МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 40, № 2 (1986)

ТИПИЧНОЕ СВОЙСТВО ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

В. М. Миллионщиков

В этой статье доказывается *типичность полунепрерывности сверху показателей Ляпунова,* рассматриваемых как функции линейной системы дифференциальных уравнений или как функции нелинейной задачи Коши. В последнем варианте нелинейная задача Коши линеаризуется, и показатели Ляпунова возникшей линейной (дифференциальной или разностной) системы оказываются функциями той нелинейной задачи, которая была подвергнута линеаризации.

Прежде чем сформулировать теоремы, напомним некоторые определения.

§ 1. 1. *Векторным расслоением* со стандартным слоем $\mathbf{R}^n$ (в дальнейшем изложении не потребовалось бы существенных изменений для перехода от $\mathbf{R}^n$ к $\mathbf{C}^n$) называется тройка (E, p, B), где E *(пространство* векторного расслоения) и B *(база)* — некоторые топологические пространства, p *(проекция)* — непрерывное отображение E на B, причем для всякой точки $x \in B$ на *слое* $p^{-1}(x)$ *над точкой* x (так называется полный прообраз точки $x \in B$ при отображении $p : E \to B$) задана структура n-мерного векторного пространства над полем $\mathbf{R}$. В определение векторного расслоения включается еще требование локальной тривиальности: у всякой точки $x \in B$ имеется окрестность U_x (называемая *координатной окрестностью),* для которой имеется гомеоморфизм *(координатное отображение)* h_x топологического пространства $U_x \times \mathbf{R}^n$ на подпространство $p^{-1}(U_x)$ топологического пространства E, удовлетворяющий условию: для всякого $y \in U_x$ отображение $\mathfrak{x} \to h_x(y, \mathfrak{x})$ есть изоморфизм векторного пространства $\mathbf{R}^n$ на векторное пространство $p^{-1}(y)$; из последнего условия следует, в частности, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} U_x \times \mathbf{R}^n \arrow[r, "h_x"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & p^{-1}(U_x) \arrow[d, "p"] \\ & U_x \end{tikzcd}$$

коммутативна. Поясним использованные в предыдущей фразе обозначения: $p^{-1}(U_x)$ — полный прообраз множества $U_x \subset B$ при отображении $p : E \to B$, а через pr_1 обозначена проекция произведения $U_x \times \mathbf{R}^n$ на первый сомножитель.

2. *Риманова метрика* на векторном расслоении (E, p, B) определяется как непрерывное отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ множества пар (ξ, η) таких, что $\xi \in E$, $\eta \in E$, $p\xi = p\eta$, в действительную прямую $\mathbf{R}$, причем для всякого $b \in B$ сужение этого отображения на $p^{-1}(b) \times p^{-1}(b)$ есть скалярное произведение на векторном пространстве $p^{-1}(b)$.

Векторное расслоение, на котором задана риманова метрика, называется *метризованным векторным расслоением.*

3. *Эндоморфизм векторного расслоения* (E, p, B) по определению есть пара непрерывных отображений $X:E\to E$, $\chi:B\to B$, удовлетворяющая условию: для всякого $b\in B$ сужение

$$X[b]\overset{\text{def}}{=}X|_{p^{-1}(b)}$$

отображения X на слой над точкой b есть линейное отображение $p^{-1}(b)\to p^{-1}(\chi b)$. Из этого условия следует, в частности, что $pX=\chi p$, т. е. что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow[X]{} & E \\ \downarrow^{p} & & \downarrow^{p} \\ B & \xrightarrow[\chi]{} & B \end{array}.$$

4. *Семейством эндоморфизмов векторного расслоения* называем отображение $\mathfrak{M}$ множества $M\subset\mathbf{R}$ в множество эндоморфизмов этого векторного расслоения. При этом обычно будем требовать, чтобы множество M было неограниченным справа, т. е. имело $+\infty$ своей предельной точкой, а векторное расслоение было метризованным. Значение отображения $\mathfrak{M}$ в точке $t\in M$ будем записывать так: $(X_t,\ \chi_t)$. Одним из основных частных случаев у нас будет такой: $\mathfrak{M}$ — гомоморфизм аддитивной полугруппы $\mathbf{R}^+$ (или $\mathbf{Z}^+$) в мультипликативную полугруппу эндоморфизмов векторного расслоения. В этом случае вместо $\mathfrak{M}$ будем использовать обозначение $\mathfrak{H}$.

5. Для всякого $\xi\in E$ *показатель Ляпунова* $\lambda(\mathfrak{M},\ \xi)$ *семейства эндоморфизмов* $\mathfrak{M}$ *в точке* ξ определяется формулой

$$\lambda(\mathfrak{M},\ \xi)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X_t\xi|. \tag{1}$$

Поясним, что $\ln 0$ полагается равным $-\infty$, в выражении $t\to+\infty$ имеется в виду, что t стремится к $+\infty$, оставаясь в множестве M, а норма $|\eta|$ любого вектора $\eta\in E$ определяется через риманову метрику $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ по формуле $|\eta|=\langle\eta,\ \eta\rangle^{1/2}$. В частности, для нулевого вектора $\xi\in E$ (так называется нуль любого слоя) показатель Ляпунова равен $-\infty$.

6. Для всяких $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$, $b\in B$ *показатель Ляпунова* $\lambda_k(\mathfrak{M},\ b)$ *семейства эндоморфизмов* $\mathfrak{M}$ определяется формулой

$$\lambda_k(\mathfrak{M},\ b)=\inf_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))}\ \sup_{\xi\in\mathbf{R}^{n-k+1}}\lambda(\mathfrak{M},\ \xi), \tag{2}$$

где $G_q(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие q-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$.

Так определенные показатели Ляпунова мы будем рассматривать как функции $\lambda_k(\mathfrak{M},\ \cdot):B\to\overline{\mathbf{R}}$, отображающие базу B в расширенную числовую прямую $\overline{\mathbf{R}}$, получаемую присоединением к действительной прямой $\mathbf{R}$ двух точек: $-\infty$ и $+\infty$.

7. В [1] показатели Ляпунова $\lambda_k(\mathfrak{M},\ b)$ семейства эндоморфизмов $\mathfrak{M}$ определены несколько иначе. Там они определены при всяких $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$, $b\in B$ формулой

$$\lambda_k(\mathfrak{M},\ b)=\inf_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))}\ \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\|X_t|_{\mathbf{R}^{n-k+1}}\|, \tag{3}$$

где норма сужения $X_t|_{\mathbf{R}^{n-k+1}}$ определяется стандартным образом:

$$\|X_t|_{\mathbf{R}^q}\|\overset{\text{def}}{=}\sup_{\xi\in\mathbf{R}^q_*}\{|X_t\xi|\cdot|\xi|^{-1}\} \tag{4}$$

для всяких $q\in\{1,\ \dots,\ n\}$, $b\in B$, $\mathbf{R}^q\in G_q(p^{-1}(b))$.

Это определение эквивалентно предыдущему в силу предложения 1 [1]. Иными словами, для всяких $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$, $b\in B$ правая часть равенства (3) равна правой части равенства (2).

8. Пусть $((E,\ p,\ B),\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle)$ — метризованное векторное расслоение. Пусть M — неограниченное справа множество точек действительной прямой $\mathbf{R}$, пересечение которого с лучом $[m_0,\ +\infty)$, где m_0 — некоторая точка множества M, замкнуто в $\mathbf{R}$. Основные частные случаи:

$$M=\mathbf{R},\quad M=\mathbf{R}^+,\quad M=\mathbf{Z},\quad M=\mathbf{N}.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — отображение множества M в множество эндоморфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, удовлетворяющее условию: отображение $M\times E\to\mathbf{R}^+$, определенное формулой $(t,\ \xi)\mapsto|X_t\xi|$, непрерывно (это условие по вине автора пропущено в анонсе [2]). Наложенное условие непрерывности автоматически выполнено, если M дискретно (например, если $M=\mathbf{Z}$ или $M=\mathbf{N}$).

ТЕОРЕМА 1. *Для всякого $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ показатель Ляпунова $\lambda_k(\mathfrak{M},\ \cdot):B\to\overline{\mathbf{R}}$ есть функция второго класса Бэра.*

В дополнение к условиям, наложенным в начале этого пункта, потребуем, чтобы топологическое пространство B (база векторного расслоения) было метризуемым и полным в некоторой метрике. При этих условиях имеют место следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *В пространстве B имеется всюду плотное множество типа G_δ, обладающее свойством: для всякого $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ сужение функции $\lambda_k(\mathfrak{M},\ \cdot):B\to\overline{\mathbf{R}}$ на это множество непрерывно.*

ТЕОРЕМА 3. *В пространстве B типична полунепрерывность сверху всех показателей Ляпунова семейства $\mathfrak{M}$ т. е. в B имеется всюду плотное множество $\mathcal{D}$ типа G_δ такое, что для всякого $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\lambda_k(\mathfrak{M},\ \cdot):B\to\overline{\mathbf{R}}$ полунепрерывна сверху во всякой точке множества $\mathcal{D}$.*

9. Теорема 2 вытекает из теоремы 1 в силу теоремы Бэра (см. [3, с. 250, теорема VI, а также с. 162 — 164]).

Доказательствам теорем 1, 3 предпошлем вспомогательный материал: содержание следующего параграфа.

§ 2. В первых двух пунктах этого параграфа в удобных для дальнейшего изложения обозначениях напоминаются некоторые известные сведения.

1. *Локально тривиальным расслоением со стандартным слоем* $\mathfrak{F}$ называется тройка $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$, где $\mathcal{E}$ *(пространство* расслоения) и $\mathfrak{B}$ *(база* расслоения) — некоторые топологические пространства, а π *(проекция)* — некоторое непрерывное отображение $\mathcal{E}$ на $\mathfrak{B}$, удовлетворяющее условию: имеется топологическое пространство $\mathfrak{F}$ (стандартный слой) такое, что у всякой точки $\beta\in\mathfrak{B}$ имеется окрестность V_β *(координатная окрестность),* для которой имеется гомеоморфизм *(координатное отображение)* h_β топологического пространства $V_\beta\times\mathfrak{F}$ на подпространство $\pi^{-1}(V_\beta)$ топологического пространства $\mathcal{E}$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} V_\beta\times\mathfrak{F} \arrow[rr, "h_\beta"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(V_\beta) \arrow[dl, "\pi"] \\ & V_\beta & \end{tikzcd},$$

где pr_1 — проекция произведенияна $V_\beta\times\mathfrak{F}$ первый сомножитель, коммутативна. Поясним, что через $\pi^{-1}(V_\beta)$ обозначается полный прообраз множества V_β при отображении $\pi:\mathcal{E}\to\mathfrak{B}$. Полный прообраз любой точки $\beta\in\mathcal{B}$ при отображении $\pi:\mathcal{E}\to\mathfrak{B}$ обозначается через $\pi^{-1}(\beta)$ и называется *слоем над точкой* β.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$ — локально тривиальное расслоение с* *компактным стандартным слоем* $\mathfrak{F}$. *Пусть* $f(\cdot):\mathcal{E}\to\overline{\mathbf{R}}$ — *непрерывная функция. Тогда функция* $g(\cdot):\mathfrak{B}\to\overline{\mathbf{R}}$, *определенная формулой*

$$g(\cdot)\overset{\text{def}}{=}\sup_{\mathfrak{z}\in\pi^{-1}(\cdot)} f(\mathfrak{z}),$$

непрерывна и для всякого $\beta\in\mathfrak{B}$ *точная верхняя грань*

$$\sup_{\mathfrak{z}\in\pi^{-1}(\beta)} f(\mathfrak{z})$$

достигается, т. е. равна

$$\max_{\mathfrak{z}\in\pi^{-1}(\beta)} f(\mathfrak{z}).$$

Доказательство. Гомеоморфизмом расширенной прямой $\overline{\mathbf{R}}$ на отрезок прямой это предложение сводится к своему частному случаю, в котором все значения функции $f(\cdot)$ конечны, а этот частный случай для полноты изложения доказан в [1] (см. предложение 3 цитируемой статьи). Предложение доказано.

2. Пусть дано $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$. Для всякого $b\in B$ обозначим через $E_b^{(k)}$ множество всех k-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$ векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$. Через $E^{(k)}$ обозначим объединение всех этих множеств:

$$E^{(k)}=\bigcup_{b\in B} E_b^{(k)}.$$

Пусть даны произвольная точка $\hat{b}\in B$ и произвольное k-мерное векторное подпространство $\widehat{\mathbf{R}}^k$ слоя $p^{-1}(\hat{b})$ векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$. Всякому базису $\{\hat{\xi}_1,\ \dots,\ \hat{\xi}_k\}$ векторного пространства $\widehat{\mathbf{R}}^k$ и всякому набору окрестностей $U(\hat{\xi}_i)$ точек $\hat{\xi}_i$ ($i\in\{1,\ \dots,\ k\}$) в топологическом пространстве E поставим в соответствие множество всех тех k-мерных подпространств $\mathbf{R}^k$ слоев $p^{-1}(b)$ векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, для которых $\mathbf{R}^k\bigcap U(\hat{\xi}_i)\neq\varnothing$ при всяком $i\in\{1,\ \dots,\ k\}$. Для всякого $\widehat{\mathbf{R}}^k\in E^k$ объявим указанное множество содержащих эту точку подмножеств множества $E^{(k)}$ базисом окрестностей этой точки. Тем самым $E^{(k)}$ наделяется структурой топологического пространства.

Отображение $p^{(k)}:E^{(k)}\to B$ определим формулой $p^{(k)}\mathbf{R}^k=b$ для всяких $b\in B$, $\mathbf{R}^k\in E_b^{(k)}$.

Непосредственно из определений вытекает, что тройка $(E^{(k)},\ p^{(k)},\ B)$ является локально тривиальным расслоением со стандартным слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$.

При всяком $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$ грассманово многообразие $G_k(\mathbf{R}^n)$ естественно наделяется структурой левого $\mathrm{GL}(n,\ \mathbf{R})$-пространства, а именно для $\mathbf{R}^k\in G_k(\mathbf{R}^n)$, $\varphi\in\mathrm{GL}(n,\ \mathbf{R})$ определено $\varphi\mathbf{R}^k$ — множество образов точек множества $\mathbf{R}^k$ при отображении φ. Локально тривиальное расслоение $(E^{(k)},\ p^{(k)},\ B)$ есть расслоенное пространство со слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$, ассоциированное с тем же локально тривиальным главным $\mathrm{GL}(n,\ \mathbf{R})$-расслоением, с которым ассоциировано векторное расслоение $(E,\ p,\ B)$ (см. [4, с. 69, 72-73, 97-98]).

3. Пусть $((E,\ p,\ B),\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle)$ — метризованное векторное расслоение. Пусть $\mathfrak{M}:M\to\mathrm{End}(E,\ p,\ B)$ — отображение множества $M\subset\mathbf{R}$ в множество эндоморфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, удовлетворяющее условию: отображение $(t,\ \xi)\mapsto|X_t\xi|$ пространства $M\times E$ в $\mathbf{R}^+$ непрерывно. Введем обозначение:

$$M_*^+ \overset{\text{def}}{=} M \bigcap \mathbf{R}_*^+,$$

где $\mathbf{R}_*^+$ — множество всех положительных действительных чисел.

ЛЕММА 1. *Для всякого* $k \in \{1, \ \ldots, \ n\}$ *формула*

$$a(t, \ \mathbf{R}^k) = \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|, \tag{5}$$

где $t \in M_*^+$, $\mathbf{R}^k \in E^{(k)}$, *определяет непрерывную функцию* $a(\cdot) : M_*^+ \times E^{(k)} \to \overline{\mathbf{R}}$.

Доказательство. 1) Пусть дано $k \in \{1, \ \ldots, \ n\}$. Определим топологическое пространство $\mathcal{E}^{(k)}$ как подпространство произведения $E^{(k)} \times E$, состоящее из пар $(\mathbf{R}^k, \ \xi)$ таких, что $\mathbf{R}^k \in E^{(k)}$, $\xi \in \mathbf{R}^k$, причем $|\xi| = 1$. Положим $\mathfrak{B}^{(k)} = E^{(k)}$. Определим отображение $\pi^{(k)} : \mathcal{E}^{(k)} \to \mathfrak{B}^{(k)}$ как сужение на $\mathcal{E}^{(k)}$ проекции произведения $E^{(k)} \times E$ на первый сомножитель. Так определенная тройка $(\mathcal{E}^{(k)}, \ \pi^{(k)}, \ \mathfrak{B}^{(k)})$ является локально тривиальным расслоением ($\mathcal{E}^{(k)}$ — пространство, $\pi^{(k)}$ — проекция, $\mathfrak{B}^{(k)}$ — база) со стандартным слоем S^{k-1} ($(k-1)$- мерная сфера).

2) Пусть дано $k \in \{1, \ \ldots, \ n\}$. Формула

$$f^{(k)}(t, \ (\mathbf{R}^k, \ \xi)) = | X_t \xi | \tag{6}$$

определяет функцию $f^{(k)}(\cdot) : M_*^+ \times \mathcal{E}^{(k)} \to \mathbf{R}^+$.

Эта функция непрерывна, будучи суперпозицией непрерывных отображений: а) отображения $M_*^+ \times \mathcal{E}^{(k)} \to M_*^+ \times E$, определенного формулой $(t, \ (\mathbf{R}^k, \ \xi)) \mapsto (t, \ \xi)$; это отображение непрерывно, так как оно есть сужение проекции топологического произведения $M_*^+ \times E^{(k)} \times E$ на топологическое произведение крайних сомножителей, т. е. на $M_*^+ \times E$; б) отображения $M_*^+ \times E \to \mathbf{R}^+$, определенного формулой $(t, \ \xi) \mapsto | X_t \xi |$, которое непрерывно, будучи сужением отображения $M \times E \to \mathbf{R}^+$, определенного той же формулой и непрерывного согласно условию, наложенному в начале п. 3.

3) Применим предложение 1 к функции $f^{(k)}(\cdot) : M_*^+ \times \mathcal{E}^{(k)} \to \mathbf{R}^+$, определенной формулой (6). Для этого положим

$$\mathcal{E} = M_*^+ \times \mathcal{E}^{(k)}, \quad \mathfrak{B} = M_*^+ \times \mathfrak{B}^{(k)},$$
$$\pi = 1_{M_*^+} \times \pi^{(k)};$$

последняя формула означает, что $\pi(t, \ \mathbf{R}^k, \ \xi) = (t, \ \mathbf{R}^k)$ для всяких $t \in M_*^+$, $(\mathbf{R}^k, \ \xi) \in \mathcal{E}^{(k)}$. Отсюда

$$\pi^{-1}(t, \ \mathbf{R}^k) = \{(t, \ \mathbf{R}^k, \ \xi) : \xi \in \mathbf{R}^k, \ \ |\xi| = 1\} \tag{7}$$

для всяких $t \in M_*^+$, $\mathbf{R}^k \in E^{(k)}$. Так как $(\mathcal{E}^{(k)}, \ \pi^{(k)}, \ \mathfrak{B}^{(k)})$ — локально тривиальное расслоение со стандартным слоем S^{k-1}, то и $(\mathcal{E}, \ \pi, \ \mathfrak{B})$ — локально тривиальное расслоение со стандартным слоем S^{k-1}.

Положим далее

$$f(\cdot) = f^{(k)}(\cdot) : \mathcal{E} \to \mathbf{R}^+. \tag{8}$$

В п. 2) доказано, что эта функция непрерывна. Поэтому согласно предложению 1

$$g(\cdot) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\cdot)} f(\mathfrak{z}) = \max_{\mathfrak{z} \in \pi^{-1}(\cdot)} f(\mathfrak{z})$$

есть непрерывная функция $\mathfrak{B} \to \mathbf{R}^+$. Подставив в последнюю цепочку равенств формулу (7), получим, что

$$g(t, \ \mathbf{R}^k) = \max_{(t, \ \mathbf{R}^k, \ \xi) \in \pi^{-1}(t, \ \mathbf{R}^k)} f(t, \ \mathbf{R}^k, \ \xi) = \max_{\substack{\xi \in \mathbf{R}^k \\ |\xi| = 1}} f(t, \ \mathbf{R}^k, \ \xi)$$

при всяких $t \in M_*^+$, $\mathbf{R}^k \in E^{(k)}$. Отсюда в силу (6), (8) следует, что

$$g(t,\ \mathbf{R}^k) = \max_{\substack{\xi\in\mathbf{R}^k \\ |\xi|=1}} |X_t\xi| = \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|$$

для всяких $t \in M_*^+$, $\mathbf{R}^k \in E^{(k)}$; последнее равенство в этой цепочке есть просто определение его правой части. Подведем итог этого пункта: формула

$$g^{(k)}(t,\ \mathbf{R}^k) = \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|, \tag{9}$$

где $t \in M_*^+$, $\mathbf{R}^k \in E^{(k)}$, определяет непрерывное отображение $g^{(k)} : M_*^+ \times E^{(k)} \to \mathbf{R}^+$.

4) Отображение $l : \mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}^+ \to \overline{\mathbf{R}}$, определенное формулой

$$l(t,\ s) = \frac{1}{t}\ln s, \tag{10}$$

где $t \in \mathbf{R}_*^+$, $s \in \mathbf{R}^+$, как известно, непрерывно (напомним, что $\ln 0 = -\infty$).

5) Пусть дано $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$. Из формул (5), (9), (10) следует, что

$$a(t,\ \mathbf{R}^k) = l(t,\ g^{(k)}(t,\ \mathbf{R}^k))$$

для всяких $t \in M_*^+$, $\mathbf{R}^k \in E^{(k)}$. Отсюда в силу непрерывности отображения $g^{(k)} : M_*^+ \times E^{(k)} \to \mathbf{R}^+$ (результат п. 3)), непрерывности отображения $l : \mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}^+ \to \overline{\mathbf{R}}$ и включения $M_*^+ \subset \mathbf{R}_*^+$ следует непрерывность отображения $a(\cdot) : M_*^+ \times E^{(k)} \to \overline{\mathbf{R}}$. Лемма доказана.

Далее будут использоваться следующие обозначения:

$$M_m \overset{\text{def}}{=} M \bigcap [m,\ +\infty), \tag{11}$$

$$M_{m,\,q} \overset{\text{def}}{=} M \bigcap [m,\ q] \tag{12}$$

для всяких $m \in M$, $q \in M_m$.

Л Е М М А 2. *Пусть для некоторого* $m_0 \in M$ *множество* M_{m_0} *замкнуто в* $\mathbf{R}$. *Тогда для всяких положительных* $m \in M_{m_0}$, $q \in M_m$ *и всякого* $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ *формула*

$$a_{m,\,q}(\mathbf{R}^k) = \sup_{t\in M_{m,\,q}} \frac{1}{t}\ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|$$

определяет непрерывную функцию $a_{m,\,q}(\cdot) : E^{(k)} \to \overline{\mathbf{R}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны положительные $m \in M_{m_0}$, $q \in M_m$ и дано $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$. Положив

$$\mathcal{E} = M_{m,\,q} \times E^{(k)},\quad \mathfrak{B} \times E^{(k)},\quad \pi = \mathrm{pr}_2, \tag{13}$$

где pr_2 — проекция топологического произведения $M_{m,\,q} \times E^{(k)}$ на второй сомножитель, получаем тривиальное векторное расслоение $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$ со стандартным слоем $\mathfrak{F} = M_{m,\,q}$. Стандартный слой $\mathfrak{F} = M_{m,\,q}$ компактен, поскольку в силу формулы (12) он есть пересечение множества M_{m_0}, по условию замкнутого в $\mathbf{R}$, с замкнутым отрезком прямой. Множество $M_{m,\,q}$ непусто, так как $m \in M_{m_0} \subset M$, а $q \in M_m$. Положив для всяких $t \in M_{m,\,q}$, $\mathbf{R}^k \in E^{(k)}$

$$f(t,\ \mathbf{R}^k) \frac{1}{t}\ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|, \tag{14}$$

получаем функцию $f(\cdot) : \mathcal{E} = M_{m,\,q} \times E^{(k)} \to \overline{\mathbf{R}}$, которая непрерывна в силу леммы 1, поскольку $M_{m,\,q} \subset M_*^+$ вследствие положительности чисел m, q, равенства (12) и формулы $M_*^+ = M \bigcap \mathbf{R}_*^+$, служащей определением множества M_*^+. Применив к этой функции предложение 1, получаем, что функция $g(\cdot):\mathfrak{B}\to\overline{\mathbf{R}}$, определенная формулой

$$g(\cdot)\overset{\text{def}}{=}\sup_{\mathfrak{z}\in\pi^{-1}(\cdot)} f(\mathfrak{z}), \tag{15}$$

непрерывна. Так как $\pi^{-1}(\mathbf{R}^k)=M_{m,\,q}\times\{\mathbf{R}^k\}$ для всякого $\mathbf{R}^k\in\mathfrak{B}=E^{(k)}$ (вследствие определения π как проекции произведения $M_{m,\,q}\times E^{(k)}$ на второй сомножитель), то из (15) следует, что

$$g(\mathbf{R}^k)=\sup_{t\in M_{m,\,q}} f(t,\,\mathbf{R}^k)$$

для всякого $\mathbf{R}^k\in\mathfrak{B}=E^{(k)}$. Подставив в правую часть последнего равенства формулу (14), получаем, что

$$g(\mathbf{R}^k)=\sup_{t\in M_{m,\,q}}\frac{1}{t}\ln\|\,X_t\,|_{\mathbf{R}^k}\|$$

для всякого $\mathbf{R}^k\in\mathfrak{B}=E^{(k)}$. Последнее означает, что функция $g(\cdot):\mathfrak{B}=E^{(k)}\to\overline{\mathbf{R}}$, непрерывность которой доказана, совпадает с функцией $a_{m,\,q}(\cdot):E^{(k)}\to\overline{\mathbf{R}}$, непрерывность которой требовалось доказать. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Пусть для некоторого* $m_0\in M$ *множество* M_{m_0} *замкнуто в* $\mathbf{R}^+$. *Тогда для всяких положительных* $m\in M_{m_0}$, $q\in M_m$ *и всякого* $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ *формула*

$$c_{m,\,q}(b)=\inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))}\ \sup_{t\in M_{m,\,q}}\frac{1}{t}\ln\|\,X_t\,|_{\mathbf{R}^k}\| \tag{16}$$

определяет непрерывную функцию $c_{m,\,q}(\cdot):B\to\overline{\mathbf{R}}$.

Доказательство. Пусть даны положительные $m\in M_{m_0}$, $q\in M_m$ и дано $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$. Положив

$$\mathcal{E}=E^{(k)},\quad \mathfrak{B}\times B,\quad \pi=p^{(k)},$$

получим, как отмечено в п. 2 этого параграфа, локально тривиальное расслоение $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$ со стандартным слоем $\mathfrak{F}=G_k(\mathbf{R}^n)$. Грассманово многообразие компактно (см. [4, с. 25]), поэтому построенное локально тривиальное расслоение $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$ удовлетворяет условиям предложения 1.

Определим функцию $f(\cdot):\mathcal{E}\to\overline{\mathbf{R}}$ формулой

$$f(\mathbf{R}^k)=-\sup_{t\in M_{m,\,q}}\frac{1}{t}\ln\|\,X_t\,|_{\mathbf{R}^k}\|, \tag{17}$$

где $\mathbf{R}^k\in E^{(k)}=\mathcal{E}$. Поясним, что множество $M_{m,\,q}$ непусто, так как $m\in M_{m_0}\subset M$, $q\in M_m$. В силу предложения 1 функция $g(\cdot):\mathfrak{B}\to\overline{\mathbf{R}}$, определенная формулой

$$g(\cdot)\overset{\text{def}}{=}\sup_{\mathbf{R}^k\in\pi^{-1}(\cdot)} f(\mathbf{R}^k), \tag{18}$$

непрерывна. Из (18) следует, что эта функция равна

$$-\inf_{\mathbf{R}^k\in\pi^{-1}(\cdot)}(-f(\mathbf{R}^k)).$$

Отсюда в силу (17) имеем

$$g(b)=-\inf_{\mathbf{R}^k\in\pi^{-1}(b)}\ \sup_{t\in M_{m,\,q}}\frac{1}{t}\ln\|\,X_t\,|_{\mathbf{R}^k}\|$$

для всякого $b\in\mathfrak{B}=B$. Сравнив последнюю формулу с (16), видим, что функция $c_{m,\,q}(\cdot):B\to\overline{\mathbf{R}}$, определенная формулой (16), совпадает с функцией $-g(\cdot):\mathfrak{B}=B\to\overline{\mathbf{R}}$. Функция $g(\cdot):\mathfrak{B}=B\to\overline{\mathbf{R}}$, как доказано выше, непрерывна. Следовательно, и функция

$c_{m,q}(\cdot): B \to \overline{\mathbf{R}}$, определенная формулой (16), непрерывна. Лемма доказана.

4. Пусть $((E, p, B), \langle\cdot, \cdot\rangle)$ — метризованное векторное расслоение. Пусть M — неограниченное справа множество точек действительной прямой. Пусть $\mathfrak{M}: M \to \mathrm{End}(E, p, B)$ — отображение множества M в множество эндоморфизмов векторного расслоения (E, p, B). Для всякого $s \in M$ обозначим через $\mathfrak{M}_s$ сужение отображения $\mathfrak{M}: M \to \mathrm{End}(E, p, B)$ на множество $M_s = M \bigcap [s, +\infty)$.

В условиях этого пункта имеют место следующие две леммы.

ЛЕММА 4. *Для всяких* $s \in M$, $\xi \in E$ *имеет место равенство*

$$\lambda(\mathfrak{M}, \xi) = \lambda(\mathfrak{M}_s, \xi).$$

Доказательство непосредственно следует из сравнения (1) с формулой, получаемой из (1) заменой $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}_s$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Для всяких* $s \in M$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in B$ *имеет место равенство*

$$\lambda_k(\mathfrak{M}, b) = \lambda_k(\mathfrak{M}_s, b).$$

Доказательство. Эта лемма следует из формулы (2) в силу леммы 4. Лемма доказана.

5. Пусть $((E, p, B), \langle\cdot, \cdot\rangle)$ — метризованное векторное расслоение. Пусть M — неограниченное справа множество точек действительной прямой. Пусть $\mathfrak{M}: M \to \mathrm{End}(E, p, B)$ — отображение множества M в множество эндоморфизмов векторного расслоения (E, p, B).

Фиксируем любую монотонно возрастающую последовательность $\{m_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ положительных элементов множества M, стремящуюся к $+\infty$.

В условиях этого пункта имеют место следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Для всяких* $k \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in B$ *имеет место равенство*

$$\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{M}, b) = \lim_{i \to \infty} \lim_{j \to \infty} \min_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \sup_{t \in M_{m_i, m_j}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|.$$

Доказательство. Пусть даны $k \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in B$. В силу теоремы [1], примененной к сужению отображения $\mathfrak{M}: M \to \mathrm{End}(E, p, B)$ на множество $M_s = M \bigcap [s, +\infty)$, где s — какой-нибудь положительный элемент множества M, — это сужение обозначается через $\mathfrak{M}_s$ — имеет место формула

$$\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{M}_s, b) = \lim_{m \to +\infty} \lim_{q \to +\infty} \min_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \sup_{t \in M_{m,q}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|, \tag{19}$$

где $m \in M_s$, $q \in M_m$. Правая часть равенства (19) не изменится, если m, стремясь к $+\infty$, будет пробегать не множество $M_s = M \bigcap [s, +\infty)$, а все множество M.

Далее, правая часть равенства (19) не изменится, если заставить m и q при стремлении к $+\infty$ принимать значения не из всего множества M, а только из фиксированной последовательности $\{m_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ его точек, стремящейся к $+\infty$: это вытекает из существования пределов $\lim\limits_{q \to +\infty}$ и $\lim\limits_{m \to +\infty}$ в (19). Поэтому правая часть равенства (19) равна

$$\lim_{i \to \infty} \lim_{j \to \infty} \min_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \sup_{t \in M_{m_i, m_j}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|.$$

Левая часть равенства (19) в силу леммы 5 равна $\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{M}, b)$. Следовательно, из (19) вытекает равенство

$$\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{M}, b) = \lim_{i \to \infty} \lim_{j \to \infty} \min_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \sup_{t \in M_{m_i, m_j}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|.$$

Теорема доказана.

Т Е О Р Е М А 5. *Для всяких* $k \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in B$ *имеет место равенство*

$$\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{M}, b) = \inf_{i \in \mathbf{N}} \lim_{j \to \infty} \min_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \sup_{t \in M_{m_i, m_j}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть даны $k \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in B$.

В силу леммы 6 [1] для всякого $t \in M_*^+$ (напомним, что через M_*^+ обозначается множество всех положительных элементов множества M) формула

$$a(t, \mathbf{R}^k) = \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \| \tag{20}$$

определяет непрерывную функцию $a(t, \cdot) : G_k(p^{-1}(b)) \to \overline{\mathbf{R}}$.

Грассманово многообразие $G_k(p^{-1}(b))$ компактно (см. [4, с. 25]), и поэтому для непрерывных функций

$$a(t, \cdot) : G_k(p^{-1}(b)) \to \overline{\mathbf{R}} \quad (t \in M_*^+),$$

определенных формулой (20), можно воспользоваться леммами § 3 [1], заменив в этих леммах M на M_*^+ и положив в них $F = G_k(p^{-1}(b))$, $x = \mathbf{R}^k$, $a(t, x) = \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|$. Для всяких $m \in M_*^+$, $q \in M_{*m}^+ = M_*^+ \cap [m, +\infty)$ указанные замены превращают (16) [1] в следующую формулу, служащую определением своей левой части:

$$a^{(m)}(q) = \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \sup_{t \in M_{m,q}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|.$$

В силу леммы 2 [1] при всяких $m \in M_*^+$, $q \in M_{*m}^+$ точная нижняя грань в этой формуле достигается, т. е.

$$a^{(m)}(q) = \min_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \sup_{t \in M_{m,q}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|. \tag{21}$$

В силу леммы 3 [1] при всяком $m \in M_*^+$ существует предел

$$A(m) \overset{\text{def}}{=} \lim_{q \to +\infty} a^{(m)}(q). \tag{22}$$

Из лемм 3, 4 [1] следует, что функция $A(\cdot) : M_*^+ \to \overline{\mathbf{R}}$ — монотонно невозрастающая. Из (21), (22) при всяком $m \in M_*^+$ вытекает равенство

$$A(m) = \lim_{q \to +\infty} \min_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \sup_{t \in M_{m,q}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|.$$

Так как $m_i \in M_*^+$ при всяком $i \in \mathbf{N}$, а $m_j \underset{j \to \infty}{\to} +\infty$, то из предыдущей фразы следует, что для всякого $i \in \mathbf{N}$ выполнено равенство

$$A(m_i) = \lim_{j \to \infty} \min_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \sup_{t \in M_{m_i, m_j}} \frac{1}{t} \ln \| X_t |_{\mathbf{R}^k} \|.$$

Так как функция $A(\cdot) : M_*^+ \to \overline{\mathbf{R}}$ — монотонно невозрастающая, а последовательность $\{m_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ точек множества M_*^+ — монотонно возрастающая, то последовательность $\{A(m_i)\}_{i \in \mathbf{N}}$ — монотонно невозрастающая.

Поэтому ее предел (точка расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$) равен ее точной нижней грани:

$$\lim_{i\to\infty}\lim_{j\to\infty}\min_{\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))}\sup_{t\in M_{m_i,\,m_j}}\frac{1}{t}\ln\|X_t|_{\mathbf{R}^k}\|=$$

$$=\inf_{i\in\mathbf{N}}\lim_{j\to\infty}\min_{\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))}\sup_{t\in M_{m_i,\,m_j}}\frac{1}{t}\ln\|X_t|_{\mathbf{R}^k}\|.$$

Левая часть последнего равенства в силу теоремы 4 равна $\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{M},\ b)$. Следовательно,

$$\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{M},\ b)=\inf_{i\in\mathbf{N}}\lim_{j\to\infty}\min_{\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))}\sup_{t\in M_{m_i,\,m_j}}\frac{1}{t}\ln\|X_t|_{\mathbf{R}^k}\|.$$

Теорема доказана.

§ 3. 1. Доказательство теоремы 1. Теорема 1 следует из теоремы 4 в силу леммы 3. Теорема 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 3. Из теоремы 5 в силу леммы 3 следует, что для всякого $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$ функция $\lambda_k(\mathfrak{M},\ \cdot):B\to\overline{\mathbf{R}}$ есть точная нижняя грань счетного множества функций первого класса Бэра. В силу теоремы Бэра (см. [3, с. 240 — 242, 162 — 164]) для всякой функции $B\to\overline{\mathbf{R}}$ первого класса Бэра (B — метризуемое и полное в некоторой метрике топологическое пространство) множество ее точек непрерывности есть всюду плотное множество типа G_δ. Счетное пересечение всюду плотных множеств типа G_δ в полном в некоторой метрике топологическом пространстве B есть всюду плотное множество типа G_δ (теорема Бэра — см. [3, с. 163]). Поэтому множество точек пространства B, в которых непрерывна *каждая* функция из счетного множества функций $B\to\overline{\mathbf{R}}$ первого класса Бэра, есть всюду плотное множество типа G_δ.

Точная нижняя грань любого множества функций, непрерывных в некоторой точке, есть функция, полунепрерывная сверху в этой точке (это хорошо известно и легко доказывается — см., например, [3, с. 237 — 238]). Следовательно, для всякого $k\in\{1,\ \dots,\ n\}$ множество точек полунепрерывности сверху функции $\lambda_k(\mathfrak{M},\ \cdot):B\to\overline{\mathbf{R}}$ содержит всюду плотное множество типа G_δ. Снова воспользовавшись теоремой Бэра, согласно которой пересечение непустой не более чем счетной совокупности (в данном случае число множеств совокупности равно n) всюду плотных множеств типа G_δ (в полном в некоторой метрике пространстве) есть всюду плотное множество типа G_δ, получаем, что множество точек, в которых *каждая* из функций $\lambda_k(\mathfrak{M},\ \cdot):B\to\overline{\mathbf{R}}$ ($k\in\{1,\ \dots,\ n\}$) полунепрерывна сверху, содержит всюду плотное множество типа G_δ. Теорема 3 доказана.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 08.01.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Миллионщиков В. М. Формулы для показателей Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения // Математические заметки, 1986. Т. 39, вып. 1. С. 29—51.

[2] Миллионщиков В.М. О показателях Ляпунова // Дифферент, уравнения. 1985. Т. 21, № 11. С. 2016.

[3] Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М. — Л.: ОНТИ, 1937.

[4] Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. — М.: Мир, 1970.