ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

АВГУСТ 1981 г., ТОМ XVII, № 8

УДК 517.926.4

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

БЭРОВСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИИ И ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА. V

ВВЕДЕНИЕ

1. Статья продолжает цикл, начатый статьями [1—4].

Пусть (E,p,B)— векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$ и базой B (B — полное метрическое пространство, расстояние на котором обозначается через $d_B(\cdot,\cdot)$). На (E,p,B) фиксируем некоторую риманову метрику (см. [5], с. 58—59).

2. Рассмотрим гомоморфизм группы $\mathbf{Z}$ (группы $\mathbf{R}$) в группу изоморфизмов векторного расслоения (E,p,B) *. Образ точки t при этом гомоморфизме будем обозначать через $(X^t,\ \chi^t)$; вместо X^t пишем X, вместо $(\chi^1-\chi)$.

Предположим, что существует функция** $a(\cdot):B\to\mathbf{R}^+$, удовлетворяющая равенству $a(\chi^t b)=a(b)$ для всякого $b\in B$ и всякого $t\in\mathrm{Z}$ (соответственно $t\in\mathbf{R}$) и такая, что при всяком $t\in\mathbf{N}$ (соответственно $t\in\mathbf{R}^+$) имеет место неравенство

$$\max\left(\left\|X^t[b]\right\|,\left\|X^{-t}[b]\right\|\right)\leqslant\exp\left(ta(b)\right)\tag{1}$$

(норма линейного отображения слоя на слой определяется стандартным образом через нормы в слоях, индуцированные фиксированной выше римановой метрикой векторного расслоения (E,p,B)).

3. Положим при всяком $m\in N$

$$\left(X(m),\chi(m)\right)\underset{\text{def}}{=}(X^m,\chi^m).$$

Полученное таким образом семейство морфизмов $(X(m),\chi(m))$ $(m\in N)$ векторного расслоения (E,p,B) удовлетворяет следующему условию, сформулированному во введении к каждой из статей [1—4]: существует функция $a(\cdot):B\to R^+$ такая, что для всяких $b\in B$, $m\in N$ имеет место неравенство

$$\max(\|X(m,b)\|,\ \|[X(m,b)]^{-1}\|)\leqslant\exp(ma(b))\tag{1'}$$

---

* Напомним, что это означает следующее: при всяком $t\in Z$ ($t\in R$) даны X^t - гомеоморфизм E на E и χ^t – гомеоморфизм B на B такие, что $pX^t=\chi^t p$; при всяком $b\in B$ сужение $X^t[b]$ отображения X^t на слой $p^{-1}(b)$ есть линейное отображение $p^{-1}(b)\to p^{-1}(\chi^t b)$; при всяких $t,\ s\in Z$ (соответственно **R**) имеют место равенства $X^{t+s}=X^tX^s$, $\chi^{t+s}=\chi^t\chi^s$.

** Через $\mathbf{R}^+$ здесь и в [1-4] обозначается множество всех неотрицательных вещественных чисел.

(где через $X(m,b)$ обозначено сужение отображения $X(m)$ на слой $p^{-1}(b)$; таким образом, если $X(m)=X^m$, то $X(m,b)=X^m\left[b\right]$). Более того, так определенное семейство морфизмов $(X(m),\chi(m))$ $(m\in N)$ удовлетворяет условиям а)—в), сформулированным в [4, §3]; напомним здесь содержание этих условий:

а) $(X,\chi)\underset{\text{def}}{=}(X(1),\chi(1))$ - изоморфизм векторного расслоения (E,p,B);

б) при всяком $m\in N$ имеют место равенства

$$X(m)=X^m,\ \ \chi(m)=\chi^m;$$

в) существует функция $a(\cdot):B\to\mathbf{R}^+$ такая, что $a(\chi^m b)=a(b)$ для всяких $b\in B$, $m\in Z$ (в [4, § 3] полагалось по определению $\chi^0=1_B$, $\chi^{-1}=\left(\chi^{-1}\right)^m$ при $m\in N$; в рассматриваемой сейчас ситуации эти формулы также имеют место), и такая, что при всяком $b\in B$ имеет место неравенство

$$\max(\|X[b]\|,\|[X[b]]^{-1}\|\leqslant\exp(a(b)). \tag{1''}$$

Проверка всех этих утверждений тривиальна: из (1) при $t=m\in N$ получаем

$$\begin{gathered}\|X(m,b)\|=\|X^m[b]\|\leqslant\exp(ma(b)),\\ \|X^{-m}[b]\|\leqslant\exp(ma(b));\end{gathered} \tag{1'''}$$

заменив в последнем неравенстве b на $\chi^m b$, получаем

$$\|[X(m,b)]^{-1}\|=\|X^{-m}[\chi^m b]\|\leqslant\exp(ma(\chi^m b))=\exp(ma(b));$$

из последнего неравенства и неравенства (1''') следует неравенство (1'); положив в (1') $m=1$, получаем неравенство (1'').

4. Напомним определение насыщенного семейства морфизмов, данное в [4, § 3]:

Определение 1. Семейство морфизмов $\left(X(m),\chi(m)\right):(E,p,B)\to(E,p,B)$ $(m\in N)$ удовлетворяющее условиям а)—в) п. 3 введения, называется насыщенным, если для всякой точки $b\in B$ такой, что $\chi^m b\neq b$ при всяком $m\neq 0$, для всякого $\overline{\varepsilon}>0$, для всякого базиса $\left\{\xi_1,...,\xi_n\right\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ и всяких окрестностей $U(\xi_i)$ точек ξ_i $(i\in\left\{1,...,n\right\})$ (в пространстве *E)* найдется $\delta>0$ такое, что для всякого $t\in N$ и всяких невырожденных* линейных операторов

$$Y_m:p^{-1}(\chi^{m-1}b)\to p^{-1}(\chi^m b)$$

$(m\in\left\{1,...,\overline{t}\right\})$**, удовлетворяющих при всяком $m\in\left\{1,...,\overline{t}\right\}$ неравенству

$$\|Y_m(X[\chi^{m-1}b])^{-1}-I\|+\|X[\chi^{m-1}b]Y_m^{-1}-I\|<\delta, \tag{2}$$

найдется точка $b\in B$ такая, что

$$d_B(b',b)<\overline{\varepsilon}, \tag{3}$$

---

* То есть имеющих обратные.

** Через $\left\{1,...,s\right\}$ всюду в статье обозначается множество натуральных чисел, не превосходящих числа $s\in N$

и для всякого[***] $m \in \{0,...,\bar{t}\}$ найдется изоморфизм слоев (как евклидовых пространств)

$$\psi_m : p^{-1}(\chi^m b') \to p^{-1}(\chi^m b),$$

причем выполнены следующие требования:

i) $\psi_0^{-1}\xi_i \in U(\xi_i)$ при всяком $i \in \{1,...,n\}$;

ii) при всяком $m \in \{0,...,\bar{t}\}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(x^{m-1}b') \arrow[r, "X{[x^{m-1}b']}"'] \arrow[d, "\psi_{m-1}"] & p^{-1}(x^m b') \arrow[d, "\psi_m"] \\ p^{-1}(x^{m-1}b') \arrow[r, "Y_m"'] & p^{-1}(x^m b') \end{tikzcd} \tag{4}$$

коммутативна.

5. З а м е ч а н и е (уточнение определения 1). Это уточнение касается того, как понимать условие: $\chi^m b \neq b$ при всяком $m \neq 0$, накладываемое на точку b. Если семейство морфизмов $(X(m), \chi(m))$ $(m \in N)$ может быть получено способом, описанным выше в п. 3 введения, исходя из гомоморфизма группы $\mathbf{R}$ в группу изоморфизмов векторного расслоения (E, p, B) (причем этот гомоморфизм удовлетворяет условию, сформулированному в п. 2 введения (см. текст, содержащий формулу (1)), то будем понимать условие $\chi^m b \neq b$ при всяком $m \neq 0$ как условие $\chi^m b \neq b$ при всяком $t \in R \setminus \{0\}$. Теорема, доказанная в [4] (ее формулировка приведена в начале § 4 цитируемой статьи), полностью сохраняет силу и при такой трактовке определения насыщенного семейства. Доказательство этой теоремы, приведенное в статье [4], претерпевает при этом лишь следующее небольшое изменение: в пункте 2 доказательства под динамической системой χ^t надо понимать динамическую систему χ^t $(t \in N)$ (если точка b окажется периодической точкой динамической системы χ^t $(t \in R)$, то рассуждения, проводимые обычно при доказательстве теоремы Флоке, надо применить к семейству линейных отображений $X^t[b]$ $(t \in R)$).

§ 1. В этом параграфе рассматривается семейство морфизмов, построенное в § 2 [2].

1. Напомним построение этого параграфа. Пусть на полном метрическом пространстве $\mathfrak{B}$ задана динамическая система f^t (т. е. непрерывное действие группы $\mathbf{R}$). Фиксируем в пространстве $\mathbf{R}^n$ какую-нибудь евклидову структуру. Множество всех непрерывных отображений $A(\cdot) : \mathfrak{B} \to \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ (вместо $A(\cdot)$ пишем также A), удовлетворяющих условию $\sup\limits_{x \in \mathfrak{B}} \|A(x)\| < +\infty$, наделим структурой метрического пространства, определив расстояние формулой:

$$d_s(A_1, A_2) \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{x \in \mathfrak{B}} \|A_1(x) - A_2(x)\|.$$

[***] Через $\{0,...,s\}$ всюду в статье обозначается множество целых неотрицательных чисел, не превосходящих числа s (где $s+1 \in N$).

