УДК 517.926.45

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНОСТИ ПОЧТИ ПРИВОДИМЫХ СИСТЕМ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Обозначения. Пусть $\varphi(t)$ — почти периодическая функция, $\mathfrak{D}_\varphi$ — порожденная ею динамическая система сдвигов, R_φ — пространство последней (например, R_φ — q-мерный тор, а $\mathfrak{D}_\varphi$ — его иррациональная обмотка); $C(\varphi, n)$ — пространство непрерывных отображений $A: R_\varphi \to Hom(R^n, R^n)$, наделенное равномерной метрикой.

Теорема. *Для всякой почти периодической функции* $\varphi(t)$ *и всякого* $n \in N$ те $A \in C(\varphi, n)$, *для которых система* $\dot{x} = A(\varphi(t))\dot{x}$ *почти приводима, типичны в* $C(\varphi, n)$ *(т. е. образуют всюду плотное* G_δ*).*

Доказательство 1. *При каждом* $k = 1,...,n$ *функция* $\Lambda_k(A) \underset{def}{=} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A)$ *полунепрерывна сверху на* $C(\varphi, n)$. *(Здесь* $\lambda_1(A) \geq ... \geq \lambda_n(A)$ — характеристические показатели системы $\dot{x} = A(\tilde{\varphi}(t))\dot{x}$ для почти всякой $\tilde{\varphi}(t) \in R_\varphi$ (в смысле единственной инвариантной меры системы $\mathfrak{D}_\varphi$)) (см. теорему 2 в [8].) Одно из доказательств этого утверждения весьма схоже с доказательством теоремы 2 в [10].

2. Кроме того, теорема пункта 1 вытекает в силу теорем 1, 2 из [8] из следующей теоремы: *Пусть система* $\dot{x} = A(t)x$ *статистически правильная; тогда для всякого* $\varepsilon>0$ *найдется* $\delta>0$ *такое, что у всякой системы* $\dot{y} = B(t)y$ *такой, что*

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \| B(\tau) - A(\tau) \| \, d\tau < \delta$$

всякие k решений $y_1(t),...,y_k(t)$ *удовлетворяют неравенству*

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \left| \bigwedge_{i=1}^{k} y_i(t) \right| < \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \varepsilon$$

где $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$ *— характеристические показатели системы* $\dot{x} = A(t)x$ *a* $\left|\bigwedge_{i=1}^{k} y_i(t)\right|$ *— объем (неориентированный) параллелепипеда, натянутого на векторы* $y_1(t),...,y_k(t)$

Эта теорема при $k = 1$ доказана в [7] (теорема 4), а при $k > 1$ (возмущение линейное) редуцируется к случаю $k = 1$ переходом от $\dot{y} = B(t)y$ к той линейной системе в $\bigwedge_{i=1}^{k} R^n$, среди решений которой содержатся внешние произведения всяких k решений системы $\dot{y} = B(t)y$; в координатах, индуцированных координатами $\xi_1,...,\xi_n$ [7, стр. 149], эта система будет иметь вид, аналогичный виду (25) — (27) [7, стр. 149], но диагональная матрица вместо чисел λ_i будет содержать числа $\sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s}$, а в неравенствах вида (26), (27) вместо 3η будет $O(\eta)$.

3. Из полунепрерывности сверху функций $\Lambda_k(A)$ вытекает в силу известной теоремы (см. [4], т. 1, стр. 181 —183; т. 2, стр. 79, следствие 1), что *множество точек*

непрерывности всех функций $\lambda_k(A)=\Lambda_k(A)-\Lambda_{k-1}(A)(k=1,...,n)$ *плотно в* $C(\varphi,n)(\Lambda_0(A)\underset{def}{=}0)$.

4. Мы будем все время предполагать, что $\varphi(t)$ — непериодическая (для периодической $\varphi(t)$ утверждение теоремы вытекает из теоремы Флоке — Ляпунова). Пусть A — точка непрерывности функций $\lambda_k(A)(k=1,...,n)$. Пусть дано $\varepsilon>0$. Возьмем $\delta>0$ такое, что для $D\in C(\varphi,n)$ из

$$|||D-A|||_{C(\varphi,n)}\underset{def}{=}\sup_{\tilde{\varphi}\in R_\varphi}\|D(\tilde{\varphi})-A(\tilde{\varphi})\|<2\delta$$

вытекает

$$|\lambda_k(D)-\lambda_k(A)|<\frac{\varepsilon}{80n^2}\quad(k=1,...,n)\tag{1}$$

В силу результата работы [9] найдется $B\in C(\varphi,n)$ такое, что: а) $|||B-A|||_{C(\varphi,n)}<\delta$ б) $\lambda_i(B)$ $(i=1,...,n)$ все различны.

5. Зафиксируем некоторую евклидову структуру в R^n. Если для некоторых *i*, *j* $|\lambda_i(B)-\lambda_i(B)|\geq\varepsilon$, а решения $x_{\tilde{\varphi},i}(t)$ и $x_{\tilde{\varphi},i_?}(t)$ систем $\dot{x}=B(\tilde{\varphi}(t))x$, имеющие $\lambda_i(B)$ и $\lambda_j(B)$ своими характеристическими показателями, не интегрально разделены, то конструкцией В. Л. Новикова [1] — Н. С. Фалько [2] находим для любого $\gamma>0$ такое $F:R_\varphi\to Hom(R^n,R^n)$, что:

а) F измеримо (в смысле единственной инвариантной меры *m* системы $\mathfrak{D}_\varphi$), при почти всяком $\tilde{\varphi}\in R_\varphi$ ортогональное дополнение к плоскости векторов $x_{\tilde{\varphi},i}(0),x_{\tilde{\varphi},j}(0)$ содержится в $Ker[F(\tilde{\varphi})-B(\tilde{\varphi})]$;

б) $\sup\limits_{\tilde{\varphi}\in R_\varphi}\|F(\tilde{\varphi})-B(\tilde{\varphi})\|<\gamma$

в) для некоторого *i* $\min\limits_{j=1,...,n}|\lambda_i(F)-\lambda_j(B)|>\dfrac{\varepsilon}{10n}$ а по F и любому $\beta>0$ находим $G\in C(\varphi,n)$ такое, что:

г) $\int\limits_{R_\varphi}\|G(\tilde{\varphi})-F(\tilde{\varphi})\|m(d\tilde{\varphi})<\beta$

д) $|||G-B|||_{C(\varphi,n)}<\gamma$

При этом $\gamma\in(0,\delta)$ берем таким, чтобы из б) (п. 5) вытекало

$$\Lambda_k(F)-\Lambda_k(B)<\frac{\varepsilon}{40n}\quad(k=1,...,n)\tag{2}$$

а $\beta>0$ таким, чтобы из г) (п. 5) вытекало

$$\Lambda_k(G)-\Lambda_k(F)<\frac{\varepsilon}{40n}\quad(k=1,...,n)\tag{3}$$

(такой выбор γ и β возможен в силу теорем из п. 1 и п. 2 и эргодической теоремы Биркгофа).

Из в) (п. 5) и неравенства (2) следует, что для некоторого $\bar{k}\Lambda_{\bar{k}}(F)-\Lambda_{\bar{k}}(B)<-\dfrac{\varepsilon}{20n}$.

Отсюда в силу (3) имеем $\Lambda_{\bar{k}}(G)-\Lambda_{\bar{k}}(B)<-\dfrac{\varepsilon}{40n}$ откуда в силу (1) (для $\mathfrak{D}=B$) получаем

$\Lambda_{\bar{k}}(G) - \Lambda_{\bar{k}}(A) < -\dfrac{\varepsilon}{80n}$ что в силу д) (п. 5) и неравенства $\gamma < \delta$ противоречит (1) (для $D = G$).

Противоречие доказывает, что решения $x_{\tilde{\varphi},i}(t)$ и $x_{\tilde{\varphi},j}(t)$ интегрально разделены.

6. Обозначим через N_m множество тех $A \in C(\varphi, n)$, для которых система $\dot{x} = A(\varphi(t))x$ некоторым ляпуновским преобразованием (никаких условий, например почти периодичности по t, на ляпуновское преобразование не накладывается) приводится к клеточно-диагональному виду, причем клетки интегрально разделены и $\Omega_i^0 - \omega_i^0 < \dfrac{1}{m}$ для всех i (где Ω_i^0 и ω_i^0 — соответственно верхний и нижний особые (генеральные) показатели подсистемы, соответствующей i-й клетке). Из доказанного в пп. 4—5 следует в силу известных результатов, что $\overline{N_m} = C(\varphi, n)$ для всякого $m \in N$.

7. Из теоремы Перрона — Былова — Винограда ([11], теорема 15.2.1) следует: 1) множество тех $A \in C(\varphi, n)$, для которых система $\dot{x} = A(\varphi(t))x$ почти приводима, совпадает с $\bigcap_{m=1}^{\infty} N_m$ 2) каждое N_m открыто в $C(\varphi, n)$. Их доказанных выше равенств $\overline{N_m} = C(\varphi, n)$ следует поэтому (в силу полноты пространства $C(\varphi, n)$), что $\bigcap_{m=1}^{\infty} N_m$ плотно в $C(\varphi, n)$. Доказательство закончено.

История вопроса. Формулировку этой теоремы я опубликовал в **[5]** (теоремы 2 и 3), после чего отказался от нее (см. **[6],** примечание на стр. 1983). Затем В. Л. Новиков доказал при $n = 2$ ослабленный вариант этой теоремы (см. [1]). Н. С. Фалько, усовершенствовав конструкцию В. Л. Новикова, доказал эту теорему при $n = 2$ (см. **[2])** и при $n = 3$ (см. **[3]).**

Литература

1. Новиков В. Л. Матем. заметки, 16, № 5, 1974.
2. Фалько Н. С. Дифференц. уравнения, 14, № 3, 1978.
3. Фалько Н. С. Дифференц. уравнения, 14, № 4, 1978.
4. Куратовский К. Топология. М., «Мир», т. I, 1966; т. 2, 1969.
5. Миллионщиков В. М. УМН, 23, вып. 2, 1968.
6. Миллионщиков В. М. Дифференц,. уравнения, 5, № 11, 1969.
7. Миллионщиков В. М. Матем. сб., 75 (117) : 1, 1968.
8. Миллионщиков В. М. Матем. сб., 77 (119) : 2, 1968.
9. Миллионщиков В. М. Дифференц. уравнения, 11, № 4, 1975.
10. Миллионщиков В. М. Матем. заметки, 5, № 1, 1969.
11. Былов Б. Ф., Виноград Р. 3., Гробман Д. М. Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию 20 декабря 1977 г.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова