УДК 517.926.4

ГРУБЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

В настоящей работе рассматриваются линейные системы

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

(x — n-мерный вектор, $A(t)$ непрерывна и ограничена при $t \geqslant 0$ или на прямой). Напомню, что характеристические показатели системы (1) (см. [1, 2]) называются устойчивыми, если они мало меняются при прибавлении к $A(t)$ матрицы $C_\varepsilon(t)$ с малой $\sup\limits_t \| C_\varepsilon(t) \|$

Лемма. *Для того чтобы характеристические показатели системы (1) были устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы система (1) ($t \geqslant 0$) некоторым ляпуновским преобразованием $x = L(t)$ и приводилась к клеточно-диагональному виду*

$$\dot{u}_i = B_i(t)u_i$$

($i = 1, 2, ...m$; u_i — вектор размерности s_i, $\sum\limits_{i=1}^{m} S_i = n$), *причем 1) клетки «интегрально разделены», т. е. существуют константы* $d>0$, $a>0$, *такие, что*

$$| U_i^{-1}(t,\tau) \|^{-1} \geqslant de^{a(t-\tau)} \| U_{i+1}(t,\tau) \|,$$
$$t \geqslant \tau; i = 1, 2, ..., m-1$$

где $U_i(t,\tau)$ — *матрица Коши системы* $\dot{u}_i = B_i(t)u_i$; *2) у каждой системы* $\dot{u}_i = B_i(t)u_i$ *верхний* [2] Ω_i, *и нижний* [11] ω_i *центральные показатели совпадают:* $\Omega_i = \omega_i$.

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы Перрона — Былова — Винограда (см. [2], теорема 15.2.1). Докажем необходимость.

Пусть характеристические показатели системы (1) устойчивы. Пусть λ — один из них, а μ — наименьший из показателей, бóльших λ. Пусть L — линейное подпространство всех решений с характеристическими показателями $\leqslant \lambda$, а M — какое-нибудь его алгебраическое дополнение в пространстве всех решений. Мы докажем, что существуют $d>0$, $a>0$ такие, что

$$\frac{\| x'(t) \|}{\| x'(\tau) \|} : \frac{\| x''(t) \|}{\| x''(\tau) \|} \geqslant de^{a(t-\tau)} \tag{2}$$

для всяких ненулевых $x'(t) \in M, x''(t) \in L$. Пусть это не так. Мы придем к противоречию с условием теоремы, построив для каждого $0<q<1$ и для каждого $\varepsilon>0$ систему

$$\dot{y} = A_\varepsilon(t)y \tag{3}$$

такую, что

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \| A_\varepsilon(t) - A(t) \| \leqslant 2\varepsilon(\sup_t \| A(t) \| + 1) \tag{4}$$

имеющую решение с характеристическим показателем $\in (q\lambda + (1-q)\mu - \varepsilon$, $q\lambda + (1-q)\mu + \varepsilon)$ (отсюда будет следовать неустойчивость характеристических показателей системы (1), так как их конечное число, а чисел вида $q\lambda + (1-q)\mu$ ($0<q<1$) бесконечное число).

При этом нам достаточно построить кусочно-непрерывную $A_\varepsilon(t)$, так как в силу леммы Д. М. Гробмана (см. [2], стр. 400, теорема 29.2.1) по ней уже можно построить непрерывную $A_\varepsilon(t)$ с теми же свойствами.

Для построения системы (3) мы воспользуемся следующим приемом (см. [4—6, 10—11]*)). Пусть $x'(t)$, $x''(t)$ — два решения системы (1), и пусть $\measuredangle(x'(t_0), x''(t_0)) \leqslant \varepsilon$ ($\measuredangle(x,y)$ обозначает угол (он по определению $\geqslant 0$) между векторами x, y). Пусть $U_\varepsilon(\tau)$— ортогональное (унитарное) преобразование пространства векторов x в себя, дифференцируемое по τ и обладающее свойствами:

а) $U_\varepsilon(0) = E$;

б) $U_\varepsilon^{-1}(1)x'(t_0)$ коллинеарно $x''(t_0)$;

в) $\| U_\varepsilon(\tau) - E \| \leqslant \varepsilon, \ \| \dot{U}(\tau) \| \leqslant \varepsilon$. (5)

Тогда система

$$\dot{y} = B_\varepsilon(t) y, \tag{6}$$

где

$$B_\varepsilon(t) = \begin{cases} U_\varepsilon^{-1}(t - t_0 + 1) A(t) U_\varepsilon(t - t_0 + 1) - \\ -U_\varepsilon^{-1}(t - t_0 + 1) \dot{U}_\varepsilon(t - t_0 + 1) \text{ при } t_0 - 1 \leqslant t \leqslant t_0, \\ A(t) \text{ при остальных } t, \end{cases} \tag{7}$$

такова, что

$$\sup_t \| B_\varepsilon(t) - A(t) \| \leqslant \varepsilon (2 \sup_t \| A(t) \| + 1) \tag{8}$$

и имеет решение

$$y(t) = \begin{cases} x'(t) \text{ при } t < t_0 - 1, \\ U_\varepsilon^{-1}(t - t_0 + 1) x'(t) \text{ при } t_0 - 1 \leqslant t \leqslant t_0, \\ \dfrac{\| x'(t_0) \|}{\| x''(t_0) \|} \text{ при } t \geqslant t_0, \end{cases} \tag{9}$$

Преобразование $U_\varepsilon(\tau)$ с указанными свойствами легко построить; впрочем, это подробно проделано в [5].

При построении системы (3) я буду для краткости и наглядности пользоваться следующим выражением, смысл которого сейчас точно разъясню.

Пусть $x'(t)$ и $x''(t)$ — два решения системы (1), и пусть угол между векторами $x'(t)$ и $x''(t_0)$ меньше или равен ε. Выражение «перейдем с решения $x'(t)$ на решение $x''(t)$ в момент t_0» будет для нас равносильно следующему: «положим при $t \in [t_0 - 1, t_0)$ $A_\varepsilon(t) = B_\varepsilon(t)$, где $B_\varepsilon(t)$ определено формулами (5), (7)».

Доказательство неравенства (2) разобьем, на 2 этапа.

1. Вначале докажем, что

$$\inf_{\substack{t \geqslant 0 \\ x'(t) \in M \\ x''(t) \in L}} \measuredangle\left(x'(t), x''(t)\right) > 0 \tag{10}$$

---

*) В [6] формулу (22) следует читать так:

$$de^{\frac{\delta}{2} T_0} \sin^2 \frac{\delta}{2} \geqslant 1, \quad T_0 > 1$$

Пусть (10) нарушено. Тогда найдутся последовательности решений $x_k(t)\in M, \| x_k(0)\|=1$ и чисел $t_k\uparrow +\infty$ (без ограничения общности будем считать, что $\frac{t_{k+1}}{t_k}\uparrow +\infty$ | такие, что

$$\measuredangle\left(x_k(t_k), x_k''(t_k)\right)<\frac{1}{k} \tag{11}$$

(где $x_k''(t_k)$ ($k=1,2,...$) — некоторые решения $\in L$). Имеем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left[\max_{t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k}\frac{1}{t}\ln\| x_k(t)\|\right]\geqslant\mu$$

(иначе для некоторой подпоследовательности k_i мы имели бы $x_{k_i}\underset{i\to\infty}{\to} x(t)\in$ M, причем характеристический показатель решения $x(t)$ был бы меньше μ, что невозможно). Поэтому без ограничения общности (выбросив, если нужно, некоторые t_k) считаем, что

$$\max_{\tau_k\leqslant t\leqslant t_k}\frac{1}{t}\ln\| x_k(t)\|>\mu-\frac{1}{k}, \tag{12}$$

где τ_k — некоторые числа такие, что $\frac{\tau_k}{t_{k-1}}\uparrow +\infty$.

Пусть заданы $\varepsilon>0$ и $q\in(0,1)$.

Будем строить возмущенную систему (3) — (4). Пусть $m>\frac{1}{\varepsilon}$ и столь велико, что

а) при $t\geqslant t_m$ для всякого $x(t)\in L$

$$\frac{1}{t}\ln\frac{\| x(t)\|}{\| x(0)\|}<\lambda+\frac{\varepsilon}{2} \tag{13}$$

б) при $k\geqslant m$

$$\frac{\tau_k}{t_{k-1}}>\frac{4}{\varepsilon}\sup_t\| A(t)\| \tag{14}$$

При $0\leqslant t<t_m-1$ положим $A_\varepsilon(t)=A(t)$. Зафиксируем произвольное решение $x^{(m)}(t)\in L$. Обозначим

$$q(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t}\ln\dfrac{\| x^{(m)}(t)+\beta x_m(t)\|}{\| x^{(m)}(0)+\beta x_m(0)\|} \quad \text{при } 0\leqslant t\leqslant t_m,\\ \dfrac{1}{t}\ln\dfrac{\| x^{(m)}(t)+\beta x_m''(t)\|\bullet\| x^{(m)}(t_m)+\beta x_m(t_m)\|}{\left\| x^{(m)}(t_m)+\beta\dfrac{\| x_m(t_m)\|}{\| x_m''(t_m)\|}x_m''(t_m)\right\|\bullet\| x^{(m)}(0)+\beta x_m(0)\|}\\ \qquad\text{при } t>t_m,\end{cases} \tag{15}$$

и положим

$$f_\tau(\beta)=\max_{0\leqslant t\leqslant\tau}q(t) \tag{16}$$

Так как при $|\beta|$ достаточно большом $f(\beta)>\mu-\varepsilon$ (в силу (12)), а в силу (13) $f(0)<\lambda+\varepsilon$ и так как $f(\beta)$ очевидно непрерывна, то найдется β_m такое, что

$$\operatorname{sgn}\beta_m\operatorname{sgn}\left[\frac{\pi}{2}-\measuredangle\left(x^{(m)}(t_m), x_m(t_m)\right)\right]\geqslant 0 \tag{16}$$

$$f_{t_{m+1}}(\beta_m) \in \left(q\lambda + (1-q)\mu - \varepsilon, q\lambda + (1-q)\mu + \varepsilon\right) \qquad (17)$$

С другой стороны, в силу (13)—(14) для всякого β, в том числе и для $\beta = \beta_m$ при всяком $\tau \geqslant t_{m+1}$ имеем $f_\tau(\beta) < \lambda + \varepsilon$. В момент t_m перейдем с решения $\overline{x_m}(t) = x^{(m)}(t) + \beta_m x_m(t)$ на решение

$$\overset{=}{x}_m(t) = x^{(m)}(t) + \beta_m \frac{\| x_m(t_m) \|}{\| x''_m(t_m) \|} x''_m(t)$$

(напомню, что точный смысл этой фразы разъяснен выше и что угол между этими решениями при $t = t_m$ не превосходит ε в силу (16'), (11) неравенства $\frac{1}{m} < \varepsilon$ и того элементарно-геометрического факта, что диагональ параллелограмма, выходящая из нетупого угла, длиннее каждой из сторон параллелограмма). При $t_m \leqslant t < t_{m+1} - 1$ положим $A_\varepsilon(t) = A(t)$.

Затем аналогично строим $A_\varepsilon(t)$ на $[t_{m+1} - 1, t_{m+3} - 1)$ (только вместо $x^{(m)}(t) \in L$ берем $\overset{=}{x}_m(t)$), затем аналогично на $[t_{m+3} - 1, t_{m+5} - 1)$ и т. д., так что в результате получится система (3) — (4), имеющая решение $y(t)$; $y(0) = x^{(m)}(0)$ такое, что

$$\max_{[t_{m+2S-1}, t_{m+2S+1}]} \frac{1}{t} \ln \frac{\| y(t) \|}{\| y(0) \|} \in \left(q\lambda + (1-q)\mu - \varepsilon, q\lambda + (1-q)\mu + \varepsilon\right)$$

при каждом натуральном s. Полученное противоречие доказывает (10). .

2. Из (10) вытекает (в силу теоремы Б. Ф. Былова, см. [2], теорема 20.3.1), что система (1) ляпуновским преобразованием $x = L(t)z$ приводится к клеточно-диагональному виду

$$\dot{z}_i = C_i(t) z_i \quad (i = 1,2) \qquad (18)$$

(z_i—вектор размерности m_i $(m_1 + m_2 = n)$)

Если (2) не выполнено, то для системы

$$\dot{x} = A^{(\delta)}(t)x, \qquad (19)$$

полученной преобразованием $z = L^{-1}(t)x$ из системы

$$\dot{z}_1 = C_1(t) z_1$$

$$\dot{z}_2 = [C_2(t) + \delta E_2] z_2$$

(E_2 — единичная матрица, $\delta > 0$ зафиксируем столь малым, чтобы $\delta < \mu - \lambda, \delta \sup_t \| L(t) \| \bullet \| L^{-1}(t) \| < \varepsilon$, тогда $\sup_t \| A^{(\delta)}(t) - A(t) \| < \varepsilon$) имеет место следующее: существуют последовательность чисел $\tau_0 < t_0 < ... < \tau_k < t_k < ...$ и последовательность решений $x''_{k,\delta}(t)$ системы (19) с характеристическими показателями $< \lambda + \varepsilon$ такие, что

1) $\frac{t_{k+1}}{t_k} \underset{k\to\infty}{\uparrow} +\infty, \frac{t_k}{t_{k-1}} \underset{k\to\infty}{\uparrow} +\infty, t_k - \tau_k > 1$

2) $e^{\frac{\delta}{2}(t_k - \tau_k)} \varepsilon \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \geqslant 1;$ (20)

3) для всякого решения $x(t) \in M_\delta$ системы (19)

$$\frac{\| x''_{k,\delta}(t_k) \|}{\| x''_{k,\delta}(\tau_k) \|} \geqslant e^{\frac{\delta}{2}(t_k - \tau_k)} \frac{\| x(t_k) \|}{\| x(\tau_k) \|} \qquad (21)$$

Здесь зафиксировано некоторое алгебраическое дополнение M_δ к подпространству решений с характеристическими показателями $< \lambda + \varepsilon$.

Выберем, кроме того, последовательность решений $x_k(t) \in M_\delta$ системы (19) так, чтобы выполнялось (12).

А теперь оперируем системой (19), числами t_k и решениями $x_k(t)$ и $x''_{k,\delta}(t)$ подобно тому, как в пункте 1 системой (1), числами t_k и решениями $x_k(t), x''_k(t)$, с той разницей, что вместо операции ≪ в момент t_m перейдем с решения

$$\overline{x}_m(t) = x^m(t) + \beta_m x_m(t)$$

на решение

$$\overline{\overline{x}}_m(t) = x^{(m)}(t) + \beta_m \frac{\| x_m(t_m) \|}{\| x''_m(t_m) \|} x''_m(t) \quad \gg$$

нужно проделать операцию:

≪ а) в момент τ_m перейдем с решения $\overline{x}_m(t) = x_\delta^{(m)}(t) + \beta_m x_m(t)$ системы (19) [к решению $x_\delta^{(m)}(t)$ этой системы полностью относятся замечания, сделанные в пункте 1 о решении $x^{(m)}(t)$ системы (1)] на решение

$$\overline{\overline{\overline{x}}}_m(t) = \overline{x}_{m,\delta}(t) + \varepsilon \frac{\| \overline{x}_{m,\delta}(\tau_m) \|}{\| x''_{m,\delta}(\tau_m) \|} x''_{m,\delta}(t); \qquad (22)$$

б) при $\tau_m \leqslant t < t_m - 1$ положим возмущение равным нулю;

в) в момент t_m перейдем с решения $\overline{\overline{\overline{x}}}_{m,\delta}(t)$ системы (19) на решение

$$\overline{\overline{x}}_m(t) = \varepsilon \frac{\| \overline{x}_{m,\delta}(\tau_m) \|}{\| x''_{m,\delta}(\tau_m) \|} x''_{m,\delta}(t)$$

(угол между ними в этот момент $< \varepsilon$ в силу (20) — (22)) ≫; только $q(t)$, обозначающее, как и раньше, $\frac{1}{t} \ln \frac{\| y(t) \|}{\| y(0) \|}$ ($y(t)$ — решение возмущенной системы, $y(0) = x_\delta^{(m)}(0)$) задается несколько иной формулой, чем (15).

В результате приходим к такому же противоречию, как в пункте 1.

Итак, (2) доказано. Так как в качестве λ мы взяли любой не максимальный показатель системы, то в силу теоремы Б. Ф. Былова (см. [2], теорема 20.3.1) доказано, что система (1) ляпуновским преобразованием $x = L(t)$ и приводится к клеточно-диагональному виду

$$\dot{u}_i = B_i(t) u_i$$

($i = 1, 2, ..., m$, где m — число различных показателей системы (1),. u_i — вектор размерности $s_i \left(\sum_{i=1}^{m} s_i = n \right)$), обладающему свойством 1 (см. формулировку леммы). Из этого свойства вытекает $\omega_i > \Omega_{i+1} (i = 1, ..., m-1)$ (Ω_i и ω_i — центральные показатели системы $\dot{u}_i = B_i(t) u_i$). Но показатели системы (1) по условию устойчивы, и потому (в силу достижимости центральных показателей, см. [4, 5]) $\Omega_i = \omega_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$. Лемма доказана.

Введем некоторые обозначения. Обозначим через M_n^+ (соответственно M_n) метрическое пространство, точками которого являются системы (1) n-го порядка с непрерывными и ограниченными (при $t \geqslant 0$ соответственно на прямой) $A(t)$, а расстояние определяется формулой

$$\rho\big(A(t),B(t)\big)=\sup_t \| A(t)-B(t)\| \tag{23}$$

(Здесь мы, допуская вольность речи, отождествляем систему $\dot{x}=A(t)x$ с матрицей $A(t)$).

Обозначим через J_n множество систем с интегральной разделенностью (система $\in M_n$ называется системой с интегральной разделенностью (Перрон — Былов), если она имеет фундаментальную систему решений $x_1(t),...,x_n(t)$, для которых

$$\frac{\| x_i(t)\|}{\| x_i(\tau)\|}:\frac{\| x_{i+1}(t)\|}{\| x_{i+1}(\tau)\|}\geqslant de^{a(t-\tau)} \tag{24}$$

для некоторых $a>0,d>0$ и всех $t\geqslant\tau, i=1,2,...,n-1$).

По определению $J_1=M_1, J_n^+=J_n\bigcap M_n^+$

Обозначим через S_n^+ множество систем $\in M_n^+$ с устойчивыми показателями. Очевидно $S_1^+=M_1^+$

В дальнейшем $JntS$ обозначает, как всегда, открытое ядро множества S (т. е. объединение всех открытых множеств, содержащихся в S).

Теорема 1. $J_n^+=JntS_n^+$.

Доказательство. В теореме Перрона — Былова — Винограда (см. [2], теорема 15.2.1) содержатся утверждения: J_n^+ открыто в M_n^+ (это явно сформулировано в [3]), $J_n^+\subseteq S_n^+$ отсюда $J_n^+\subseteq JntS_n^+$. Докажем обратное включение. Пусть система (1) $\in JntS_n^+$. Если теорема неверна, то в силу леммы можно считать, что для этой системы $\Omega=\omega, n\geqslant 2$, Приведем ее перроновским преобразованием $x=U(t)$ и к треугольному виду (см. [2], стр. 261—272)

$$\dot{u}=P(t)u;\quad P(t)=\begin{pmatrix} p_{11}(t)\cdots p_{1n}(t)\\ \quad\ddots\quad\vdots \\ \text{O}\qquad p_{nn}(t)\end{pmatrix} \tag{25}$$

Тогда, очевидно, и система (25) $\in JntS_n^+$, а поэтому существует $\varepsilon_0>0$ такое, что при всяких $\eta_i, |\eta_i|<\varepsilon_0$ система

$$\dot{u}=P_\eta(t)u \tag{26}$$

где

$$P_\eta(t)=P(t)+diag\{\eta_1,...,\eta_n\}$$

принадлежит $JntS_n^+$. Отсюда, как нетрудно видеть, вытекает, что система

$$\begin{aligned}\dot{u}&=p_{11}(t)u_1+p_{12}(t)u_2,\\ \dot{u}_2&=\qquad p_{22}(t)u_2\end{aligned} \tag{27}$$

принадлежит $JntS_2^+$.

Поскольку при построении перроновского преобразования $x=U(t)$ и мы могли взять за первые 2 вектора (см. [2], стр. 261 — 272) любые два решения системы (1), то нам достаточно доказать, что система (27) $\in J_2^+$.

Центральные показатели Ω и ω системы (27) совпадают: $\Omega=\omega$.

Отсюда, как нетрудно видеть, следует, что центральные показатели Ω_ε и ω_ε системы

$$\dot{u}_1=[p_{11}(t)-\varepsilon]u_1+p_{12}(t)u_2$$

$$\dot{u}_2 = \qquad p_{22}(t)u_2 \tag{28}$$

уже не равны между собой и что при $\varepsilon > 0$

$$\omega_\varepsilon = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t [p_{11}(\tau)-\varepsilon]d\tau\,. \tag{29}$$

Так как при достаточно малом е система (28) $\in S_2^+$, то в силу леммы она $\in J_2^+$. Отсюда вытекает, что

$$\underline{\lambda}_{p_{22}-p_{11}} \geqslant 0 \tag{30}$$

($\underline{\lambda}_p$ обозначает у нас $\underline{\lim}_{t-\tau\to+\infty}\dfrac{1}{t-\tau}\int_\tau^t p(\xi)d\xi$); в самом деле, иначе было бы $\underline{\lambda}_{p_{22}-[p_{11}-\varepsilon]} = a_\varepsilon < 0$ (при малом $\varepsilon > 0$) и поэтому нашелся бы сколь угодно длинный отрезок $[t_1, t_2]$, на котором

$$\int_{t_1}^{t_2}[p_{22}(\xi)-(p_{11}(\xi)-\varepsilon)]d\xi < \frac{a_\varepsilon}{2}\,,$$

и потому на нем всякое решение системы (28) с условием $u_1(t_2)=0$ возрастало бы по крайней мере в $e^{-\frac{a_\varepsilon}{2}(t_2-t_1)}$ раз медленнее, чем всякое решение с условием $u_2 \equiv 0$, имеющее, согласно (29), наименьший показатель, а это противоречило бы тому, что система (28) $\in J_2^+$

Допустим теперь, что $\underline{\lambda}_{p_{11}-p_{22}} < 0$. Тогда, взяв в (28) $\varepsilon < 0$ с достаточно малым $|\varepsilon|$, получим

$$\Omega_\varepsilon = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t [p_{11}(\tau)-\varepsilon]d\tau \tag{31}$$

и $\underline{\lambda}_{[p_{11}-\varepsilon]-p_{22}} = a_\varepsilon < 0$, и тогда найдется сколь угодно длинный отрезок $[t_1, t_2]$, на котором всякое решение системы (28) с условием $u_1(t_1)=0$ возрастает по крайней мере в $e^{-\frac{a_\varepsilon}{2}(t_2-t_1)}$ раз быстрее, чем решение с условием $u_1(0)=1, u_2(0)=0$. Отсюда и из того, что система $\in J_2^+$, вытекает, что решение с условием $u_1(0)=1, u_2(0)=0$ имеет наименьший показатель, тогда как из (31) следует, что оно имеет показатель $\underline{\lambda}_{p_{11}-p_{22}} \geqslant 0 \quad \Omega_\varepsilon$, следовательно, наибольший. Это противоречие доказывает, что
В сочетании с (30) это дает

$$\underline{\lambda}_{p_{11}-p_{22}} = \underline{\lambda}_{p_{22}-p_{11}} = 0 \tag{32}$$

Напомню, что равенства (32) выведены нами из двух предпосылок: 1) система (27) $\in JntS_2^+$ 2) центральные показатели Ω и ω системы (27) совпадают. Возьмем какое-нибудь множество $Q \subset [0,+\infty)$, имеющее относительную меру $\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t} mesQ\bigcap[0,t] = 0$, однако содержащее сколь угодно длинные отрезки, и пусть χ_Q — характеристическая функция этого множества. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ система

$$\dot{u}_1 = [p_{11}(t)+\varepsilon\chi_Q(t)]u_1 + p_{12}(t)u_2$$

$$\dot{u}_2 = \qquad\qquad p_{22}(t)u_2$$

1) $\in JntS_2^+$ 2) имеет те же центральные показатели Ω и ω, что и система (27); следовательно, для нее должны выполняться равенства, аналогичные (32), но из выполнения (32) для системы (27) вытекает

$$\underline{\lambda}_{p_{22}-[p_{11}+\varepsilon\chi_Q]} < 0$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Обозначим через D_n множество тех систем $\in M_n$, которые ляпуновскими преобразованиями приводятся к диагональному виду ($D_1 = M_1$).

Теорема 2. $J_n = JntD_n$

Доказательство. Б. Ф. Былов доказал включение $J_n \subseteq D_n$ [9] и доказал в [3], что J_n открыто в M_n (последнее утверждение содержится также в теореме Перрона — Былова — Винограда (см. [2], теорема 15.2.1)). Отсюда $J_n \subseteq JntD_n$.

Докажем обратное включение.

Пусть система (1) $\in JntD_n$. Допустим, что она $\notin J_n^+$ *). Приведем ее к диагональному виду

$$\dot{y}_i = p_i(t)y_i \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{33}$$

или, короче, $\dot{y} = P(t)y$, причем без ограничения общности считаем, что

$$\lambda_{p_j} \geqslant \lambda_{p_i} \text{ при } j > i. \tag{34}$$

Напомню, что λ_p обозначает у нас $\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t p(\tau)d\tau$. Так как система (33) $\notin J_n$, то либо найдутся $i \neq j$, при которых

$$\underline{\lambda}_{p_i-p_j} = \underline{\lambda}_{p_j-p_i} = 0 \tag{35}$$

(напомню, что $\underline{\lambda}_p$ обозначает у нас $\overline{\lim_{i-\tau\to+\infty}} \frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t p(\xi)d\xi$), либо найдутся $i_0 < j_0$ при которых

$$\underline{\lambda}_{p_{j_0}-p_{i_0}} < 0 \tag{36}$$

Первый случай сводится ко второму тем же приемом, что и в самом конце доказательства теоремы 1, поэтому рассмотрим второй случай. Прибавив к $p_i(t)$ если нужно, сколь угодно, малые константы, считаем, что выполнено (36) и (вместо (34))

$$\lambda_{p_j} > \lambda_{p_i} \quad (j > i) \tag{37}$$

Докажем, что имеется система

$$\dot{z} = B_\varepsilon(t)z \tag{38}$$

как угодно близкая (в M_n) к системе (33) (будем называть ее «возмущенной», а разность между ее матрицей коэффициентов и матрицей коэффициентов системы (33) «возмущением»), не принадлежащая D_n. В силу леммы Д. М. Гробмана ([2], теорема 29.2.1) нам достаточно построить кусочно-непрерывную $B_\varepsilon(t)$. Из (36) вытекает существование последовательности $\tau < t_1 < ... < \tau_k < t_k < ...$ и константы $c < 0$ таких, что

$$t_k - \tau_k > 1, \tau_k - t_{k-1} > 1,$$

---

*) Случай $\notin \overline{Jn}$, где $\overline{Jn}$ — множество систем $\in M_n$, удовлетворяющих условию (24) при $\tau \leqslant t \leqslant 0$, рассматривается аналогично.

$$t_k-\tau_k \underset{k\to\infty}{\to} +\infty \quad e^{-c(t_k-\tau_k)}\sin^2\frac{\varepsilon}{2k} \geqslant 1, \tag{39}$$

$$\frac{1}{t_k-\tau_k}\int_{\tau_k}^{t_k}[p_{j_0}(\tau)-p_{i_0}(\tau)]d\tau \leqslant c<0. \tag{40}$$

I. Пусть задано $\varepsilon>0$ (считаем, что $\varepsilon<\frac{\pi}{4}$),

1) при $t<\tau_{k_1}-1$ $(k_1=1)$ положим возмущение равным нулю;

2) при $\tau_{k_1}-1\leqslant t<\tau_{k_1}$ положим

$$B_\varepsilon(t)=L_{tg\varepsilon}(t-\tau_{k_1}+1)P(t)L_{tg\varepsilon}^{-1}(t-\tau_{k_1}+1)+L_{tg\varepsilon}(t-\tau_{k_1}+1)L_{tg\varepsilon}^{-1}(t-\tau_{k_1}+1) \tag{41}$$

где $L_\rho(\tau)$ — матрица, задающая преобразование

$$z=L_\rho(\tau)y=y+\rho\tau(y,e_{j_0})e_{i_0}, \tag{42}$$

где e_i —вектор, i-я координата которого равна 1 и остальные нулю.

В результате решение $z_0(t)$ системы (38), равное e_{j_0} при $t=0$ повернется к моменту $t=\tau_{k_1}$ в плоскости векторов e_{i_0},e_{j_0} на угол ε в сторону вектора e_{i_0}.

3) Положим возмущение равным нулю при $\tau_{k_1}\leqslant t<\theta_{k_1}-1$, где $\theta_{k_1}>t_{k_1}+1$ таково, что решение $z_0(t)$ $(z_0(0)=e_{j_0})$ так построенной системы (38) при $t=\theta_{k_1}$ составляет с вектором e_{j_0} угол $\gamma_{k_1}\leqslant\varepsilon$ а

$$\max_{\tau_{k_1}\le t\le\Theta_{k_1}}\frac{1}{t}\ln\|z_0(t)\|\geqslant\lambda_{p_{j_0}}-\frac{\varepsilon}{k_1}$$

(такое θ_{k_1} существует в силу (34)).

Из (39) — (40) вытекает, что при $t=t_{k_1}$ проекция $z_0(t)$ на плоскость векторов e_{i_0},e_{j_0} параллельно остальным векторам e_i образует с e_{i_0} угол $<\frac{\varepsilon}{k_1}$.

4) При $\theta_{k_1}-1\leqslant t<\theta_{k_1}$ положим

$$B_\varepsilon(t)=L_{-tg\gamma_{k_1}}(t-\theta_{k_1}+1)P(t)L_{-tg\gamma_{k_1}}(t-\theta_{k_1}+1)+L_{-tg\gamma_{k_1}}(t-\theta_{k_1}+1)L_{-tg\gamma_{k_1}}(t-\theta_{k_1}+1) \tag{43}$$

где $L_\rho(\tau)$ определено формулой (42).

В результате решение $z_0(t)(z_0(0)=e_{j_0})$ так построенной системы (38) при $t=\theta_{k_1}$ коллинеарно e_{j_0}.

5) При $\theta_{k_1}\leqslant t<\tau_{k_1}-1$ (где в качестве k_2 фиксирован любой индекс, для которого $\tau_{k_1}>\theta_{k_1}+1$) положим возмущение равным нулю,

II. При $t\geqslant\tau_{k_1}-1$ проделываем аналогичную процедуру, но заменив всюду k_1 на k_2, в формуле (41) $tg\varepsilon$ на $-tg\varepsilon$ в формуле (43) $-\gamma_{k_1}$ на γ_{k_2}; затем аналогично при $t>$ некоторого $\tau_{k_3}-1$, снова заменив знак индексов у L_ρ в формулах (41) и (43), и т. д.

Построенная система (38) имеет показатели $\lambda_{\rho_i}(i\neq j_0)$ и показатель λ_{j_0} решения $z_0(t)$, который по построению $\geqslant\lambda_{p_{j_0}}$. Прибавив, если нужно, к $p_j(t)$ $(i>j_0)$ малые константы, мы получим систему, которую снова обозначим формулой (38) и показатели которой все различны. Из этого и формул (41) — (43) вытекает

$$\sup_t \| B_\varepsilon(t) - P(t) \| \leqslant C\varepsilon .$$

Причем константа C зависит только от $\sup_t \| P(t) \|$. А так как у этой системы (38) всякое решение, имеющее показатель λ_{j_0} образует с подпространством, натянутым на решения с меньшими показателями, угол, $\inf_t$ которого равна нулю (поскольку его проекция на плоскость векторов e_{i_0}, e_{j_0} образует с прямой, натянутой на e_{i_0}, угол, $\inf_t$ которого равна нулю), то система (38) $\notin D_n$. Теорема доказана.

Замечание. В обозначениях этой статьи моя теорема, доказанная в [8] (формулировка опубликована в [7], теорема 1), формулируется так:

Теорема 3. $\overline{J}_n = M_n$.

Литература

1. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., ГТТИ, 1949.
2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Громбан Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М., «Наука», 1966.
3. Былов Б. Ф. Докторская диссертация. Минск, 1966.
4. Миллионщиков В. М. УМН; т. ХХЩ, № 1 (резюме, стр. 213), 1968. о.
5. Миллионщиков В. М. СМЖ. т. X, № 1, 1969.
6. Миллионщиков В. М. Матем.заметки, 4, №2, 173—180, 1968.
7. Миллионщиков В. М. УМН, т. XXIII, № 2 (резюме, стр. 207), 1968.
8. Миллионщиков В. М. Дифференц. уравнения, 5, № 7, 1167—1170, 1969.
9. Былов Б. Ф. Матем. сб., 67, № 3, J965, стр. 338—344.
10. Миллионщиков В. М. ДАН СССР, 179, №3, 538—541, 1968.
11. Миллионщиков В. М. Матем. сб., 78 (120): 2, 1969, стр. 179—201.

Поступила в редакцию
10 октября 1968 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова