МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 7, № 4 (1970), 503—513

УДК 517.9

К ТЕОРИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА

В. М. Миллионщиков

Доказывается, что для почти всякой линейной системы дифференциальных уравнений почти все близкие к ней системы имеют показатели, близкие к ее показателям. Библ. 19 наз.

Мы будем рассматривать системы

$$\dot{x} = A(t)\,x \tag{1}$$

в n-мерном евклидовом пространстве E^n ($A(t)$ непрерывна, $\|A(t)\| \leqslant a$ $(t \geqslant 0)$).

Как известно, всякая невырожденная квадратная матрица X порядка n представима в виде U_1DU_2, где U_1, U_2 — ортогональные матрицы, а D — диагональная матрица, диагональные элементы которой $d_1(X) \geqslant \ldots d_n(X) > 0$ положительные квадратные корни из собственных значений матрицы X^*X. При этом $e_m(X) = \Pi_{i=1}^m d_i(X)$ удовлетворяют неравенствам

$$e_m(XY) \leqslant e_m(X)\,e_m(Y) \quad (m = 1,\ \ldots,\ n). \tag{2}$$

Пусть $X(t,\ \tau)$ — матрица Коши системы (1).

О п р е д е л е н и е 1. Числа

$$\nu_k = \lim_{T\to+\infty} \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{1}{sT} \sum_{i=0}^{s-1} \ln d_k(X((i+1)T,\ iT)) \tag{3}$$

назовем *вспомогательными показателями*, а их совокупность — *вспомогательным спектром* системы (1).

Существование $\lim\limits_{T\to+\infty}$ в (3) вытекает из (2); ν_1 совпадает с центральным показателем Ω (см. [7]).

П р и м е р 1. Если система (1) статистически почти приводима (см. [10]), то ее вспомогательные показатели совпадают, как легко видеть, с ее характеристическими показателями [2], [5—7].

П р и м е р 2. Если $A(t)$ — почти периодическая, то вспомогательный спектр системы (1) совпадает с ее вероятным спектром [10—11]. Докажем это. Динамическая система D_A [6, 10—11] в этом случае строго эргодическая (и это все, что нам нужно от $A(t)$ в этом примере); функции $d_k(\tilde{X}(T,\ O))$, где $\tilde{X}(t,\ \tau)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = \tilde{A}(t)\,x$, непрерывны на пространстве R_A системы D_A; поэтому вспомогательные показатели всякой системы $\dot{x} = \tilde{A}(t)\,x$ (в том числе и системы (1)) не зависят от $\tilde{A}(t) \in R_A$ (в силу (3) и эргодической теоремы Биркгофа они равны

$$\nu_k = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{R_A} \ln d_k(\tilde{X}(t,\ o)\,\mu(d\tilde{A})),$$

где μ — инвариантная нормированная мера на D_A); в [10—11] доказано, что для почти всякой $\tilde{A}(t) \in R_A$ система $\dot{x} = \tilde{A}(t)\,x$ статистически почти приводима, а совокупность ее характеристических показателей совпадает с вероятным спектром системы (1); в силу сказанного в примере 1 доказательство закончено.

Мы будем рассматривать случайные возмущения системы (1), т. е. системы

$$\dot{y} = B_\xi(t,\ \omega)\, y, \tag{4}$$

коэффициенты которых являются случайными процессами [4], [15—18]. Обозначим через $Y_\xi(t,\ \tau;\ \omega)$ матрицу Коши системы (4).

О п р е д е л е н и е 2. Систему (4) назовем *допустимым случайным возмущением* системы (1), если матричный случайный процесс $B_\xi(t,\ \omega)$ (или некоторый его сдвиг $B_\xi(\theta + t,\ \omega)$) ($\omega$ — точка пространства Ω_ξ с мерой μ_ξ ($\mu_\xi(\Omega_\xi) = 1$), параметр $\xi \in$ множеству Ξ, в котором задан фильтр $\mathcal{F}$ [19]) удовлетворяет условиям: найдутся $\Xi^0 \in \mathcal{F}$ и и $\theta^\circ > 0$ такие, что для всякого $T_\varepsilon > 0$ и всякого $\xi \in \Xi^0$ существует $\theta_{\xi,\,\varepsilon} \in (T_\varepsilon,\ T_\varepsilon + \theta^0)$ такое, что

1) случайные величины $Y_\xi((i+1)\,\theta_{\xi,\,\varepsilon},\ i\theta_{\xi,\,\varepsilon};\ \omega)$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots$) независимы;

2а)

$$e_{\xi,\,i} = E_\xi\left(|\exp\left\{ D_\varepsilon \int_{i\theta_{\xi,\,\varepsilon}}^{(i+1)\,\theta_{\xi,\,\varepsilon}} \| B_\xi(s,\ \omega) - A\,(s) \|\, ds \right\} - 1| \right) \underset{\xi,\,\mathcal{F}}{\to} 0$$

равномерно по $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ (здесь обозначено $D_\varepsilon = \exp\,(2a\,(T_\varepsilon + \theta^0))$, $E_\xi(f(\omega)) = \int_{\Omega_\xi} f(\omega)\, d\mu_\xi$, а обозначение $f(\xi) \underset{\xi,\,\mathcal{F}}{\to} y$ равносильно обозначению $\lim\limits_{\xi,\,\mathcal{F}} f(\xi) = y$;

2б)

$$\inf_i e_{\xi,\,i} > c \cdot \sup_i e_{\xi,\,i},$$

где $c > 0$ не зависит от ξ;

3) для всякого $\bar{\varepsilon} > 0$ найдется $\delta_{\bar{\varepsilon}} > 0$ такое, что для всякого $\xi \in \Xi^0$, всяких R^k и R^{n-k} (k-мерного и $(n-k)$-мерного линейных подпространств E^n) ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$) и всякого $\tau = i\theta_{\xi,\,\varepsilon}$ ($i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) множество тех $\omega \in \Omega_\xi$, для которых

$$[Y_\xi(\tau \pm \theta_{\xi,\,\varepsilon},\ \tau;\ \omega)\, R^k] \cap R^{n-k}(\delta_{\bar{\varepsilon}} \cdot e_{\xi,\,i}) \neq \{0\},$$

имеет μ_ξ-меру $< \bar{\varepsilon}$; $\widehat{R}^r(\rho)$ обозначает конус, состоящий из векторов, образующих угол $\leqslant \rho$ с подпространством R^r.

З а м е ч а н и е . Мы будем допускать случай, когда $B_\xi(t,\ \omega)$ — обобщенный случайный процесс (см. [14—17]), если $\int_0^t B_\xi(\tau,\ \omega)\, d\tau$ — обычный случайный процесс, почти все реализации которого непрерывны (при каждом ξ). Тогда интегралы в известной формуле

$$\begin{aligned} Y_\xi(t,\ \tau;\ \omega) = I + \int_\tau^t B_\xi(t_1,\ \omega)\, dt_1 + \ldots + \int_\tau^t \Big(B_\xi(t_{k+1},\ \omega) \times \\ \times \left(\int_\tau^{t_{k+1}} B_\xi(t_k,\ \omega) \right) \ldots \left(\int_\tau^{t_2} B_\xi(t_1,\ \omega)\, dt_1 \right) \ldots \Big)\, dt_{k+1} \Big) \end{aligned} \tag{5}$$

определяются, как известно, как стохастические интегралы (см. [15]).

П р и м е р 3 (возмущение, описываемое в этом примере, естественно возникает, когда коэффициенты системы (1) находятся путем измерений и приближенных вычислений). Пусть $A\,(t)$ равномерно непрерывна при $t \geqslant 0$, либо же постоянна на каждом $[i,\ i+1)$ ($i = 0,\ 1,\ \ldots$). Пусть $c_{ij}^{(k)}(\omega)$ ($i,\ j = 1,\ \ldots,\ n$; $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) — независимые случайные величины, причем величина $c_{ij}^{(k)}(\omega)$ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $e_{ij}^{(k)}(\sigma)$ и дисперсией $\sigma^2 \cdot \sigma_{ij}^2 \cdot h$ ($\sigma_{ij} \neq 0$ — константы,

$h = h(\sigma)$). Положим $B_\xi(t,\ \omega) = A(E(t/h)) + D_\xi(t,\ \omega)$, где $D_\xi(t,\ \omega)$ — матрица с элементами $C_{ij}^{(E(t/h))}(\omega)$ ($E(x)$ — целая часть x), $\xi = \sigma^2 \in [0,\ \infty)$; фильтр в $[0,\ \infty)$ состоит из полуинтервалов $[0,\ \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$.) Пусть

$$\left.\begin{aligned} \sup_i \sup_{ih \leqslant t < (i+1)h} \| A(t) - A(ih) \| \leqslant \mathrm{const} \cdot \sigma, \\ \sup_{i,j,k} | e_{ij}^{(k)}(\sigma) | \leqslant \mathrm{const} \cdot \sigma. \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

Тогда система (4) является допустимым случайным возмущением системы (1). В самом деле, условия 1) и 2) определения 2 легко проверяются. Проверим условие 3). Систему (4) из примера 3 преобразованием $y = X_\xi(t,\ \tau) z$, где $X_\xi(t,\ \tau)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = E_\xi(B_\xi(t,\ \omega)) x$, приводим к виду (обозначив $C_\xi = D_\xi - E_\xi(D_\xi)$):

$$\dot{z} = \sigma X_\xi^{-1}(t,\ \tau) \frac{1}{\sigma} C_\xi(t,\ \omega) X_\xi(t,\ \tau) z \tag{6}$$

(матрица $1/\sigma\, C_\xi(t,\ \omega)$ не зависит от σ). Пусть фиксировано $T > 0$. Тогда при $\tau \leqslant t \leqslant \tau + T$ $\| X_\xi^{-1}(t,\ \tau) \| \cdot \| X_\xi(t,\ \tau) \| \leqslant D_T$ ($\sigma < 1$), и в силу (*) в условии 3) можно заменить $Y_\xi(\tau + T,\ \tau;\ \omega)$ на $Z_\xi(\tau + T,\ \tau;\ \omega)$ (где $Z_\xi(t,\ \tau;\ \omega)$ — матрица Коши системы (6)), которую в свою очередь в силу оценки (получаемой из формулы (5), написанной для $Z_\xi(t,\ \tau;\ \omega)$)

$$E_\xi\left(\| Z_\xi(t + \tau,\ \tau;\ \omega) - I - \int_\tau^{\tau+T} X_\xi^{-1}(\theta,\ \tau)\, C_\xi(\theta,\ \omega)\, X_\xi(\theta,\ \tau)\, d\theta \|\right) \leqslant$$

$$\leqslant E_\xi\left(\exp\left\{ D_T \int_\tau^{\tau+T} \| C_\xi(\theta,\ \omega) \|\, d\theta \right\} - 1 - \right.$$

$$\left. - D_T \int_\tau^{\tau+T} \| C_\xi(\theta,\ \omega) \|\, d\theta \right) \leqslant \mathrm{const} \cdot \sigma^2,$$

можно заменить на

$$I + \int_\tau^{\tau+T} X_\xi^{-1}(\theta,\ \tau)\, C_\xi(\theta,\ \omega)\, X_\xi(\theta,\ \tau)\, d\theta,$$

после чего справедливость условия 3) делается очевидной.

П р и м е р 4 (возмущение белым шумом (см. [16—17] и, например, [18]); оно возникает, как известно, в результате разумного перехода к пределу при $h \to 0$ в предыдущем примере, причем, чтобы не загромождать изложение, ограничиваемся случаем $e_{ij}^{(k)} = 0$). Пусть $A(t)$ равномерно непрерывна. Пусть $c_{ij}(t,\ \omega)$ ($i,\ j = 1,\ \ldots,\ n$), независимые обобщенные случайные процессы, и пусть при каждых i, j, $c_{ij}(t,\ \omega)$ — производная винеровского процесса (см. [17], стр. 323), у которого коэффициент диффузии равен $\sigma^2 \cdot \sigma_{ij}^2$ ($\sigma_{ij} \neq 0$ — константы, не зависящие от σ). Положим $B_\xi(t,\ \omega) = A(t) + C_\xi(t,\ \omega)$, где $C_\xi(t,\ \omega)$ — матрица с элементами $c_{ij}(t,\ \omega)$; $\xi = \sigma^2 \in [0,\ +\infty)$, а фильтр в $[0,\ +\infty)$ состоит из полуинтервалов $[0,\ \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$). Тогда система (4) является допустимым случайным возмущением системы (1).

О п р е д е л е н и е 3. Скажем, что характеристические показатели $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ системы (1) *устойчивы почти наверное*, если для всякого допустимого случайного возмущения (4) системы (1) и всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\Xi(\varepsilon) \in \mathcal{F}$ такое, что при $\xi \in \Xi(\varepsilon)$ для почти всех (в смысле меры μ_ξ) $\omega \in \Omega_\xi$ характеристические показатели лй $\lambda_1(\xi,\ \omega) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(\xi,\ \omega)$ системы (4) удовлетворяют неравенствам

$$| \lambda_i(\xi,\ \omega) - \lambda_i | < \varepsilon \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

О п р е д е л е н и е 4. Скажем, что вероятный спектр [10—11] системы (1) с равномерно непрерывной $A(t)$ устойчив почти наверное, если для почти всякой (в смысле любой нормированной инвариантной меры на D_A [10—11]) $\tilde{A}(t)\in R_A$ характеристические показатели системы $\dot{x}=\tilde{A}(t)\,x$ устойчивы почти наверное.

Заметим, что если система (4) — допустимое случайное возмущение системы (1), то система $\dot{y}=\tilde{B}_\xi(t,\ \omega)\,y$ (где при почти всяком ω

$$\tilde{B}_\xi(t,\ \omega)=\lim_{k\to\infty}B(t_k+t,\ \omega)$$

— предел — равномерный на отрезках) — допустимое случайное возмущение системы $\dot{x}=\tilde{A}(t)\,x$, где

$$\tilde{A}(t)=\lim_{k\to\infty}A(t_k+t).$$

ТЕОРЕМА 1. *Вероятный спектр всякой системы* (1) с *равномерно непрерывной* $A(t)$ *устойчив почти наверное*.

Будем записывать системы в вариациях гладких динамических систем так, как это делается в [12].

ТЕОРЕМА 2. *Пусть динамическая система задана векторным полем класса* C^2 *на* n-*мерном гладком замкнутом многообразии* V^n. *Тогда для почти всякого* $v\in V^n$ (*в смысле любой нормированной инвариантной меры*) *характеристические показатели системы в вариациях вдоль траектории* $v(t)$ ($v(0)=v$) *устойчивы почти наверное*.

В силу теоремы 1 из [11], теоремы 3 из [10], изложенного в работе [12] и сказанного в примере 1, теоремы 1 и 2 вытекают из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Для всякого допустимого случайного возмущения* (4) *системы* (1) *для всякого* $\varepsilon>0$ *найдется* $\Xi(\varepsilon)\in\mathcal{F}$ *такое, что при* $\xi\in\Xi(\varepsilon)$ *для почти всех* (*в смысле меры* μ_ξ) $\omega\in\Omega_\xi$ *характеристические показатели* $\lambda_1(\xi,\ \omega)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(\xi,\ \omega)$ *системы* (4) *удовлетворяют неравенствам*

$$|\lambda_i(\xi,\ \omega)-\nu_i|<\varepsilon\quad(i=1,\ \ldots,\ n)$$

($\nu_1\geqslant\ldots\geqslant\nu_n$ — вспомогательные показатели системы (1)).

Доказательство. 1) ν_k и λ_k — инварианты сдвига по t, поэтому будем считать без ограничения общности, что $B_\xi(t,\ \omega)$, а не его сдвиг, удовлетворяет условиям 1) — 3) определения 2. Пусть дано $\varepsilon>0$. Возьмем $T_\varepsilon>8/\varepsilon$ такое, что при $T\geqslant T_\varepsilon$ $\lim\limits_{s\to+\infty}$ в (3) отличается от ν_k меньше чем на $\varepsilon^2(16n)^{-1}$ ($k=1,\ \ldots,\ n$). Возьмем $\eta\in(0,\ 1)$ такое, что из неравенств $\sin\sphericalangle(x,\ y)<\eta$, $|t-\tau|\leqslant T_\varepsilon+\theta^0$ вытекает

$$\|X(t,\ \tau)\,y\|\cdot\|x\|\leqslant\exp\left(\frac{\varepsilon}{8}T_\varepsilon\right)\cdot\|X(t,\ \tau)\,x\|\cdot\|y\|.$$

Из формулы (5) следует, что для любых

$$t_i,\ \tau_i\in[i\theta_{\xi,\ \varepsilon},\ (i+1)\,\theta_{\xi,\ \varepsilon}]$$

$$\varepsilon_\xi=\sup_i E_\xi(\|I-X^{-1}(t_i,\ \tau_i)\,Y_\xi(t_i,\ \tau_i\omega)\|)\leqslant\sup_i e_{\xi,\ i}. \tag{7}$$

Возьмем $T_\varepsilon>2\,(T_\varepsilon+\theta^0)$ такое, что

$$c\varepsilon\delta_\varepsilon\eta\exp\left(\frac{\varepsilon}{4}T'_\varepsilon\right)>2 \tag{8}$$

и что из $T\geqslant T'_\varepsilon$ следует $T\leqslant T_\varepsilon\exp(\varepsilon T/8)$. Возьмем $\Xi_\varepsilon\in\Xi^0$ такое, что при $\xi\in\Xi_\varepsilon$

$$\delta_\varepsilon(\sup_i e_{\xi,\ i})\exp(\varepsilon T'_\varepsilon)<2.$$

Фиксируем произвольное $\xi \in \Xi_\varepsilon$. Берем $S \geqslant T'_\varepsilon$ такое, что

$$\delta_\varepsilon(\inf_i e_{\xi,\, i}) \exp(\varepsilon S) = 2. \tag{9}$$

Пусть $T = N\theta_{\xi,\,\varepsilon}$ — наименьшее целое кратное $\theta_{\xi,\,\varepsilon}$, большее S. Из (7) — (9), выбора T'_ε и условия 2б) определения 2 следует

$$\frac{\varepsilon_\xi}{\varepsilon} \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} T\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} (\sup_i e_{\xi,\, i}) \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} T\right) < \eta, \tag{10}$$

$$\delta_\varepsilon(\inf_i e_{\xi,\, i}) \exp(\varepsilon T) \geqslant 2. \tag{11}$$

2) Обозначим $X_{i,\, s+1,\, s} = X_{i,\, s+1} X_{i,\, s}^{-1}$; $X_i = X((i+1)\,T,\ iT)$; $X_{i,\, s} = X(iT + s\theta_{\xi,\,\varepsilon},\ iT)$ и аналогично для Y_ξ, например $Y_{\xi,\, i}(\omega) = Y_\xi((i+1)\,T,\ iT;\ \omega)$. Из (2), выбора T_ε и соотношения $T = N\theta_{\xi,\,\varepsilon} < NT_\varepsilon$ следует, что объединение Σ тех полуинтервалов $[iT,\ (i+1)\,T)$, для которых не выполнено хоть одно из неравенств ($k = 1,\ \ldots,\ n$)

$$\frac{1}{T} \sum\nolimits_{s=0}^{N-1} \ln e_k(X_{i,\, s+1,\, s}) - \frac{1}{T} \ln e_k(X_i) < \frac{\varepsilon}{8},$$

