ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2000. Т. 36, № 11. С. 1 – 10

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Ниже публикуются аннотации докладов, заслушанных в осеннем семестре 2000 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале "Дифференц. уравнения". 2000. Т. 36, № 6).

В. М. Миллионщиков (Москва) "Об условной экспоненциальной устойчивости по первому приближению" (29 сентября 2000 г.).

Теорема. *Пусть* f^t *– динамическая система (в смысле Маркова) на компактном гладком многообразии* V. *Пусть* E *– множество всех непрерывных отображений* $A(\cdot): V \to \mathrm{End}\,\mathbf{R}^n$, *наделенное топологией равномерной сходимости. Тогда в* E *имеется всюду плотное множество, для всякой точки* $A(\cdot)$ *которого множество тех* $x \in V$, *для которых система* $\dot{u} = A(f^t x)u$ *не принадлежит классу* SECAP *(см. [1]), имеет нулевую меру Лебега (для любой римановой метрики на* V*).*

Литература. 1. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 11. С. 2018.

В. М. Миллионщиков (Москва) "О степенных вспомогательных показателях" (6 октября 2000 г.).

Теорема. *Пусть* f^t *– непрерывное действие группы* $\mathbf{R}$ *на римановом многообразии* V. *Пусть* S *– множество всех ограниченных непрерывных отображений* $A(\cdot): V \to \mathrm{End}\,\mathbf{R}^n$, *наделенное топологией равномерной сходимости. Тогда для всякого* $p > 0$ *в пространстве* S *плотны те* $A(\cdot)$, *для которых показатели Ляпунова системы* $\dot{u} = A(f^t x)u$ *совпадают с ее вспомогательными показателями степени* p *(см. [1]) для почти всякого* $x \in V$ *(в смысле меры Лебега, заданной римановой метрикой па* V*).*

Литература. 1. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 6. С. 1085.

В. М. Миллионщиков (Москва) "Об экспоненциально инвариантных системах" (13 октября 2000 г.).

Теорема. *Пусть* f^t *– непрерывное действие группы* $\mathbf{R}$ *на* $\mathbf{R}^m$. *Пусть* S *– множество всех ограниченных непрерывных отображений* $A(\cdot): \mathbf{R}^m \to \mathrm{End}\,\mathbf{R}^n$, *наделенное топологией равномерной сходимости. Тогда в пространстве* S *плотны те* $A(\cdot)$, *для которых система* $\dot{u} = A(f^t x)u$ *принадлежит классу* EI *(см. [1]) для почти всякого (в смысле меры Лебега)* $x \in \mathbf{R}^m$.

Литература. 1. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 11. С. 2014.

В. М. Миллионщиков (Москва) "О вспомогательных логарифмических h-показателях" (20 октября 2000 г.).

Теорема. *Пусть* f^t *– непрерывное действие группы* $\mathbf{R}$ на *римановом многообразии* V. *Пусть* S *– множество всех ограниченных непрерывных отображений* $A(\cdot): V \to \operatorname{End}\mathbf{R}^n$, *наделенное топологией равномерной сходимости. Тогда для всякой гладкой функции* $h(\cdot): \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+_*$, *удовлетворяющей условиям* $h(t) \uparrow +\infty$, $(d/dt)(\ln h(t)) \to 0$ $(t \to +\infty)$, в *пространстве* S *плотны те* $A(\cdot)$, *для которых показатели Ляпунова системы* $\dot{u} = A(f^t x)u$ *совпадают с ее вспомогательными логарифмическими* h*-показателями (см. [1]) почти всюду на* V *(в смысле меры Лебега, определяемой римановой метрикой).*

Литература. 1. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 6. С. 1087.

В. М. Миллионщиков (Москва) "О системах Ляпунова – Перрона" (27 октября 2000 г.).

Теорема. *Пусть* f^t *– динамическая система (в смысле Маркова) на римановом многообразии* V. *Пусть* S *– множество всех ограниченных непрерывных отображений* $A(\cdot): V \to \operatorname{End}\mathbf{R}^n$, *наделенное метрикой равномерной сходимости. Тогда в любой окрестности всякой точки пространства* S *найдется* $A(\cdot)$ *такая, что множество тех* $x \in V$, *при которых система* $\dot{u} = A(f^t x)u$ *не принадлежит классу* LP *(см. [1]), имеет меру нуль.*

Литература. 1. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1936.

В. М. Миллионщиков (Москва) "О старшем показателе Ляпунова линейной системы, аналитически зависящей от параметра" (3 ноября 2000 г.).

Пусть дано семейство линейных систем

$$\dot{x} = A(t, \mu)x, \tag{1}$$

параметризованное комплексным параметром μ, где отображение $A(\cdot,\cdot): \mathbf{R}^+ \times D \to \operatorname{End}\mathbf{C}^n$ ограничено, непрерывно и при каждом значении первого аргумента аналитично по второму аргументу в области $D \subset \mathbf{C}$.

Теорема. *Старший показатель Ляпунова системы (1) как функция параметра* $\mu \in D$ *полунепрерывен сверху в каждой точке некоторого множества типа* G_δ, *дополнение которого в* D *имеет меру нуль.*

В. М. Миллионщиков (Москва) "Об упорядоченно-диагонализуемых системах" (10 ноября 2000 г.).

Теорема. *Пусть* f^t *– непрерывное действие группы* $\mathbf{R}$ *на римановом многообразии* V. *Пусть* S *– множество всех ограниченных непрерывных отображений* $A(\cdot): V \to \operatorname{End}\mathbf{R}^n$, *наделенное топологией равномерной сходимости. Тогда в пространстве* S *плотны те* $A(\cdot)$, *для которых система* $\dot{u} = A(f^t x)u$ *принадлежит классу* GROD *(см. [1]) для почти всякого* $x \in V$ *(в смысле меры Лебега, индуцированной римановой метрикой на* V*).*

Литература. 1. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 11. С. 2020.

В. М. Миллионщиков (Москва) "О старшем степенном вспомогательном показателе" (17 ноября 2000 г.)

Старший вспомогательный показатель степени $p>0$ системы $\dot{x}=A(t)x$, где $A(\cdot):\mathbf{R}^{+}\to \operatorname{End}\mathbf{K}^{n}$ ограниченное и непрерывное отображение, определяется формулой (ср. [1])

$$a^{p}(A):=\limsup_{m\to\infty}(Q_{p}(m))^{-1}\sum_{s=1}^{m-1}\ln\| X_{A}(Q_{p}(s+1),Q_{p}(s))\|,$$

где $Q_{p}(r):=\sum_{i=1}^{r}i^{p}$ (для всякого $r\in\mathbf{N}$), где $X_{A}(t,\tau)$ – оператор Коши.

Усреднение по промежуткам времени не одинаковой длины было впервые применено в теории показателей Ляпунова в работах Н. А. Изобова [2, 3] (где длины отрезков усреднения образовывали геометрические прогрессии).

Т е о р е м а . *Пусть отображение* $A(\cdot,\cdot):\mathbf{R}^{+}\times D\to \operatorname{End}\mathbf{C}^{n}$ *ограничено, непрерывно и при каждом значении первого аргумента аналитично по второму аргументу в области* $D\subset\mathbf{C}^{k}$.

Тогда при всяком $p>0$ *множество точек полунепрерывности сверху старшего вспомогательного показателя степени* p *системы* $\dot{x}=A(t,\mu)x$, *рассматриваемого как функция* $D\to\mathbf{R}$, *имеет тип* G_{δ}, *а мера его дополнения в* D *равна нулю.*

Л и т е р а т у р а . 1. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 6. С. 1085. 2. Изобов Н. А. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26, № 1. С. 5–8. 3. Изобов Н.А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 12. С. 2034–2055.

В. М. Миллионщиков (Москва) "О старшем показателе Ляпунова системы, аналитически зависящей от комплексных параметров" (24 ноября 2000 г.).

