Доклады Академии наук СССР
1968. Том 179, № 3

УДК 517.941.92 *МАТЕМАТИКА*

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕРОЯТНОГО СПЕКТРА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕКУРРЕНТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И КРИТЕРИЙ ПОЧТИ ПРИВОДИМОСТИ СИСТЕМ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 2X 1967)

В работах ([4], [5]) введено и изучено понятие вероятного спектра $\Lambda_P(A)$ линейной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)\,x. \tag{1}$$

($x \in E^n$, $A(t)$ ограничена и равномерно непрерывна на прямой).

Мы скажем, что вероятный спектр системы (1) устойчив, если для всякой инвариантной меры μ на динамической системе D_A (см. ([5])) существует множество $M \subseteq R_A$, $\mu(M) = 1$, такое, что для всякой $\tilde{A}(t) \in M$ система

$$\dot{x} = \tilde{A}(t)\,x. \tag{2}$$

имеет устойчивые показатели (см. ([6])) (R_A обозначает пространство динамической системы D_A).

В настоящей работе решается следующий вопрос.

Пусть $A(t)$ рекуррентна (т. е. динамическая система D_A такова, что каждая ее траектория всюду плотна). При каких условиях вероятный спектр системы (1) устойчив?

Результаты прилагаются затем к исследованию систем с почти периодическими коэффициентами. Кроме того, в конце заметки приводится пример не почти приводимой (см. ([2]), § 21) системы (1) с почти периодическими коэффициентами.

Следующее понятие является фундаментальным для дальнейшего.

Определение 1. Назовем систему (1) абсолютно регулярной, если существует перроновское преобразование $x = U(t)\,u.$, приводящее ее к треугольному виду

$$\dot{u} = P(t)\,u; \quad P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & p_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

который удовлетворяет условиям:

1) существуют

$$\lambda_i = \lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t p_{ii}(\tau)\,d\tau \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n); \tag{4}$$

2) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое T, что множество $\Sigma_{\varepsilon,\,T}$ тех h, для которых хотя бы при одном τ, $|\tau| > T$, имеет место неравенство

$$\left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau p_{ii}(h+\xi)\,d\xi - \lambda_i\right| \geqslant \varepsilon,$$

имеет относительную меру на прямой

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{2t}\operatorname{mes}\Sigma_{\varepsilon,\,T}\bigcap[-t,\ t]<\varepsilon. \qquad (5)$$

Имеют место следующие теоремы, которые показывают, что, с одной стороны, почти все системы (1) являются абсолютно регулярными, а с другой стороны, эти системы обладают весьма специальными свойствами.

Т е о р е м а 1. *Почти всякая* (*в смысле любой инвариантной меры на* D_A) $\tilde{A}(t)\in R_A$ *такова*, *что система* (2) *абсолютно регулярна*.

Т е о р е м а 2. *Почти всякая* (*в том же смысле*, *что в теореме* 1) *система* (2) *некоторым перроновским преобразованием* $x=U(t)\,u$. *приводится к треугольному виду* (3), *удовлетворяющему условиям* 1), 2) *определения* 1 *и такому*, *что* $\lambda_i\geqslant\lambda_j$ *при* $i\leqslant j$.

У такой системы (2) *существует нормальный базис* (*см*. ([2]), *стр*. 28) *решений*

$$x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t),$$

обладающий свойствами:

1) $$\lim_{|t|\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|x_i(t)\|=\lambda_i\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\,; \qquad (6)$$

2) *Для всякого* $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ *имеем*: *для всякого* $\varepsilon>0$ *найдется такое* T, *что множество* $H_{\varepsilon,\,T}$ *тех* h, *для которых хотя бы при одном* τ, $|\tau|>T$, *хотя бы для одного решения* $x(t)$ *системы* (1), *являющегося линейной комбинацией тех* $x_k(t)$, *для которых* $\lambda_k=\lambda_i$, *имеет место неравенство*

$$\left|\frac{1}{\tau}\ln\frac{\|x(h+\tau)\|}{\|x(h)\|}-\lambda_i\right|\geqslant\varepsilon,$$

имеет относительную меру на прямой

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{2t}\operatorname{mes}H_{\varepsilon,\,T}\bigcap[-t,\ t]<\varepsilon.$$

Доказательство этих теорем я опускаю. С их помощью доказывается

Т е о р е м а 3. *Пусть* $A(t)$ *рекуррентна*. *Пусть вероятный спектр системы* (1) *устойчив*. *Тогда система* (1) *некоторым ляпуновским преобразованием* $x=L(t)\,y$ (*таким*, *что* $\dot{L}(t)$ *равномерно непрерывна на прямой*) *приводится к треугольному виду* (3), *который удовлетворяет условиям*:

а) *если* $\lambda_i=\lambda_j$, *то* $\lambda_k=\lambda_i$ *для всякого* k, *заключенного между* i *и* j ;

б) *для каждых* $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ *либо*

$$\underline{\lambda}_{p_{ii}(t)-p_{jj}(t)}>0,$$

либо

$$\overline{\lambda}_{p_{ii}(t)-p_{jj}(t)}<0,$$

либо

$$\underline{\lambda}_{p_{ii}(t)-p_{jj}(t)}=\overline{\lambda}_{p_{ii}(t)-p_{jj}(t)}=0,$$

где

$$\overline{\lambda}_{p(t)}=\overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}}\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t p(\xi)\,d\xi,$$

$$\underline{\lambda}_{p(t)}=\overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}}\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t p(\xi)\,/\,d\xi$$

(*т. е. система* (1) *удовлетворяет условиям интегральной разделенности — близости* (*см*. ([2]), *дополнение* § 17).

Доказательство я опускаю. (Из теоремы 15.2.1 ([2]) вытекает обратная теорема.)

Пусть фиксировано ляпуновское преобразование $x = L(t)\,y$ ($\dot{L}(t)$ равномерно непрерывна на прямой), приводящее систему (1) к треугольному виду (3), причем выполнены требования а) и б) теоремы 3. Определим на пространстве R_A динамической системы D_A функции $\beta_i(\tilde{A}(t))$ формулой

$$\beta_i(\tilde{A}(t)) = \lim_{k\to\infty} A(t_k + t)) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\lambda_k=\lambda_i} p_{ii}(t_k + t) \qquad (7)$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

($\lim$ в (7) означает не предел, а всякую предельную точку последовательности (в смысле равномерной сходимости на отрезках); таким образом, функции $\beta_i(\tilde{A}(t))$ априори многозначные).

Т е о р е м а 4. *Пусть $A(t)$ удовлетворяет условиям теоремы* 3. *Пусть функции $\beta_i(\tilde{A}(t))$ определены, как указано выше.*

Тогда функции $\beta_i(\tilde{A}(t))$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$) однозначны и непрерывны всюду на R_A.

Рассмотрим теперь важный частный случай.

Т е о р е м а 5. *Пусть вероятный спектр системы* (1) *устойчив и пусть динамическая система D_A — строго эргодическая* (*см.* ([1]), *стр.* 531). *Тогда система* (1) *почти приводима.*

Мы применим теперь полученные результаты к изучению систем (1) с почти периодическими коэффициентами.

Легко доказывается

Л е м м а 1. *Пусть $A(t)$ — почти периодическая по t. Для того чтобы показатели системы* (1) *были устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы показатели всякой системы* (2) ($\tilde{A}(t) \in R_A$) *были устойчивы.*

Из леммы 1, теоремы 5 и теоремы 1 5.2.1 (2) вытекает

Т е о р е м а 6. *Пусть $A(t)$ — почти периодическая по t. Для того чтобы система* (1) *была почти приводима, необходимо и достаточно, чтобы ее показатели были устойчивы.*

Т е о р е м а 7. *Существует не почти приводимая система* (*любого порядка $n \geqslant 2$*) (1) *с почти периодическими коэффициентами.*

Эта система ($n = 2$) строится так: зафиксируем ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ такой, что $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < +\infty$, и последовательность натуральных чисел $m_i > 1$. Положим

$$n_k = \prod_{i=1}^{k} m_i.$$

Положим

$$A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t), \qquad (8)$$

$$A_0(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{при } sn_1 - 1 \leqslant t \leqslant sn_1 \quad (s - \text{любое целое}), \\ \dfrac{\pi}{2}|\sin \pi t| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{при остальных } t, \end{cases} \qquad (9)$$

а при $k \geqslant 1$:

$$
A_k(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}|\sin\pi t|\begin{pmatrix}0 & \alpha_k\\ -\alpha_k & 0\end{pmatrix} & \text{при } sn_k-1\leqslant t\leqslant sn_k \quad (s-\text{любое целое}),\\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \text{при остальных } t.\end{cases} \tag{10}
$$

Легко видеть, что $A(t)$, определенная формулами (8) — (10), почти периодическая. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ и числа m_i могут быть выбраны так, что получающаяся система (1) не почти приводима, но доказательство возможности такого выбора не может быть здесь объяснено за недостатком места.

Замечание. Почти приводимые системы с почти периодическими коэффициентами изучены Б. Ф. Быловым (см. ([3])), который получил для таких систем обобщение теоремы Флоке — Ляпунова. Заметим также, что этот результат Б. Ф. Былова может быть выведен из теоремы 4. (Б. Ф. Быловым разобран случай некратных характеристических показателей.)

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 29IX 1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Б. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М.— Л., 1949. [2] Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, Теория показателей Ляпунова, «Наука», 1966. [3] Б. Ф. Былов, Матем. сборн., 66 (108), 2, 215 (1965). [4] В. М. Миллионщиков, Матем. сборн., 75 (117), № 1, 154 (1968). [5] В. М. Миллионщиков, ДАН, 179, № 1 (1968). [6] В. М. Миллионщиков, Матем. заметки, 2, в. 3, 315 (1967). [7] В. М. Миллионщиков, Дифференциальн. уравн., 3, № 12, 2127 (1967).