ТИПИЧНОЕ СВОЙСТВО ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Миллионщиков В.М.
Московский государственный университет

Пусть f^t - динамическая система на полном метрическом пространстве $\mathfrak{B}$. Множество S непрерывных ограниченных отображений $A(\bullet):\mathfrak{B}\to End\mathbb{R}^n$ наделяется топологией равномерной сходимости.

ТЕОРЕМА. Для типичной точки (A,x) пространства $S\times\mathfrak{B}$ из существования k-мерного экспоненциально устойчивого многообразия системы $\dot{\mathfrak{x}}=A\left(f^t x\right)\mathfrak{x}$ следует существование проходящего через нуль k -мерного экспоненциально устойчивого многообразия системы $\dot{\mathfrak{x}}=A\left(f^t x\right)\mathfrak{x}+g(t,\mathfrak{x})$ для всякой непрерывной, гладкой по $\mathfrak{x}$ функции $g(t,\mathfrak{x})$ с достаточно малым $\overline{\lim\limits_{\mathfrak{x}\to 0}}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+}\left(\left|g(t,\mathfrak{x})\right|\cdot\left|\mathfrak{x}\right|^{-4}\right)$

Поясним содержание сформулированной теоремы.

1. Через $End\mathbb{R}^n$ обозначается множество всех линейных отображений $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, наделенное топологией, порожденное нормой $\|A\|=\sup\limits_{|\mathfrak{x}|=1}|A\mathfrak{x}|$ где $|\bullet|$ - любая норма на $\mathbb{R}^n$.

2. Под динамической системой f^t на метрическом пространстве $\mathfrak{B}$ понимается непрерывное действие группы $\mathbb{R}$ на $\mathfrak{B}$, т. е. семейство отображений $f^t:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}(t\in\mathbb{R})$, удовлетворяющее совокупности двух условий: а) $f^t f^\tau = f^{t+\tau}$ для всяких $t\in\mathbb{R},\tau\in\mathbb{R}$; б) отображение $\mathbb{R}\times\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$ определенное формулой $(t,x)\to f^t x$, непрерывно. Это определение динамической системы, данное А. А. Марковым, полонено в основу изложения в двух последних главах книги В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [1].

3. Линейные системы вида $\dot{\mathfrak{x}}=A\left(f^t x\right)\mathfrak{x}$, где - f^t динамическая система на пространстве $\mathfrak{B}$, естественно, возникают как системы уравнений в вариациях нелинейных автономных систем дифференциальных уравнений. Например, если $\mathfrak{B}$ - n-мерное векторное пространство, а f^t - поток, порожденный гладким векторным полем F на $\mathfrak{B}$, то система уравнений в вариациях этого потока вдоль траектории, выходящей из точки x, имеет вид $\dot{\mathfrak{x}}=A\left(f^t x\right)\mathfrak{x}$, где $A=F'_x$.

Чтобы несколько подробнее пояснить смысл рассмотрения линейных систем вида $\dot{\mathfrak{x}}=A\left(f^t x\right)\mathfrak{x}$, подчеркнем, что задание динамической системы f^t предписывает коэффициентам таких систем тот или иной характер зависимости от t, и напомним о некоторых частных случаях рассматриваемой конструкции.

<u>Линейные системы с постоянным коэффициентами</u>. Этот класс систем получается в случае, если пространство $\mathfrak{B}$ состоит из одной точки x; действие f^t группы $\mathbb{R}$ на $\mathfrak{B}$ в этом случае тривиально: все преобразования оставляют точку x на месте.

<u>Линейные системы с переодическими коэффициентами</u>. Этот класс систем также содержится в рассматриваемой конструкции. Он возникает в случае, когда пространство $\mathfrak{B}$ есть окружность, а действие группы $\mathbb{R}$ состоит во вращении окружности: преобразование f^t поворачивает окружность на угол t.

Линейные системы с квазипериодическими коэффициентами с заданным модулем частот. Этот класс систем соответствует в рассматриваемой конструкции случаю, когда пространство $\mathfrak{B}$ есть q-мерный тор T^q, а действие группы R на нем - обмотка тора. T^q - задается формулой $f^t(x_1,\ldots,x_q)=(x_1+\mu_1 t,\ldots,x_q+\mu_q t)$, где $(x_1,\ldots,x_q)(\mathrm{mod}1)$ - циклические координаты точки x тора T^q, а $\mu_1,\ldots,\mu_q$ - фиксированные числа (порожденный этими числами модуль над кольцом Z называется модулем частот). Наряду с термином "квазипериодические" используется в качестве его синонима термин "условно периодические". Иногда квазипериодические коэффициенты с модулем частот, имеющим q образующих, называются q –периодические.

Линейные системы с почти периодическими коэффициентами. В рассматриваемой конструкции эти системы получается так. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество почти периодических функций $\varphi(\cdot):R\to R$, наделенное метрикой равномерной сходимости на R. Группа R действует на этом пространстве сдвигами аргумента: $f^t\varphi(\cdot)=\varphi(t+(\cdot))$.

Не менее, а в некоторых отношениях - гораздо более, интересны другие классы линейных систем, чрезвычайно разнообразные в соответствии с разнообразием динамических систем f^t. Траектории такой системы, а вместе с ними и коэффициенты системы $\dot{\mathfrak{x}}=A(f^t x)\mathfrak{x}$, могут быть рекуррентными, устойчивыми по Пуассону (до сих пор мы называли классы систем в порядке их расширения), устойчивыми по Лагранжу, блуждающими, уходящими (все эти термины объяснены в главе 5 книги [1]). Но наибольшее разнообразие ситуаций возникает при рассмотрении не отдельных траекторий динамической системы f^t, а системы f^t в целом. Соответственно и свойства линейных систем $\dot{\mathfrak{x}}=A(f^t x)\mathfrak{x}$ оказываются наиболее разнообразными при рассмотрении различных $x\in\mathfrak{B}$ и $A\in S$.

4. Первые два из названных в предыдущем пункте классов систем - линейные системы с постоянными коэффициентами и линейные системы с периодическими коэффициентами хорошо изучены. По отношению к сформулированной теореме эти два частных случая стоят несколько особняком. Хотя теорема охватывает их, она не расширяет, а сужает в этих случаях имеющуюся в нашем распоряжении информацию об условной экспоненциальной устойчивости. В самом деле, в этих двух случаях слово "типичной" в формулировке теоремы можно заменить словом "всякой", и теорема останется верной. Она превратится в результате такой замены в классическую теорему Ляпунова: в теорему [2, п. 24] в случае систем с постоянными коэффициентами или в теорему [2, п. 55] - в случае систем с периодическими коэффициентами.

5. Содержательность сформулированной теоремы проявляется при выходе за пределы класса систем с постоянными или периодическими коэффициентами. То обстоятельство, что в общем случае в этой теореме нельзя заменить слово "типичной" словом "всякой", стало известно задолго до появления самой теоремы. Вероятно, это было известно уже А.М.Ляпунову - судя по тому, что желая распространить цитированные выше теоремы о системах с постоянными и периодическими коэффициентами на системы с произвольным характером зависимости коэффициентов от t, А.М.Ляпунов накладывал условие на линейную систему, названное им правильностью системы - см. [2, п.п. 9, 13]. Первый пример, из которого вытекает, что в сформулированной теореме нельзя, вообще говоря, заменить слово "типичной" словом "всякой", был построен О.Перроном [3]; пример Перрона воспроизведен в книгах [1, с. 199], [4, п. 9 главы 4]. Кроме того, О.Перрон нашел условие на линейную систему, существенно отличное от найденного А.М.Ляпуновым условия правильности, достаточное для справедливости обобщения цитированных теорем Ляпунова об условной устойчивости - см. [5]. Эта теорема Перрона воспроизведена вместе с доказательством на с. 193-198 книги [l] . В книге [6] условие Перрона расширено. Основным инструментом для этого расширения послужили центральные показатели - см. [6, §§ 7, 8, 13, 15].

Во всех работах, цитированных в этом пункте, основным инструментом являются введенные в [2] показатели Ляпунова. Показатели Ляпунова являются основным инструментом и в доказательстве теоремы, сформулированной в начале доклада. Различные вопросы теории показателей Ляпунова изложены в § 3 главы 3 книги [1], в монографии [6], в небольшом обзоре [7] и в исчерпывающем обзоре Н.А.Изобова [8].

6. Осталось пояснить, в каком смысле понимаются в сформулированной теореме слова "для типичной точки". Здесь этот термин понимается в смысле категорий Бэра: когда говорят, что для типичной точки топологического пространства верно некоторое утверждение, то под этим подразумевают, что указанное утверждение верно для всякой точки из некоторого множества, являющегося всюду плотным пересечением счетной совокупности открытых множеств. О типичных свойствах и вообще о теории Р.Бэра можно прочесть в книгах [9], [10], [11]. Применение теории Бэра в динамике берет начало с теоремы Пуанкаре о возвращении [12, гл. 26], точнее, с той ее части, где речь идет о множестве второй категории; другая часть теоремы Пуанкаре о возвращении - та, где говорится о множестве полной инвариантной меры, послужила началом эргодической теории. Теорема Пуанкаре о возвращении воспроизведена в книгах [I, § 3 главы 6] и [II, глава 17].

Литература

1. Немыцкий В.Б., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. - М.: ГТТИ, 1949. - 550 с.
2. Ляпунов А.М. Собрание сочинений. Т. 2. - Л. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. - 472 с.
3. Perron O. Uber Stabilitдt und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen // Math. Zeitschrift. - 1928. - B. 29. - S. 129-160.
4. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. - М.: ИЛ, 1954. - 216 с.
5. Perron O. Uber lineare Differentialgleiehungen, bei denen die unabhдngige Variable reel ist // J. d. reine und angewandte Math. - 1951. - B. 142. - S. 254- 270.
6. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. - М.: Наука, 1966. - 576 с.
7. Миллионщиков В.М. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // В книге:"Международный конгресс математиков в Ницце. 1970". - М.: Наука. - 1972. - С. 207-211.
8. Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // В книге: Итоги науки и техники. Мат. анализ. Т. 12. - М.: Изд-во ВИНИТИ, 1974. - С. 71-146.
9. Бэр Р. Теория разрывных функций. - М. - Л.: ГТТИ, 1932. - 136 с.
10. Хаусдорф Ф. Теория множеств. - М. - Л.: ОНТИ, 1937. – 304 с.
11. Окстоби Дж. Мера и категория. - М.: Мир, 1974. - 160 с.
12. Пуанкаре А. Избранные труды. - Т. 2. - М.: Наука, 1972.- 1000 с.