Посвящается столетию со дня рождения
Виктора Владимировича Немыцкого

Т е о р е м а . *Пусть дана задача Коши*

$$\dot{x}=f(t,x),\ x(0)=x_{0}(\mu), \tag{1}$$

решение которой определено на $\mathbf{R}^{+}$ *при всяком значении параметра* $\mu\in D$, *где* D – *некоторая область в* $\mathbf{C}^{k}$. *Здесь* $x_{0}(\cdot):D\to\mathbf{C}^{n}$ – *аналитическое отображение, а отображение* $f(\cdot,\cdot):\mathbf{R}^{+}\times G\to\mathbf{C}^{n}$, *где* G – *некоторая область в* $\mathbf{C}^{n}$, *непрерывно и при каждом значении первого аргумента аналитично по второму аргументу, причем его частная производная по второму аргументу ограничена вдоль решения задачи (1) при всяком* $\mu\in D$.

Тогда старший показатель Ляпунова системы уравнений в вариациях системы $\dot{x}=f(t,x)$ *вдоль решения задачи (1), рассматриваемый как функция параметра* $\mu\in D$, *полунепрерывен сверху в каждой точке плотного в* D *множества типа* G_{δ}, *дополнение которого в* D *имеет меру нуль.*

В. М. Миллионщиков (Москва) "О старшем логарифмическом показателе как функции комплексных параметров" (1 декабря 2000 г.).

Старший вспомогательный логарифмический h*-показатель* системы $\dot{x}=A(t)x$, где $A(\cdot):\mathbf{R}^{+}\to\operatorname{End}\mathbf{C}^{n}$ – ограниченное и непрерывное отображение, определяется формулой (ср. [1])

$$alh(A):=\limsup_{m\to\infty}(L_{h}(m))^{-1}\sum_{s=1}^{m-1}\ln\| X_{A}(L_{h}(s+1),L_{h}(s))\|,$$

для всякой гладкой функции $h(\cdot):\mathbf{R}^{+}\to\mathbf{R}_{*}^{+}$, удовлетворяющей условиям $h(t)\uparrow+\infty$, $(d/dt)(\ln h(t))\to 0$ $(t\to+\infty)$, где $L_h(r):=\sum_{i=1}^{r}h(i)\ln i$ (для всякого $r\in\mathbf{N}$), а $X_A(t,\tau)$ – оператор Коши. Ниже считается, что функция h с указанными свойствами фиксирована.

Усреднение по промежуткам времени не одинаковой длины в теории показателей Ляпунова было впервые применено в работах Н. А. Изобова [2, 3], в которых длины отрезков усреднения образовывали геометрические прогрессии.

Т е о р е м а . *Пусть решение задачи Коши*

$$\dot{x}=f(t,x),\ x(0)=x_0(\mu), \tag{1}$$

определено на $\mathbf{R}^{+}$ *при всяком* $\mu\in D$, *где* D *– некоторая область в* $\mathbf{C}^{k}$. *Пусть отображение* $x_0(\cdot):D\to\mathbf{C}^{n}$ *аналитическое, а отображение* $f(t,x):\mathbf{R}^{+}\times G\to\mathbf{C}^{n}$, *где* G *– некоторая область в* $\mathbf{C}^{n}$, *непрерывно, при каждом значении* $t\in\mathbf{R}^{+}$ *аналитично по* x, *и пусть его частная производная по* x *ограничена вдоль решения задачи (1) при всяком* $\mu\in D$.

Тогда показатель $\mathrm{al}h$ *системы уравнений в вариациях системы* $\dot{x}=f(t,x)$ *вдоль решения задачи (1), рассматриваемый как функция параметра* $\mu\in D$, *полунепрерывен сверху в каждой точке пересечения некоторой счетной совокупности открытых множеств, мера дополнения которого в* D *равна нулю.*

Л и т е р а т у р а . 1. Миллионщиков В. М. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 6. С. 1087. 2. Изобов Н. А. // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26, № 1. С. 5–8. 3. Изобов Н. А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 12. С. 2034–2055.