имеет относительную меру

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \operatorname{mes} \sum \bigcap [0,\ t] < \varepsilon.$$

Обозначим через $\overline{R}_i^k$ подпространство, натянутое на первые k (в порядке убывания собственных значений) собственных векторов матрицы $X_i^* X_i$. При каждом s фиксируем в E^n ортонормированный базис $x_{i,\, s,\, 1},\ \ldots,\ x_{i,\, s,\, n}$ такой, что $x_{i,\, s,\, k} \in X_{i,\, s} \overline{R}_i^k$. Обозначим через $X_{i,\, s+1,\, s}^{(k)}$ матрицу, с помощью которой записывается в базисах $x_{i,\, s,\, j}$ ($j \leqslant k$), $x_{i,\, s+1,\, j}$ ($j \leqslant k$) сужение на $X_{i,\, s} \overline{R}_i^k$ отображения, задаваемого в стандартном базисе в E^n матрицей $X_{i,\, s+1,\, s}$. Очевидно, при $m \leqslant k$

$$e_m(X_{i,\, s+1,\, s}^{(k)}) \leqslant e_m(X_{i,\, s+1,\, s}). \tag{12}$$

Фиксируем произвольное i, для которого $iT \notin \Sigma$. При $m \leqslant k$

$$\prod\nolimits_{s=0}^{N-1} e_m(X_{i,\, s+1,\, s}^{(k)}) \geqslant e_m(X_i) \geqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon}{8} T\right) \prod\nolimits_{s=0}^{N-1} e_m(X_{i,\, s+1,\, s}). \tag{13}$$

Из (13) при $m = k$ и (12) при $m = k - 1$ имеем

$$\prod\nolimits_{s=0}^{N-1} d_k(X_{i,\, s+1,\, s}^{(k)}) \geqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon}{8} T\right) \prod\nolimits_{s=0}^{N-1} d_k(X_{i,\, s+1,\, s}). \tag{14}$$

Пусть $M_{\xi,\, i}$ — множество тех $\omega \in \Omega_\xi$, для которых

$$\sum\nolimits_{s=0}^{N-1} \| I - X_{i,\, s+1,\, s} Y_{\xi,\, i,\, s+1,\, s}^{-1}(\omega) \| < \varepsilon_\xi \varepsilon^{-1} N.$$

Применив (7) при $t_i = i\theta_{\xi,\,\varepsilon}$, $\tau_i = (i+1)\,\theta_{\xi,\,\varepsilon}$, получаем $\mu_\xi(M_{\xi,\, i}) > 1 - \varepsilon$. Фиксируем произвольное $\omega \in M_{\xi,\, i}$ и обозначим $\aleph_s = \| I - X_{i,\, s+1,\, s} Y_{\xi,\, i,\, s+1,\, s}^{-1}(\omega) \|$. Из выбора T_ε, T'_ε, T и из (10) следует

$$\sum\nolimits_{s=0}^{N-1} \aleph_s < \eta \exp\left(-\frac{3}{8} \varepsilon T\right). \tag{15}$$

Пусть $\overline{x} \in \overline{R}_i^k$ Обозначим через β_s синус угла между вектором $y_s = Y_{\xi,\, i,\, s}(\omega)\, \overline{x}$ и подпространством $X_{i,\, s} \overline{R}_i^k$; $\beta_0 = 0$. Пусть $\beta_s < \eta$ при $s < \overline{s}$.

