УДК 517.936

ОБ ОДНОМ ПЛОТНОМ МНОЖЕСТВЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

Пусть $f^t p$ — динамическая система (непрерывное действие группы R) на компактном метрическом пространстве M, имеющая транзитивную нормированную инвариантную меру т, причем множество P всех неподвижных и периодических точек имеет меру $m(P)=0$. Пусть $A(p)$ — непрерывное отображение M в $Hom(R^n, R^n)$.

Каждому $p \in M$ сопоставляем линейную систему

$$\dot{x} = A(f^t p)x \tag{1}$$

(все дальнейшее известным способом переносится на действия $g^t e (e \in E)$ группы R на n-мерном векторном расслоении (E, π, M, R^n) над M, линейные на слоях и такие, что $\pi g^t \dot{e} = f^t \pi e$).

Множество непрерывных отображений M в $Hom(R^n, R^n)$, наделенное равномерной топологией, обозначается через $C_n(M)$. Если M есть q- мерное гладкое замкнутое многообразие V^q, то через $C_n^{r,0}(M)$ обозначается подпространство пространства $C_n(M)$, состоящее из отображений $A(p)$ класса C^r.

Определение. Через $\mathcal{M}_n(M)$ обозначим подпространство пространства $C_n(M)$, состоящее из всех тех $A(p)$, для которых при почти каждом $p \in M$ (в смысле меры m) характеристические показатели системы (1) все различны:

$$\lambda_1(A(f^t p)) > \ldots > \lambda_n(A(f^t p))$$

Через $\mathcal{M}_n^{r,0}(V^q)$ обозначим подпространство пространства $\mathcal{M}_n(V^q)$, состоящее из $A(p)$ класса C^r.

Теорема. $\overline{\mathcal{M}_n(M)} = C_n(M), \overline{\mathcal{M}_n^{r,0}(V^q)} = C_n(V^q)$.

Доказательство 1. Обозначения. Введем в R^n какую-нибудь евклидову структуру. Зафиксируем какой-нибудь ортонормированный базис и вместо $X \in Hom(R^n, R^n)$ будем писать соответствующую матрицу. Через $d_1(X) \geqslant \ldots \geqslant d_n(X)$ обозначим спектр матрицы $(X * X)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$.

2. Пусть Ω — пространство с вероятностной мерой μ. Через $E(y)$ обозначаем $\int_\Omega y(\omega)\mu(d\omega)$. При каждом $C>0$, $\sigma>0$ обозначим через $\mathfrak{M}_{C,\sigma}$ множество всех измеримых отображений $Y(\omega) = \{y_{ij}(\omega)\}_{i,j=1,\ldots,n}$ пространства Ω в GL (n, R), удовлетворяющих условиям (для $i, j = 1, \ldots, n;$):

a) $y_{ij}(\omega)$ независимы;

b) $|E(y_{ij})| \leqslant C$;

c) $\sup\limits_\Omega |y_{ij}(\omega) - E(y_{ij})| \leqslant C \cdot \sigma$;

d) $\mu(\omega : y_{ij}(\omega) \in (a,b)) \leqslant C \cdot \sigma^{-1}(b-a)$ для всякого $(a,b) \subset R$

Тогда имеет место следующее утверждение, проверку которого можно предоставить читателю: для каждых $C>0$, $\sigma>0$, R, $\varepsilon>0$ существует $N(C,\sigma,R,\varepsilon)$ такое, что для всякого $k>N$, для любых независимых $Y_1,...,Y_k\in\mathfrak{M}_{C,\sigma}$ (т. е. все $y_{ij,l}(\omega)$ $(i,j=1,...,n;l=1,...,k)$ независимы), для всякого $s=1,...,n-1$ имеет место неравенство

$$\mu(\ln d_s(Y_1Y_2...Y_k)-\ln d_{s+1}(Y_1Y_2...Y_k)>R)>1\text{-}\varepsilon$$

3. Выберем (нетрудно видеть, что такой выбор возможен) семейство разбиений S_σ пространства $M(M=\bigcup_{q=1}^{k(\sigma)}M_{q\sigma}$ (зависящих от $\sigma>0$) и семейство непрерывных по p и измеримых по $\omega\in\Omega$ (в качестве Ω можно взять отрезок и требовать непрерывность по $(p,\omega)\in M\times\Omega$, а в случае $M=V^q$ классу C^r) отображений $\underline{B}_\sigma(p,\omega):M\times\Omega\to Hom(R^n,R^n)$ удовлетворяющие условиям (из дальнейших условий следует, что при $p\in FrM_{q\sigma}$ $B_\sigma(p,\omega)=0$)

1) при каждом $\sigma>0$ сужения $b_{\sigma,ij}(p,\omega)$ на $M_{q\sigma}\times\Omega(i,j=1,...,n;q=1,...,k(\sigma))$ независимы;

$$\int_0^1 b_{\sigma,ij}(f^tp,\omega)dt$$

2) плотности распределения величин не превосходят $C\sigma^{-1}$, где C — некоторая константа;

3) $\sup_{M\times\Omega}|b_{\sigma,ij}(p,\omega)|\leqslant C\sigma$;

4) $\int_\Omega B_\sigma(p,\omega)d\omega=0$ при всех $p\in M$

5) из $M_{q\sigma}\bigcap P_\sigma=\varnothing$ следует $M_{q\sigma}\bigcap f^tM_{q\sigma}=\varnothing$ при $1\leqslant t\leqslant N_\sigma$, где $N_\sigma=N\left(C,\sigma,-2\ln\frac{\sigma^2}{2},\sigma\right)$ (см. п. 2 выше), а $P_\sigma=\bigcup_{0\le t\le N_\sigma}\bigcup_{q\in Q_\sigma}f^tM_{q\sigma}$ где Q_σ — множество всех тех q, для которых $M_{q\sigma}\bigcap P\neq\varnothing$;

6) $m(P_\sigma)\underset{\sigma\to0}{\to}0$

4. Из условий на $B_\sigma(p,\omega)$ следует, что для всякого $\bar\varepsilon>0$ найдется $\delta_{\bar\varepsilon}>0$ такое, что для всяких R^k и R^{n-k} (k-мерного и $(n-k)$-мерного линейных подпространств R^n $(k=1,...,n-1)$) для каждого $p\in M$ множество тех $\omega\in\Omega$, для которых

$$Y(1,0;p,\omega)R^k\bigcap\widehat{R}^{n-k}(\delta_{\bar\varepsilon}\bullet\sigma)\neq\{0\},$$

имеет μ-меру $<\bar\varepsilon$ (здесь обозначено: $Y(t,\tau;p,\omega)$ — оператор Коши системы

$$\dot y=(A(f^tp)+B_\sigma(f^tp,\omega))y;$$

$R^{n-k}(\rho)$ — конус, являющийся объединением прямых, угол которых с подпространством R^{n-k} не превосходит ρ).

5. Пусть дано $\varepsilon>0$ (считаем, что $2\varepsilon<a=\sup_M\|A(p)\|$). Возьмем $\sigma>0$, для которого $\sigma<\varepsilon,C_\sigma<\varepsilon,m(P_\sigma)<\varepsilon,\sigma<\delta_\varepsilon$. Обозначим $Y_i(p,\omega)=Y((i+1)T,iT;p,\omega)$.

Обозначим через $\sum_{\sigma,p}$ объединение тех отрезков $[iT,(i+1)T]$, для которых $f^tp\in P_\sigma$ при некотором $t\in[iT,(i+1)T]$. Тогда для всякого $p\in M$ и для всякого $iT\notin\sum_{\sigma,p}$ найдется множество $\Omega_{p,i}\subset\Omega,\mu(\Omega_{p,i})<\varepsilon$ такое, что при $\omega\in\Omega_{p,i}$ имеем для $R=-\ln\frac{\sigma^2}{2}$

$$\| Y_i(p,\omega)y \| \bullet \| y \|^{-1} \geqslant d_k(Y_i(p,\omega))e^{-\frac{R}{2}} \geqslant d_{k+1}(Y_i(p,\omega))e^{\frac{R}{2}}$$

при всяком $y \notin \underline{\widehat{R}}^{n-k}_{i,p,\omega}(2e^{-\frac{R}{2}})$, где $R^{n-k}_{i,p,\omega}$ — подпространство, натянутое на последние (в порядке убывания собственных значений) $n-k$ собственных векторов оператора $Y_i^*(p,\omega)Y_i(p,\omega)$. Фиксируем любое $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ k-мерное подпространство $R^k \subset R^n$. Тогда при всяком $p \in M$ случайная величина

$$\xi_i(\omega) = \sup_{y \in R^k} \frac{1}{T}[\ln \| Y_i(p,\omega)Y_{i-1}(p,\omega)...Y_0(p,\omega)y \| -$$
$$- \ln \| Y_{i-1}(p,\omega)...Y_0(p,\omega)y \| - \ln d_{k+1}(Y_i(p,\omega))]$$

удовлетворяет неравенствам:

а) при $iT \notin \sum_{\sigma,p} : \xi_i(\omega) \geqslant -2a\chi_i(\omega) + \dfrac{R}{2T}$, где $\chi_i(\omega)$ — индикатор некоторого множества меры μ<3ε;

б) при $iT \in \sum_{\sigma,p} : \xi_i(\omega) \geqslant -2a$

Дальше доказательство идет подобно тому, как идет конец доказательства теоремы в [3].

Литература

1. M i l l i o n s c i k o v V. M. Actes, Congres Intern. Math., 1970, Paris, 1971, t. 2, p. 915—919. (Русский текст в книге: «Международный конгресс математиков в Ницце», 1970. Доклады советских математиков. М., «Наука», 1972, стр. 207—211).
2. М и л л и о н щ и к о в В. М. Математические заметки, 7, № 4, 1970; Письмо в редакцию, 9, № 4, 1971.
3. М и л л и н щ и к о в В. М. Дифференц. уравнения, 11, № 3, 1975.

Поступила в редакцию
2 декабря 1974 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова