Доклады Академии наук СССР
1965. Том 161, № 1

МАТЕМАТИКА

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

РЕКУРРЕНТНЫЕ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 13 X 1964)

Одним из основных фактов топологической теории динамических систем является теорема Г. Д. Биркгофа о том, что в каждой компактной динамической системе существует рекуррентное движение (см. ([1])). Если же система устойчива по Ляпунову, то это движение почти периодично. Для неавтономных систем это уже неверно. Однако В. В. Немыцкий высказал следующую гипотезу. Если разумным образом пополнить множество решений системы (предполагается, что у нее есть компактное инвариантное множество) некоторыми «предельными» траекториями, то в этом пополнении уже найдется рекуррентная траектория $x(t)$, а если наложить дополнительное условие типа устойчивости по Ляпунову, то $x(t)$ почти периодична.

В настоящей работе вводятся соответствующие определения и доказываются теоремы, подтверждающие гипотезу В. В. Немыцкого. Затем доказывается, что вместо существования инвариантного компакта $\boldsymbol{R}$ достаточно, чтобы нашлось решение $x(t)$ такое, что $x(t)\in R$ при $t\geqslant t_0$.

Дано уравнение

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t) \tag{1}$$

в отделимом локально выпуклом пространстве L. (В частности, в $n-$мерном пространстве E^n.)

Мы предполагаем сперва, что $f(x,t)$ ограничена (т. е. множество ее значений ограничено). В конце заметки мы выясним смысл этого ограничения и избавимся от него. $f(x,t)$ предполагаем непрерывной на $R\times E^1$, где компакт $R\subset L$ таков, что для всякого $x_0\in R$ и всякого t_0 существует решение (1) $x(t)$ такое, что $x(t_0)=x_0$ и $x(t)\in R$ при всех t. (Никаких других предположений, например единственности $x(t)$, не требуется.)

Множество функций $x(t)$ — решений (1) со значениями в R — обозначим E_0. Пусть

$$E_1=\bigcup_{-\infty<h<+\infty} T_h E_0,$$

Где T_h — оператор сдвига функций влево на h. Пусть $\tilde{L}$ — пространство равномерной сходимости на компактах непрерывных функций $x(t)$ со значениями в L и пусть E — замыкание E_1 в $\tilde{L}$. Очевидно, если $x(t)\in E$, то при всяком t $x(t)\in R$.

Определение 1. E назовем пополнением множества решений уравнения (1) в компакте R. Функции $x(t)\in E\setminus E_1$ назовем предельными решениями уравнения (1).

Определение 2. Назовем $R_1\subseteq R$ инвариантным (E), если для всякого $x_0\in R_1$ и всякого t_0 найдется функция такая, $x(t)\in E$ что $x(t_0)=x_0$, $x(t)\in R_1$ при всех t.

Инвариантный (E) компакт $R_1 \neq \varnothing$ называется минимальным (E) множеством, если никакой непустой компакт $R_2 \subseteq R_1$ (строгое включение) не является инвариантным (E).

Л е м м а 1. *Существует минимальное (E) множество* $\sum \subseteq R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . См. ([1]), стр. 401, доказательство теоремы 26, с той разницей, что так как вес τ пространства $R \subset L$ уже не обязательно счетный, то и обрыв строящейся там трансфинитной последовательности происходит на трансфинитном числе мощности τ (а не обязательно на трансфинитном числе из второго числового класса).

Л е м м а 2. *E компактно в* $\tilde{L}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Достаточно проверить условия теоремы Арцела (Асколи, см. ([2])).

Л е м м а 3. *Пусть* $R_1 \subseteq R$ *инвариантно* (E). *Тогда* $\overline{R_1}$ *инвариантно* (E).

Доказывается с помощью леммы 2.

Т е о р е м а 1. *Существует рекуррентная функция* $x(t) \in E$.

Доказывается с помощью лемм 1, 2 и 3.

Пусть теперь R не инвариантно, но существует $x_0(t)$ — решение (1) такое, что $x_0(t) \in R$ при $t \geqslant t_0$. Тогда обозначаем через E_0 множество функций $x(t)$ — решений (1) таких, что $x(t) \in R$ при $t \geqslant t_1(x(t))$. По E_0 строим E, как прежде.

Л е м м а 4. *Существует* $x(t) \in E$ *, определенная на всей прямой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из последовательности сдвигов $y_n(t) = T_n x_0(t)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (лемма 2). Область определения ее предела — вся прямая.

Т е о р е м а 2. *Пусть существует* $x_0(t)$ *— решение* (1) *такое, что* $x_0(t) \in R$ *при* $t \geqslant t_0$. *Тогда найдется рекуррентная функция* $x(t) \in E$*, определенная на всей прямой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . С помощью лемм 4, 3, 1 получаем существование минимального (E) множества $\sum \subseteq R$. Дальше так же, как в доказательстве теоремы 1.

О п р е д е л е н и е 3. Решение $x_0(t)$ $(t \geqslant t_0)$ назовем с о в е р ш е н н о у с т о й ч и в ы м п о Л я п у н о в у, если для всякой окрестности нуля $U \subset L$ существует окрестность нуля V такая, что для всяких t', t'', для которых $x(t') - x(t'') \in V$, выполнено $x(t'+t) - x(t''+t) \in U$ для всех $t > 0$.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть* $x_0(t)$ *совершенно устойчива по Ляпунову. Тогда найдется почти периодическая функция* $x(t) \in E$*, определенная на всей прямой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2 найдется рекуррентная функция $x(t) \in E$. Доказательство почти периодичности $x(t)$ сходно с рассуждениями ([1]), стр. 429.

Случай неограниченной $f(x,t)$, во избежание громоздких формулировок, рассмотрим, когда L нормируемо. Заменой времени $\tau(t) = \int\limits_0^t \alpha(\xi) d\xi$, где $\alpha(t) = \max\limits_{x \in R} \left\{ \| f(x,t) \| ; 1 \right\}$, система (1) приводится к виду $dx/dt = f_1(x,t)$, где $f_1(x,t)$ уже ограничена. В пополнении этой системы найдется рекуррентная траектория (теорема 2). При обратной замене времени (время при этом «сжимается») либо траектория останется рекуррентной в обычном смысле, либо на ней появится «бесконечная скорость», а в этом случае ее подавно имеет смысл называть рекуррентной.

В заключение приношу признательность В. В. Немыцкому за постановку задачи и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 X 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М. — Л., 1949. [2] N. Bourbaki, Topologie generale (Fascicule de resultats), Paris, 1953, ch. X, § 4, Theoreme 1.