Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, p.915 à 919.

LES SYSTÈMES LINÉAIRES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

par V.M. MILLIONŠČIKOV

1. — Nous examinerons des systèmes linéaires d'équations différentielles

(1) $$\dot{x} = \mathcal{A}(t)\, x,$$

où x est un vecteur de l'espace euclidien E^n de dimension n, $\mathcal{A}(t)$ une transformation linéaire $E^n \to E^n$ définie et dépendant continûment de t pour $t \geqslant 0$ ou pour tout t réel, avec de plus $\| \mathcal{A}(t) \| \leqslant a_0$.

Rappelons tout d'abord la définition de Liapounov (1892). On appelle exposant caractéristique d'une solution $x(t)$ le nombre

$$\lambda_x = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \operatorname{Log} \| x(t) \|.$$

Liapounov a démontré qu'il existe une base $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ de l'espace des solutions du système (1) telle que, pour toute autre base $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ du même espace telle que $\lambda_{y_1} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{y_n}$, on ait $\lambda_{y_i} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Les nombres $\lambda_1(\mathcal{A}) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(\mathcal{A})$, où $\lambda_i(\mathcal{A}) = \lambda_{x_i}$ s'appellent les exposants caractéristiques du système (1).

Par abus de langage, nous identifierons le système (1) à la fonction $\mathcal{A}(t)$. Munissons l'ensemble des systèmes (1) d'une structure d'espace métrique M_n en introduisant la distance

$$\rho(\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(t)) = \sup_t \| \mathcal{A}(t) - \mathcal{B}(t) \|$$

Perron, en 1930, a montré que les fonctions $\lambda_i(\mathcal{A})$ ne sont pas partout continues dans M_n, puis a établi, en 1931, la continuité des fonctions $\lambda_i(\mathcal{A})$ en tout point de l'ensemble $\mathcal{I}_n$ [1]. Par définition, le système (1) appartient à l'ensemble $\mathcal{I}_n$ [2] si et seulement s'il existe une base $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ de l'espace de ses solutions telle que

$$\frac{\| x_{i+1}(t) \|}{\| x_{i+1}(\tau) \|} : \frac{\| x_i(t) \|}{\| x_i(\tau) \|} \geqslant d e^{a(t-\tau)}$$

pour certains $a > 0$, $d > 0$ et tous les $t \geqslant \tau$, $i = 1, \ldots, n-1$.

J'ai obtenu les résultats suivants sur l'ensemble $\mathcal{I}_n$.

Théorème 1. [13]

$$\mathcal{I}_n = \operatorname{Int} S_n,$$

---

[1] cf. [2], pages 193-198, où le remplacement de la condition $p_{ik}(t) \to 0$, $t \to \infty$ $(i \neq k)$, par la condition $| p_{ik}(t) | < \delta$ $(i \neq k)$ n'introduit qu'un changement minime.

[2] B.F. Bylov et J.C. Lillo ont donné cette forme invariante à la définition de $\mathcal{I}_n$. Dans [3], on montre que le système (1) appartient à $\mathcal{I}_n$ si et seulement s'il se ramène par une transformation liapounovienne à un système $\dot{y}_i = p_{ii}(t)\, y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ satisfaisant à la condition du théorème de Perron, [2]. p. 193.

intérieur de l'ensemble S_n[1] *des points de l'espace* M_n *où toutes les fonctions* $\lambda_i(\mathcal{A})$ *sont continues*.

Théorème 2. [7]. — *Le système* (1) *appartient à l'ensemble* $\mathfrak{I}_n$ *si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que, pour toute solution* $y(t)$ *de tout système* $\dot{y} = \mathcal{B}(t)\, y$ *satisfaisant à l'inégalité* $\rho(\mathcal{B}(t), \mathcal{A}(t)) < \delta$, *il existe une solution* $x(t)$ *du système* (1) *telle que* $\sphericalangle(x(t), y(t)) < \varepsilon$ *pour tout* t.

Théorème 3. [12].

$$\overline{\mathfrak{I}}_n = M_n.$$

2. — Pour l'étude des systèmes non autonomes $\dot{x} = g(x, t)$, et en particulier des systèmes (1), il est important d'introduire la notion suivante (cf. [4]).

Définition 1. — On dit que $\tilde{x}(t)$ est une solution généralisée du système

$$\dot{x} = g(x, t) \text{ si } \tilde{x}(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(t_k + t),$$

où les t_k sont des nombres et les $x_k(t)$ des solutions du système, la limite étant uniforme sur tout segment.

Supposons $\mathcal{A}(t)$ borné et uniformément continu sur la droite. Alors toute solution généralisée $\tilde{x}(t)$ du système (1) est solution d'un système $\dot{x} = \tilde{\mathcal{A}}(t)\, x$, , où

$$\tilde{\mathcal{A}}(t) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\mathcal{A}}(t_k + t),$$

la limite étant uniforme sur tout segment.

Utilisons la construction bien connue (cf. [2] p. 533-535) du système dynamique des translatées. L'ensemble des translatées de la fonction $\mathcal{A}(t)$ est muni de la métrique de la convergence uniforme sur tout segment et complété pour cette métrique. Sur le compact $\mathcal{R}_a$ obtenu, considérons le système dynamique $\mathcal{D}_a$ défini par la formule

$$f(\tilde{\mathcal{A}}(t), \tau) = \tilde{\mathcal{A}}(t + \tau).$$

D'après le théorème de Bogolioubov et Krylov, le système $\mathcal{D}_a$ a des mesures normalisées invariantes[2].

DEFINITION 2 [11]. — Nous dirons que le système (1) est absolument régulier s'il existe une base $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ de l'espace de ses solutions possédant les propriétés suivantes:

(1) $$\lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} \| x_i(t) \| = \lambda_i \ (i = 1, 2, \ldots, n);$$

(2) Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$ on a: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe T tel que l'ensemble des h pour lesquels il y a au moins une solution $x(t)$, satisfaisant à

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} \| x(t) \| = \lambda_i,$$

telle que, pour au moins un τ, $|\tau| \geqslant T$, on ait l'inégalité

$$\left| \frac{1}{\tau} \operatorname{Log} \frac{\| x(h+\tau) \|}{\| x(h) \|} - \lambda_i \right| \geqslant \varepsilon$$

est de mesure relative $< \varepsilon$ sur la droite.

---

[1] Pour la description de l'ensemble S_n, voir [17] ou [13].

[2] L'étude des systèmes non autonomes a été faite par Favard en 1927, Stepanov et Tikhonov en 1934, Beboutov (1939-1941), Nemytski, qui m'a inspiré la note [4] celle-ci fut suivie d'un intéressant article de B.A. Chtcherbakov [18] et de communications de divers auteurs.

Théorème 4 [11][1]. —*Pour presque tout* $\tilde{a}(t) \in \mathcal{R}_a$ (*par rapport à une mesure normalisée invariante quelconque du système* $\mathcal{D}_a$), *le système* $\dot{x} = \tilde{a}(t)\, x$, *est absolumen t régulier.*

Définition 3 [15]. — Nous dirons que les exposants caractéristiques du système (1) sont presque sûrement stables si, pour $\sigma \to 0$, les exposants caractéristiques du système.

$$\dot{y} = \tilde{a}(t)\, y + \sigma^2 C(t,\ \omega)\, y,$$

(où les éléments de la matrice $C(t,\ \omega)$ par rapport à une certaine base sont des bruits blancs, indépendants et non nuls), tendent avec une probabilité égale à 1 vers les exposants caractéristiques du système (1).

Le théorème suivant est un résultat fondamental de la théorie probabiliste des systèmes d'équations différentielles exposée dans ce paragraphe.

Théorème 5 [15]. — *Les exposants caractéristiques de tout système absolument régulier sont presque sûrement stables.*

3. — Dans ce paragraphe, nous considérerons le système (1) pour une fonction $a(t)$ presque périodique. Nous utiliserons ici les notions de système régulier de Liapounoff et de système presque réductible de B.F. Bylov que l'on peut trouver dans les livres [1] et [3]. Je ferai la remarque que tout système presque réductible est absolument régulier et que la régularité absolue entraine la régularité.

Théorème 6 [14].

Pour tous $k > 1$, $n > 1$, *il existe* $a(t)$ k-*périodique telle que le système* (1) *ne soit pas régulier.*

(Ce théorème résout le problème de Erouguine)

Pour la démonstration de ce théorème j'ai utilisé le lemme suivant ($a(t)$ est dit récurrent, d'après Birkhoff, si chaque trajectoire du système $\mathcal{D}_a$ est partout dense dans $\mathcal{R}_a$):

Lemme [6].

Si le système (1), pour $a(t)$ récurrent, n'est pas presque réductible, alors il existe $\tilde{a}(t) \in \mathcal{R}_a$ tel que le système $\dot{x} = \tilde{a}(t)\, x$ ne soit pas régulier.

On a le théorème suivant.

Théorème 7 [11].

Pour que le système (1), *avec* $a(t)$ *presque périodique*, *soit presque réductible*, *il faut et il suffit que* $a(t)$ *soit un point de continuité des fonctions* $\lambda_i(a)$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$).

Pour démontrer ce théorème, j'ai utilisé des arguments appliqués par la suite à la démonstration des théorèmes 1-3, le théorème 4, et certains arguments de caractère métrique (probabiliste).

Les systèmes (1) apparaissent, en particulier, comme systèmes aux variations des systèmes dynamiques différentiables. A ce sujet, voir [10] et [15].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ляпунов А. М. — Общая задача об устойчивости движения. Харьков. 1892 (2-е издание: ГТТИ, Москва-Ленинград, 1935).

[2] Немыцкий В. В., Степанов В. В. — Качественная теория дифференциальных уравнений. 2-е издание. ГТТИ, Москва-Ленинград, 1949.

[3] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. — Теория показателей Ляпунова. Издательство «Наука», Москва, 1966.

[4] Миллионщиков В. М. — ДАН СССР, 161, № 1, 1965, 43-44.

[1] Ce théorème rassemble, sous une forme quelque peu améliorée, des résultats des articles [8] et [9] et équivaut, grosso modo, à l'ensemble des résultats de V.I. Osseledetz [16]. J'ai énoncé ces résultats des articles [8] et [9] sous forme de conjectures au séminaire de Nemytski l'hiver 1965-66; l'article [8] a été publié et les articles [9] et [11] ont été mis sous presse bien avant la sortie de l'article [16].

[5] Миллионщиков В. М. — ДАН СССР, 166, № 1, 1966, 34-37.
[6] Миллионщиков В. М. — Дифференциальные уравнения, 3, № 12, 1967, 2127-2134.
[7] Миллионщиков В. М. — Математические заметки, 4, № 2, 1968, 173-180.
[8] Миллионщиков В. М. — Математический сборник, 75, № 1, 1968, 154-165.
[9] Миллионщиков В. М. — Математический сборник, 77, № 2, 1968, 163-173.
[10] Миллионщиков В. М. — Математические заметки, 5, № 1, 1969, 49-54.
[11] Миллионщиков В. М. — Математический сборник, 78, № 2, 1969, 179-201.
[12] Миллионщиков В. М. — Дифференциальные уравнения, 5, № 7, 1969, 1167-1170.
[13] Миллионщиков В. М. — Дифференциальные уравнения, 5, № 10, 1969, 1775-1784.
[14] Миллионщиков В. М. — Дифференциальные уравнения, 5, № 11, 1969, 1779-1783.
[15] Миллионщиков В. М. — Математические заметки, 7, № 4, 1970, 503-515.
[16] Оседлец В. И. — Труды Московского математического общества, 19, 1968, 179-210.
[17] Былов Б.Ф., Изобов Н.А. — Дифференциальные уравнения, 5, № 10, 1969, 1796-1805.
[18] Щербаков Б.А. — ДАН СССР, 167, № 5, 1966, 1004-1007.