ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЮЛЬ 1969 г., ТОМ V, № 7

УДК517.941.92

СИСТЕМЫ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ РАЗДЕЛЕННОСТЬЮ ВСЮДУ ПЛОТНЫ В МНОЖЕСТВЕ ВСЕХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

Формулировка результата настоящей работы опубликована в [9]. Рассмотрим системы

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

($x \in E_n$, $A(t)$ $\left(\|A(t)\| \leqslant a\right)$ кусочно-непрерывна на прямой). Систему (1) будем называть системой с интегральной разделенностью, если она имеет решения $x_1(t), ..., x_n(t)$, для которых

$$\frac{\|x_{i+1}(t)\|}{\|x_{i+1}(\tau)\|} : \frac{\|x_i(t)\|}{\|x_i(\tau)\|} \geqslant de^{a(t-\tau)} (t \geqslant \tau)$$

для некоторых $d > 0$, $a > 0$ и всех $i = 1,\ 2,\ ...,\ n-1$. Истоком этого определения является исследование Перрона (см. [3], стр. 193, теорема 9), затем эти системы изучались в работах Б. Ф. Былова [5], Р. Э. Винограда [8], Лилло [4] и в работе Б. Ф. Былова [6], в которой оно получило форму, приведенную выше. Кроме того, это определение тесно связано с определением экспоненциальной дихотомии, важное использование и история которого имеется в книге Д. В. Аносова [1].

Множество систем (1) с действительными (соответственно с комплексными) $A(t)$ превратим в метрическое пространство M_r (соответственно M_c), введя расстояние

$$\rho(A(t), B(t)) = \sup_t \|A(t) - B(t)\|.$$

В цитированных работах (см. также [10]) выяснено, что системы с интегральной разделенностью обладают «весьма хорошими» свойствами, а в теореме Перрона—Былова—Винограда (см. [2], теорема 15.2.1) содержится (хотя и не сформулировано явно) утверждение: множество систем с интегральной разделенностью открыто в M_r (M_c) (впрочем, это утверждение явно сформулировано в [7]).

Тем более интересен тот факт, что справедлива следующая

Теорема. *В M_r (M_c) всюду плотны системы с интегральной разделенностью, принадлежащие M_r (соответственно M_c).*

Доказательство (одно и то же для M_r и для M_c). Пусть дана произвольная система (1). Пусть дано $\varepsilon > 0$.

I. Построим возмущенную систему

$$\dot{y} = \left[A(t) + B_\varepsilon(t)\right] y \tag{2}$$

с $\sup_t \|B_\varepsilon(t)\| \leqslant 4\varepsilon(a+1)$ следующим образом.

Пусть $X(t,\tau)$ — матрица Коши системы (1). Фиксируем $T > 1$ такое, что

$$(1-3\varepsilon)^3(\varepsilon - e^{-\varepsilon T}) \geqslant e^{-\varepsilon T}. \tag{3}$$

Обозначим $x_i (\|x_i\| = 1)$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ ...)$ вектор, для которого

$$N_i = \left\|X\left((i-1)T, iT\right)\right\| = \left\|X\left((i+1)T, iT\right)x_i\right\|. \tag{4}$$

Зададим возмущение $B_\varepsilon(t)$ на полуинтервале $[iT, (i+1)T]$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ ...)$ так:

$$B_\varepsilon(t) = L_i(t)A(t)L_i^{-1}(t) + \dot{L}_i(t)L_i^{-1}(t) - A(t), \tag{5}$$

где $L_i(t)$ — матрица, задающая преобразование

$$y = L_i(t)x = x + \varepsilon \frac{t-iT}{T}(x, z_{i+1})x_{i+1}, \tag{6}$$

где $z_i = \dfrac{1}{\|u_i\|}u_i$ ($z_i = 0$, если $u_i = 0$), а u_i в свою очередь определены индуктивно: u_0 равно чему угодно; пусть $u_i (i \leqslant k)$ определены; тогда $u_{k+1} = X\left((k+1)T, kT\right) y_0(kT)$ ($y_0(t)$ обозначает решение системы (2), (5) такое, что $y_0(0) = x_0(0)$), если

$$\frac{N_{k+1}}{S_{k+1}} \geqslant e^{\varepsilon T}, \tag{7}$$

где

$$S_k = \frac{\left\| X\left((k+1)T, (k-1)T\right) y_0\left((k-1)T\right)\right\|}{\left\| X\left(kT, (k-1)T\right) y_0\left((k-1)T\right)\right\|}, \tag{8}$$

если же (7) не выполнено, то $u_{k+1} = 0$. Из (5) следует, что если $x(t)$ — решение системы (1) при $iT \leqslant t < (i+1)T$, то $y(t) = L_i(t)x(t)$ — решение системы (2), (5) при тех же t.

Из (6) следует

$$\|L_i(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{T}, \|L_i(t) - I\| \leqslant \varepsilon, \tag{9}$$

откуда при малом ε

$$\left\|L_i^{-1}(t) - I\right\| \leqslant 2\varepsilon. \tag{10}$$

Из (5), (9), (10) имеем при малом ε :

$$\left\|B_\varepsilon(t)\right\| \leqslant 4\varepsilon(a+1), \tag{11}$$

$$1 - 3\varepsilon \leqslant \left\|L_i(t)\right\| \cdot \left\|L_i^{-1}(\tau)\right\| \leqslant 1 + 4\varepsilon. \tag{12}$$

Если $z_i = 0$ то, используя (12), (8), (4), (3), получаем

$$\begin{aligned}\frac{\left\|y_0\left((i+1)T\right)\right\|}{\left\|y_0\left(iT\right)\right\|} &\geqslant (1-3\varepsilon)S_i > (1-3\varepsilon)N_i e^{-\varepsilon T} \geqslant \\ &\geqslant (1-3\varepsilon)^2 e^{-\varepsilon T}\left\|Y_\varepsilon\left((i+1)T, iT\right)\right\| \geqslant e^{-2\varepsilon T}\left\|Y_\varepsilon\left((i+1)T, iT\right)\right\|,\end{aligned} \tag{13}$$

где $Y_\varepsilon(t,\tau)$ — матрица Коши системы (2), (5).

Если $z_i \neq 0$, то в силу (10), (6), (4), (8), (12), (7), (3) при малом ε

$$\begin{aligned}\frac{\left\|y_0\left((i+1)T\right)\right\|}{\left\|y_0(iT)\right\|} &\geqslant \frac{1-3\varepsilon}{\left\|y_0(iT)\right\|}\Big\| X\left((i+1)T, iT\right) X\left(iT, (i-1)T\right) \times \\ &\times y_0\left((i-1)T\right) + \varepsilon\left(X(iT, (i-1)T\right) y_0\left((y-1)T), z_i\right) X\left((i+1)T, iT\right) x_i \Big\| \geqslant \\ &\geqslant \frac{1-3\varepsilon}{\left\|y_0(iT)\right\|}\Big(\left\|\varepsilon\left(X\left(iT, (i-1)T\right) y_0\left((i-1)T\right), z_i\right) X\left((i+1)T, iT\right) x_i\right\| - \\ &- \left\| X\left((i+1)T, iT\right) X\left(iT, (i-1)T\right) y_0\left((i-1)T\right)\right\|\Big) \geqslant \\ &\geqslant \frac{1-3\varepsilon}{\left\|y_0(iT)\right\|}\left(N_i\varepsilon - S_i\right)\left\| X\left(iT, (i-1)T\right) y_0\left((i-1)T\right)\right\| \geqslant \\ &\geqslant (1-3\varepsilon)^2 (N_i\varepsilon - N_i e^{-\varepsilon T}) \geqslant e^{-\varepsilon T}\left\|Y_\varepsilon\left((i+1)T, iT\right)\right\|.\end{aligned} \tag{14}$$

II. Приведем построенную систему (2) перроновским преобразованием $x = U(t)u$ (см. [2], стр. 261 —266) к треугольному виду

$$\dot{u} = P^\varepsilon(t)u, \tag{15}$$

взяв за первый вектор при построении этого преобразования решение $y_0(t)$. При этом

$$p_{11}^{(\varepsilon)}(t) = \frac{d}{dt}\ln\left\|y_0(t)\right\| \tag{16}$$

($p_{kk}^{(\varepsilon)}(t)$ — k-й диагональный элемент матрицы $P^{(\varepsilon)}(t)$). Обозначим ε_k — вектор, k-я координата которого равна 1, а остальные 0. Имеем (здесь используется, что $x=U(t)u$ — ортогональное (унитарное) преобразование)

$$\left\|Y_\varepsilon\left((i+1)T,iT\right)\right\| \geqslant \left|\left(Y_\varepsilon\left((i+1)T,iT\right)e_k,e_k\right)\right| = \exp\int_{iT}^{(i+1)T} p_{kk}^{(\varepsilon)}(\tau)d\tau. \tag{17}$$

Возмутим систему (15), прибавив 3ε к $p_{11}^{(\varepsilon)}(t)$ (так как $\|U(t)\|=\|U^{-1}(t)\|=1$, то этому соответствует возмущение системы (2), не превосходящее 3ε (т. е. к $B_\varepsilon(t)$ прибавляется $D_\varepsilon(t)$, $\sup\limits_t\|D_\varepsilon(t)\|\leqslant 3\varepsilon$).

Из (13), (14), (16), (17) вытекает

$$\int_{iT}^{(i+1)T} p_{11}^{(\varepsilon)}(\tau)d\tau + 2\varepsilon T \geqslant \int_{iT}^{(i+1)T} p_{kk}^{(\varepsilon)}(\tau)d\tau$$
$$(k-1,\ 2,\dots,\ n;\ i=0,\ 1,\ 2,\dots),$$

откуда следует, что функция $p_{11}^{(\varepsilon)}(t)+3\varepsilon$ интегрально отделена от функций $p_{kk}^{(\varepsilon)}(t)$ (см. [2], стр. 537—538).

Теперь с системой, получаемой из системы (15) выбрасыванием первого уравнения, оперируем точно так же, как до сих пор с системой (1), а «выброшенное» первое уравнение переписываем без изменения и т. д., проделав эту операцию $n-1$ раз, мы получим треугольную систему

$$\dot u = Q^{(\varepsilon)}(t)u \tag{18}$$

с интегрально разделенной диагональю (см. [2], стр. 539; причем строго разделенной без близости $\overset{(\varepsilon)}{q_{ii}} = q_{jj}$), расстояние которой от исходной $\leqslant 4(n-1)\times(a+1)\varepsilon$, т. е. сколь угодно мало.

Учитывая тот факт, что множество систем с интегральной разделенностью открыто в M_r (M_c), получаем, что (18) — система с интегральной разделенностью (чтобы в этом убедиться, применяем к системе (18) (β -преобразование Ляпунова (см. [2], стр. 248)).

Заметим теперь, что если в пункте I строить возмущение, начиная не от нуля, а от —iT (i — натуральное), то получим вместо $y_0(t)$ решение возмущенной системы $y_i(t)$; перейдя к пределу по некоторой последовательности $i_k (k=1,2,\dots)$, мы получим возмущенную систему (2), имеющую решение $y_\infty(t)$, удовлетворяющее (13), (14) (вместо $y_0(t)$ для) любого целого i.

Дальше продолжаем рассуждения так же, как в пункте II. Теорема доказана.

Литература

1. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XC. М, «Наука», 1967.
2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М., «Наука», 1966.
3. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., ГТТИ, 1949.
4. Lillo J. C. Acta Math., 103, 1960, 123—128.
5. Былов Б. Ф. Кандидатская диссертация. МГУ, 1954.
6. Былов Б. Ф. Матем. сб., 67, (109) : 3, 1965, стр. 338—344.
7. Былов Б. Ф. Докторская диссертация. Минск, 1966.
8. Виноград Р. Э. ДАН СССР, 119, № 4, 633—635, 1958.
9. Миллионщиков В. М. УМН, т. XXIII, вып. 2, стр. 207 (резюме), 1968.
10. Миллионщиков В. М. Матем. заметки, 4, № 2, 173—180, 1968.

Поступила в редакцию
28 июня 1968 г.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова