\{1,...,n\}$, $A\in S$, $x\in\mathcal{B}$. Положим $b=(A,x)$. Из леммы 4, заменив в ней τ на $j\upsilon$, а θ на τ, получаем для всяких $\tau\in\mathbf{R}_*^+$, $j\in\mathbf{Z}$ равенство

$$\mathfrak{X}((j+1)\tau,j\tau;A,x)=\mathfrak{X}(\tau,0;A,f^{j\tau}x). \tag{59}$$

Из леммы 14, заменив в ее утверждении k на $n-k+1$, получаем равенство

$$E_{n-k+1}(A,x)=F_bE_{n-k+1}(\mathfrak{H},b). \tag{60}$$

Воспользуемся леммой 7, положив в диаграмме (46) $t=j\tau$, где $\tau\in\mathbf{R}_*^+$, $j\in\mathbf{Z}$ — любые:

$$\mathfrak{X}(j\tau,0;A,x)F_b=F_{\chi^{j\tau}b}X^{j\tau}[b]. \tag{61}$$

Из (60), (61) для всяких $\tau\in\mathbf{R}_*^+$, $j\in\mathbf{Z}$ следует формула

$$\mathfrak{X}(j\tau,0;A,x)E_{n-k+1}(A,x)=F_{\chi^{j\tau}b}X^{j\tau}E_{n-k+1}(\mathfrak{H},b),$$

из которой вытекает равенство

$$\mathfrak{X}((j+1)\tau,j\tau;A,x)_{\mathfrak{X}(j\tau,0;A,x)E_{n-k+1}(A,x)}=\mathfrak{X}((j+1)\tau,j\tau;A,x)_{F_{\chi^{j\tau}b}X^{j\tau}E_{n-k+1}(\mathfrak{H},b)^*}.$$

Из этого равенства в силу (59) следует

$$\mathfrak{X}((j+1)\tau,j\tau;A,x)_{\mathfrak{X}(j\tau,0;A,x)E_{n-k+1}(A,x)}=\mathfrak{X}(\tau,0;A,f^{j\tau}x)_{F_{\chi^{j\tau}b}X^{j\tau}E_{n-k+1}(\mathfrak{H},b)^*} \tag{62}$$

В силу леммы 11 (в которой надо теперь заменить b на $\chi^{j\tau}b$) при всяких $\tau\in\mathbf{R}_*^+$, $j\in\mathbf{Z}$ имеем

$$\left\|\mathfrak{X}(\tau,0;A,f^{j\tau}x)_{F_{\chi^{j\tau}b}X^{j\tau}E_{n-k+1}(\mathfrak{H},b)}\right\|=\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\mathfrak{H},b)}\right\|.$$

Поэтому при всяких $\tau\in\mathbf{R}_*^+$, $j\in\mathbf{Z}$ из (62) следует равенство

$$\left\|\mathfrak{X}((j+1)\tau,j\tau;A,x)_{\mathfrak{X}(j\tau,0;A,x)E_{n-k+1}}(A,x)\right\|=\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\mathfrak{H},b)}\right\|. \tag{63}$$

Правая часть равенства (2) есть результат применения операции

$$\inf_{\tau\in\mathbf{R}_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln$$

к левой части равенства (63). Правая часть равенства (13) есть результат применения той же операции к правой части равенства (63). Следовательно, правые части равенств (2) и

(13) равны. Поэтому равны и их левые части, т. е. $\Omega^{(k)}(A,x)=\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},b)$. Напомним, что $b=(A,x)$. Предложение доказано.

§ 6. Доказательство теоремы 1. В силу леммы 2 [6] гомоморфизм $\mathfrak{H}$ группы $\mathbf{R}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения (E,p,B), построенный в § 4, является насыщенным. Метрическое пространство (B,d_B) полно (см. § 4). Поэтому к гомоморфизму $\mathfrak{H}$ применима теорема 2 (см. § 3). В силу предложения 2 теорема 2 применительно к гомоморфизму $\mathfrak{H}$, построенному в § 4, совпадает с теоремой 1. Теорема 1 доказана.

Литература

1. *Ляпунов А. М.* Собр. соч., т. 2. М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

2. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

3. *Миллионщиков В. М.* Показатели Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения. — Матем. заметки, 1985, т. 38, № 1, с. 92—109.

4. *Миллионщиков В. М.* О типичных свойствах условной экспоненциальной устойчивости. III. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 11, с. 1866—1870.

5. *Миллионщиков В. М.* О типичных свойствах центральных показателей диффеоморфизмов. — Матем. заметки, 1984, т. 36, № 6, с. 893—912.

6. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. V. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 8, с. 1394—1410.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
10.X.1985