Имеем $\beta_{s+1} \leqslant \alpha_{s+1} + \gamma_{s+1}$, где

$$\alpha_{s+1} = \sin \sphericalangle (Y_{\xi,\, i,\, s+1,\, s}(\omega)\, y_s,\ X_{i,\, s+1,\, s}\ y_s) \leqslant \aleph_s,$$
$$\gamma_{s+1} = \sin \sphericalangle (X_{i,\, s+1,\, s}\ y_s,\ X_{i,\, s+1}\ \overline{R}^k_{is}) \leqslant$$
$$\leqslant \beta_s e_{k+1}(X_{i,\, s+1,\, s}) \| y_s \| \cdot \| X_{i,\, s+1,\, s}\ y_s \|^{-1} \cdot [e_k(X^{(k)}_{i,\, s+1,\, s})]^{-1}.$$
Отсюда при $s < \overline{s}$ в силу выбора η и неравенства $e_{k+1}(X) \leqslant e_k(X)\, d_k(X)$ имеем $\beta_{s+1} \leqslant \aleph_s + \lambda_s \beta_s$, где
$$\lambda_s = e_k(X_{i,\, s+1,\, s})\, d_k(X_{i,\, s+1,\, s}) \times$$
$$\times [e_k(X^{(k)}_{i,\, s+1,\, s})\, d_k(X^{(k)}_{i,\, s+1,\, s})]^{-1} \exp\left(\frac{\varepsilon}{8}\theta_{\xi,\, \varepsilon}\right) > 1.$$
Отсюда при $s < \overline{s}$ в силу (13) — (15)
$$\beta_{s+1} \leqslant \left(\sum\nolimits_{j=0}^{s} \aleph_j\right) \prod\nolimits_{j=0}^{s} \lambda_j < \eta.$$

Следовательно, $\beta_s < \eta$ $(s = 0,\ 1,\ \ldots,\ N)$. Отсюда, используя свойства числа η и неравенства (12) — (14), получаем: для всякого $\overline{x} \in \overline{R}^k_i$.
$$\begin{aligned} \| Y_{\xi,\, i}(\omega)\, \overline{x} \| \cdot \| \overline{x} \|^{-1} &= \prod\nolimits_{s=0}^{N-1} \| Y_{\xi,\, i,\, s+1,\, s}(\omega)\, y_s \| \cdot \| y_s \|^{-1} \geqslant \\ &\geqslant \prod\nolimits_{s=0}^{N-1} (1 + \aleph_s)^{-1} d_k(X^{(k)}_{i,\, s+1,\, s}) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{8}\theta_{\xi,\, \varepsilon}\right) \geqslant \\ &\geqslant \exp\left(-\sum\nolimits_{s=0}^{N-1} \aleph_s - \frac{2\varepsilon}{8} T\right) e_k(X_i) \prod\nolimits_{s=0}^{N-1} [e_{k-1}(X_{i,\, s+1,\, s})]^{-1} \geqslant \\ &\geqslant d_k(X_i) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} T\right). \end{aligned} \tag{16}$$

3) Пусть $R^{n-k}_{\xi,\, i,\, \omega}$ — подпространство, натянутое на последние (в порядке убывания собственных значений) $n-k$ собственных векторов матрицы $Y^*_{\xi,\, i}(\omega)\, Y_{\xi,\, i}(\omega)$. Из (11), (16) следует, что для всяких
$$iT \notin \sum, \quad \omega \in M_{\xi,\, i},$$
$$y \notin R^{n-k}_{\xi,\, i,\, \omega}(\delta_\varepsilon e_{\xi,\, i})$$
$$\| Y_{\xi,\, i}(\omega)\, y \| \cdot \| y \|^{-1} \geqslant d_k(Y_{\xi,\, i}(\omega)) \exp(-\varepsilon T) \geqslant$$
$$\geqslant d_k(X_i) \exp(-2\varepsilon T).$$
Пусть теперь ξ и T фиксированы, как указано раньше, а ω и i — любые. Фиксируем любое k-мерное линейное подпространство $R^k \subseteq E^n$. В силу условий определения 2 из доказанного вытекает, что случайная величина
$$\zeta_i(\omega) = \sup_{y \in R^k} \frac{1}{T} [\ln \| Y_{\xi,\, i+1}(\omega)\, Y_{\xi,\, i}(\omega) \ldots Y_{\xi,\, 0}(\omega)\, y \| -$$
$$- \ln \| Y_{\xi,\, i}(\omega) \ldots Y_{\xi,\, 0}(\omega)\, y \| - \ln d_k(X_i)] + 2\varepsilon$$
удовлетворяет неравенствам:

а) при $iT \notin \sum$:
$$\zeta_i(\omega) \geqslant -2a \cdot \chi_i(\omega) - \gamma_i(\omega),$$
где $\gamma_i(\omega) = \dfrac{1}{T} \sum\nolimits_{s=0}^{N-1} \ln \| X_{i,\, s+1,\, s} Y^{-1}_{\xi,\, i,\, s+1,\, s}(\omega) \|$, а $\chi_i(\omega)$ — индикатор некоторого множества, причем при каждом условии, состоящем в фиксации значений всех $\chi_s(\omega)$ $(s < i)$, условная μ_ξ-мера этого множества $< 2\varepsilon$;

б) при $iT \notin \Sigma$:

$$\zeta_i(\omega) \geqslant -2a - \gamma_i(\omega).$$

Тривиальным образом индукцией по i строятся независимые случайные величины $\overline{\chi}_i(\omega) \geqslant \chi_i(\omega)$ такие, что при каждом i

$$\mu_\xi(\omega : \overline{\chi}_i(\omega) = 1) = 2\varepsilon; \quad \mu_\xi(\omega : \overline{\chi}_i(\omega) = 0) = 1 - 2\varepsilon.$$

Поэтому вследствие усиленного закона больших чисел для всякого $\nu > 0$ найдется $M_\upsilon \subseteq \Omega_\xi$, $\mu_\xi(M_\upsilon) > 1 - \upsilon$ и найдется натуральное s_υ такие, что при $\omega \in M_\upsilon$, $s \geqslant s_\upsilon$, $y \in R^k$

$$\frac{1}{sT} \ln \| Y_{\xi,\, s}(\omega) \ldots Y_{\xi,\, 0}(\omega)\, y \| - \frac{1}{sT} \sum_{i=0}^{s-1} \ln d_k(X_i) \geqslant \\ \geqslant -2\varepsilon - 2a\varepsilon - \varepsilon_\xi \geqslant -(2a+3)\,\varepsilon. \tag{17}$$

4) Зафиксируем произвольное натуральное m и повторим рассуждения пп. 2) и 3), но, заменив k на $n-k+1$ и идя не от нуля в сторону увеличения t, а от m в сторону уменьшения t (иными словами, в рассуждениях пп. 2) и 3), положим $X_i = X((m-i-1)\,T,\ (m-i)\,T)$, $X_{i,\, s} = X((m-i)\,T - s\theta_{\xi,\, \varepsilon},\ (m-i)\,T)$ и аналогично для Y_ξ. Все рассуждения пп. 2) и 3), а значит и (17), будут справедливы и для этого случая, причем s_υ не зависит от m.

5) При каждом $\omega \in M_\upsilon$ из последовательности подпространств $Y_\xi(0,\ mT;\ \omega)\, R^{n-k+1}$ ($m = 1,\ 2,\ \ldots$) выберем подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $R^{n-k+1}(\omega)$. Из (17) (в обозначениях п. 4)) вследствие тождества $d_{n-k+1}(X^{-1}) = [d_k(X)]^{-1}$ получаем, что показатель решения системы (4), начинающегося при $t = 0$ в $R^k \bigcap R^{n-k+1}(\omega)$, отличается от υ_k на величину $\leqslant 2\,(2a+3)\,\varepsilon$. Поскольку $\nu > 0$ — любое, теорема доказана.

Заменив в рассуждениях пп. 3) — 5) X на Y_ξ (тогда ξ любое, $\gamma_i(\omega) = 0$, а T может быть взято сколь угодно большим), получаем, что при каждом ξ с μ_ξ-вероятностью 1

$$\lambda_i(\xi,\ \omega) = \nu_i(\xi,\ \omega),$$

гда $\nu_i(\xi,\ \omega)$ — вспомогательные показатели системы (4), которые в силу колмогоровского закона 0 или 1 не зависят от ω с μ_ξ-вероятностью 1 (при каждом $\xi \in \Xi^0$).

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
27.VI.1969