МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 4, № 4 (1968), 483—489

УДК 517.9

В. М. Миллионщиков, **К теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Диссертация защищена 24 мая 1968 г. на заседании Совета механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Официальные оппоненты: доктор физ.-матем. наук Д. В. Аносов, доктор физ.-матем. наук профессор Р. Э. Виноград, доктор физ.-матем. наук профессор Я. Г. Синай.

I

Итоги развития классической теории линейных систем дифференциальных уравнений, во многом обязанного трудам А. М. Ляпунова, подведены в монографиях **[1]** и [3]. В этой теории оставалось несколько волнующих вопросов, весьма просто формулируемых, которые, несмотря на приложенные усилия ряда математиков, работавших в этой области, не удавалось решить. Вот вопросы, которые решены в настоящей диссертации:

1) достижимы ли центральные показатели?

2) как устроены решения систем с почти периодическими коэффициентами?

3) все ли системы с почти периодическими коэффициентами: а) правильные? б) почти приводимые?

II

1. Центральные показатели Ω и ω линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

($x \in E^{n},$ $\|A(t)\| \leq a,$ $A(t)$ — кусочно-непрерывна при $t \geq t_0$), введенные Р. Э. Виноградом (см. [8], **[1]** глава **III,** §§ 8, 13), служат для оценки сверху и снизу всех характеристических показателей систем $\dot{y} = A(t)y + \varphi(y,t),$ где $\|\varphi(y,t)\| \leqslant \delta\|y\|$ при малом $\delta.$ А именно, имеет место теорема 13.2.1 из 11], стр. 164.

С другой стороны, Р. Э. Виноград высказал предположение, что эти оценки неулучшаемы ([1], стр. 164), и доказал, что это действительно так, в частном случае, когда система (1) диагональная ([1], стр. 163—186, теоремы 13.3.1 и 13.3.3).

В § 1 главы I настоящей диссертации доказывается неулучшаемость этих оценок для произвольной системы (1). Точнее, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Центральные показатели достижимы, т. е. для всякого* $\varepsilon > 0$ *существуют кусочно-непрерывные матричные функции*

$$B_\varepsilon(t) \text{ и } C_\varepsilon(t), \ \|B_\varepsilon(t)\| < \varepsilon, \ \|C_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$$

такие, что у системы

$$\dot{y} = A(t)y + B_\varepsilon(t)y$$

найдется решение с характеристическим показателем $> \Omega - \varepsilon,$ *а у системы*

$$\dot{y} = A(t)y + C_\varepsilon(t)y$$

найдется решение с характеристическим показателем $< \omega + \varepsilon.$

2. В § 2 главы I доказана

ТЕОРЕМА 2. *При любом* $n > 1$ *существует почти периодическая* $A(t)$ *такая, что система* (1) *не почти приводимая.*

(Понятие почти приводимости относится к числу важнейших в этой области; оно принадлежит Б. Ф. Былову и изложено в [1], § 21.)

3. В § 4 главы IV доказана

ТЕОРЕМА 3. *При любом* $n > 1$ *существует почти периодическая* $A(t)$ *такая, что система* (1) *неправильная.*

(Понятие правильной системы широко известно. Оно принадлежит А. М. Ляпунову и изучалось О. Перроном, К. П. Персидским, Р. Э. Виноградом, Д. М. Гробманом (см. [5],

[1]). Приведенная теорема является решением сравнительно старой проблемы. Эта проблема приведена в [3], но была сформулирована Н. II. Еругиным значительно раньше.)

4. В § 1 главы IV полностью изучена структура решений системы (1) с почти периодическими коэффициентами в случае $n = 2$.

III

В § 3 главы IV доказана следующая

Т Е О Р Е М А 4. *Для того чтобы система* (1) *с почти периодической* $A(t)$ *была почти приводима, необходимо и достаточно, чтобы ее характеристические показатели были устойчивы (т. е. мало менялись при добавлении к* $A(t)$ *матрицы* $B(t)$ *с малой* $\sup\limits_t \|B(t)\|$).

Такая связь между этими двумя свойствами, насколько мне известно, никем раньше не предполагалась. Кроме того, доказательство этой теоремы получено с помощью привлечения методов, ранее не привлекавшихся к этой области. Для этого пришлось развить технику метрического (вероятностного) изучения линейных систем; при этом получились результаты, представляющие самостоятельный интерес. В следующем пункте я привожу эти результаты.

IV

Пусть матрица $A(t)$ в системе (1) ограничена и равномерно непрерывна на всей прямой. Рассмотрим динамическую систему D_A, определенную следующим образом (см. [5], стр. 534).

Пространство R_A системы D_A состоит из функций

$$\tilde{A}(t) = \lim_{k\to\infty} A(9t_k + t)$$

(предел равномерный на отрезках); оно метризуемо и компактно (см. [5], стр. 533—535). Динамическая система на R_A задается формулой

$$f(\tilde{A}(t), \tau) = \tilde{A}(t+\tau).$$

По теореме Крылова-Боголюбова (см. [5], гл. VI) на системе существуют нормированные инвариантные меры.

О п р е д е л е н и е 1. Число λ назовем *вероятным показателем системы* (1), если почти все

$$\tilde{A}(t) \in R_A$$

(в смысле некоторой инвариантной меры на D_A) таковы, что система

$$\dot{x} = \tilde{A}(t)x$$

имеет λ одним из своих характеристических показателей. Совокупность всех вероятных показателей системы (1) обозначим $\Lambda_p(A)$ и назовем вероятным спектром системы (1).

Имеет место следующая (изложенная в § 3 главы II)

Т Е О Р Е М А 5. *Для всякого обобщенного решения*

$$\tilde{x}(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(t_k + t)$$

системы (1) (см. [15]) (*здесь* $x_k(t)$ — *обычные решения системы* (1); *предел равномерный на отрезках) максимальный и минимальный показатели* (см. [16]), *т. е.*

$$\overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}} \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{\|\tilde{x}(t)\|}{\tilde{x}(\tau)},$$

$$\lim_{t-\tau\to+\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{\|\tilde{x}(t)\|}{\|\tilde{x}(\tau)\|}$$

принадлежат $\Lambda_p(A)$ *Особые показатели* Ω^0 *и* ω^0 *системы* (1) (см., например, [1]) *также принадлежат* $\Lambda_p(A)$.

(Понятие Ω^0 принадлежит К. П. Персидскому и широко известно.)

Определение 2. Скажем, что *вероятный спектр системы* (1) *устойчив,* если для почти всякой

$$\tilde{A}(t) \in R_A$$

(в смысле любой инвариантной меры на D_A) характеристические показатели системы

$$\dot{x} = \tilde{A}(t)x$$

устойчивы (т. е. мало меняются при прибавлении к $\tilde{A}(t)$ матрицы $B(t)$ с малой $\sup\limits_t \|B(t)\|$).

Для систем с рекуррентной матрицей коэффициентов ($A(t)$ я называю *рекуррентной,* если в системе D_A каждая траектория всюду плотна) в главе III получена

ТЕОРЕМА 6. *Для того чтобы вероятный спектр системы* (1) *с рекуррентной матрицей* $A(t)$ *был устойчив, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было ляпуновским преобразованием привести к треугольному виду*

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= p_{11}u_1 + p_{12}u_2 + \ldots + p_{1n}u_n,\\
\dot{u}_2 &= \qquad\quad\; p_{22}u_2 + \ldots + p_{2n}u_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{u}_n &= \qquad\qquad\qquad\quad \ldots + p_{nn}u_n,
\end{aligned}$$

такому, что для всяких $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
&\textit{либо}\quad \overline{\lambda}_{pii-pjj} < 0,\\
&\textit{либо}\quad \underline{\lambda}_{pii-pjj} > 0,\\
&\textit{либо}\quad \overline{\lambda}_{pii-pjj} = \underline{\lambda}_{pii-pjj} = 0;
\end{aligned}$$

здесь обозначено

$$\overline{\lambda}_p = \overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}} \frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t p(\xi)d\xi,$$

$$\underline{\lambda}_p = \underline{\lim}_{t-\tau\to+\infty} \frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t p(\xi)d\xi.$$

С помощью теорем 5 и 6 в главе IV доказана

ТЕОРЕМА 7. *Пусть динамическая система* D_A —

строго эргодическая (см. [5], глава VI). *Для того чтобы вероятный спектр системы* (1) *был устойчив, необходимо и достаточно, чтобы система* (1) *была почти приводима.*

В доказательстве теоремы 6 полезную роль играет следующая теорема, представляющая самостоятельный интерес (изложена в § 6 главы 2).

ТЕОРЕМА 8. *Почти всякая (в смысле любой инвариантной меры на* D_A*)* $\tilde{A}(t) \in R_A$ *такова, что у системы*

$$\dot{x} = \tilde{A}(t)x$$

существует нормальный базис решений

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t),$$

обладающий свойствами:

1) $\lim\limits_{|t|\to\infty} \frac{1}{t}\ln\|x_j(t)\| = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$

2) *для всякого* $i = 1, 2, \ldots, n;$ *имеем: для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $T,$ *что множество* $H_{\varepsilon,T}$ *тех* $h,$ *для которых хотя бы для одного решения* $x(t)$ *системы*

$$\dot{x} = \tilde{A}(t)x,$$

являющегося линейной комбинацией тех $x_k(t)$, *для которых* $\lambda_k = \lambda_i$, *имеет место неравенство*

$$\left| \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|x(h+\tau)\|}{\|x(h)\|} - \lambda_i \right| \geq \varepsilon,$$

имеет относительную меру на прямой

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{2t} mes H_{\varepsilon, T} \bigcap [-t, t] < \varepsilon.$$

Системы, имеющие нормальный базис решений с такими свойствами, я называю *абсолютно регулярными.* В § 5 главы 3 построен пример абсолютно регулярной системы с неустойчивыми характеристическими показателями.

По-видимому, стоит упомянуть и такой факт (изложен в § 4 главы 2):

ТЕОРЕМА 9. *Для почти всякой (в смысле любой инвариантной меры на* D_A)

$$\tilde{A}(t) \in R_A$$

верхний (нижний) центральный показатель системы \

$$\dot{x} = \tilde{A}(t)x$$

совпадает с ее наибольшим (соответственно наименьшим) показателем.

Доказательство теорем 8 и 9 можно существенно сократить, если использовать результаты В. И. Оселедца [26] (работа В. И. Оселедца стала мне известна лишь после написания моей диссертации). Кроме того, и главе II имеются пересечения с главой III диссертации [26], точно указанные в специально написанном мной примечании к главе П.

Результаты диссертации опубликованы в [17—21], [23-24].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

4] Былов В. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М,, Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова, М., 1966.

[2] Бор Г., Почти периодические функции, М.— Л., 1934.

[3] Еругин Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Минск, 1963.

[4] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953.

[5] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., 1949.

[С] Былов Б. Ф., О структуре решений систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами, Матем. сб., **66,** № 2 (1965), 215—229.

[7] Виноград Р. Э., Отрицательное решение вопроса об устойчивости характеристических показателей правильных систем, Прикл. матом, и мех., 17, № 6 (1953), 645—650.

[8] Виноград Р. Э., О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений, Матем. сб., 42, № 2 (1957), 207—222.

[9] Гельман А. Е., О производимости одного класса систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, Докл. АН СССР, 116, № 4 (1957), 535—537.

[10] Гельман А. Е., О приводимости систем с квазипериодической матрицей, Дифф. уравнения, 1, № 3 (1965), 283—294.

[11] Адрианова Л. Я., О приводимости систем n линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, Вестник Ленингр. ун-та, № 7. Сер. матем., мех. и астр., вып. 2 (1962), 14—24.

[12] Е р у г и н Н. П.. Приводимые системы, Труды Матем. ин-та АН СССР, 13 (1946).

[13] L i l l o J. С, Approximate similarity and almost periodic matrices, Proc. Amer. Math. Soc, 12, № 1 (1961), 400—407.

[14] P e r r o n О., Die Ordnungszahlen linearer Differentialglei-chungssysteme, Math. Z., 31, *№*. 5 (1930), 748—766.

[15] М и л л и о н щ и к о в В. М., Рекуррентные и почти периодические предельные траектории неавтономных систем дифференциальных уравнений, Докл. АН СССР, **161,** № 1 (1965), 43-44.

[16] М и л л и о н щ и к о в В. М., Структуры фундаментальных матриц Д-оистем с почти периодическими коэффициентами, Докл. АН СССР, **171,** № 2 (1966), 288-291.

[17] М и л л и о н щ и к о в В. М., О неустойчивости характеристических показателей статистически правильных систем, Матем. заметки, 2, Л» 3 (1967), 315—318.

[18] М и л л и о н щ и к о в В. М., О связи между устойчивостью характеристических показателей и почти приводимостью систем с почти периодическими коэффициентами, Дифф. уравнения, 3, № 12 (1967), 2127—2134.

[19] Миллионщиков В. М-, Статистически правильные системы, Матем. сб., 75, № 1 (1968), 140—151.

[20] М и л л и о н щ и к о в В. М., Метрическая теория линейных систем дифференциальных уравнений, Докл. АН СССР, 179, № 1 (1968), 20-23.

[21]М и л л и о н щ и к о в В. М., Критерий устойчивости вероятного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и критерий почти приводимости систем с почти периодическими коэффициентами, Докл. АН СССР, **179,** № 3 (1968).

[22] М и л л и о н щ и к о в В. М., К спектральной теории неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений, Труды Моск. матем. об-ва, 18 (1968), 146—186.

[23] М и л л и о н щ и к о в В. М., Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем дифференциальных уравнений, Успехи **матем.** наук, 23, № 1 (1968) (тезисы), 213.

[24] М и л л и о н щ и к о в В. М., Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами, Дифф. уравнения, 4, № 3 (1968), 391—396.

[25] В. А. Х а р а с а х а л, Об одном методе исследования линейных систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, Докл. АН СССР, 139, № 2 (1961), 313-315.

[26] О с е л е д е ц В. И., Кандидатская диссертация, МГУ, 1967.