Так определенное метрическое пространство обозначим через S. Как известно, пространство S полно.

Для всяких $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$ рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x} \quad (\mathfrak{x} \in R^n).$$

Через $\mathfrak{X}(\theta,\tau;x,A)$ обозначим оператор Коши этой системы; напомним, что оператор Коши $\mathfrak{X}(\theta,\tau;x,A)$ по определению сопоставляет значение всякого решения системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$ в точке $t=\tau$ со значением того же решения в точке $t=\theta$. Как известно, $\mathfrak{X}(\theta,\tau;x,A)$ при всяких θ, $\tau \in \mathbf{R}$ непрерывно зависит от $(x,A) \in \mathfrak{B} \times S$.

Положим

$$B \underset{\text{def}}{=} S \times \mathfrak{B}, \quad E \underset{\text{def}}{=} B \times R^n, \quad p \underset{\text{def}}{=} pr_1 \tag{5}$$

(pr_1 — проекция произведения $B \times R^n$ на первый сомножитель). Расстояние в B определяется формулой

$$d_B((A_1,x_1),(A_2,x_2)) \underset{\text{def}}{=} d_S(A_1,A_2) + d_{\mathfrak{B}}(x_1,x_2) \tag{5'}$$

для всяких A_1, $A_2 \in S$, x_1, $x_2 \in \mathfrak{B}$, где $d_{\mathfrak{B}}(\cdot,\cdot)$ - расстояние в метрическом пространстве $\mathfrak{B}$. Хорошо известно (и легко доказывается), что из полноты метрических пространств S и $\mathfrak{B}$ следует полнота метрического пространства B. Топологическое пространство E определяется как произведение топологических пространств B и $\mathbf{R}^n$ ($E = B \times R^n$). E метризуемо и его топология индуцируется метрикой, определяемой по формуле

$$d_E((b_1,\mathfrak{x}_1), \ (b_2,\mathfrak{x}_2)) \underset{\text{def}}{=} d_B(b_1,b_2) + |\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2| \tag{5''}$$

(при всяких b_1, $b_2 \in B$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2 \in R^n$).

Расслоение (E,p,B), определенное формулами (5), естественным образом наделяется структурой (тривиального) векторного расслоения со слоем $\mathbf{R}^n$. Подробнее: пусть α, $\beta \in R$, $b \in B$, $\xi = (b,\mathfrak{x}) \in p^{-1}(b)$, $\eta = (b,\mathfrak{y}) \in p^{-1}(b)$ $(\mathfrak{x},\mathfrak{y} \in R^n)$. Тогда положим по определению

$$\alpha\xi + \beta\eta = \alpha(b,\mathfrak{x}) + \beta(b,\mathfrak{y}) \underset{\text{def}}{=} (b, \alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y}); \tag{5'''}$$

тем самым при всяком $b \in B$ на слое $p^{-1}(b)$ возникает структура векторного пространства (над полем вещественных чисел) (эту же структуру можно определить так: при всяком $b \in B$ сужение p_2,b на слой $p^{-1}(b)$ отображения pr^2 (pr^2 — проекция произведения $B \times \mathbf{R}^n$ на второй сомножитель) есть взаимно-однозначное отображение слоя $p^{-1}(b)$ на пространство $\mathbf{R}^n$); зададим на $p^{-1}(b)$ структуру векторного пространства (над полем вещественных чисел) так, чтобы $p_{2,}b$ было изоморфизмом векторных пространств); так определенная структура векторного пространства на всяком слое $p^{-1}(b)$ и вторая из формул (5) превращают расслоение (E,p,B) в (тривиальное) векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$.

На так определенном векторном расслоении (E,p,B) зададим риманову метрику, положив для всякого $b \in B$ и всяких $\mathfrak{X} \in \mathrm{R}^n$, $\mathfrak{y} \in \mathrm{R}^n$ по определению

$$\beta((b,\mathfrak{x}), \ (b,\mathfrak{y})) \underset{\text{def}}{=} \langle \mathfrak{x},\mathfrak{y} \rangle, \tag{5''''}$$

где $\langle \mathfrak{X},\mathfrak{y} \rangle$— скалярное произведение векторов $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{y} \in \mathbf{R}$ (евклидова структура в $\mathbf{R}^n$ была зафиксирована в начале п. 1, § 1).

При всяком $t \in \mathbf{R}$ определим морфизм (X^t,χ^t) построенного векторного расслоения (E,p,B) формулами:

$$X^t(A,x,\mathfrak{x}) \underset{\text{def}}{=} (A, f^t x,\ \ \mathfrak{X}(t,0;x,A)\mathfrak{X}), \tag{6}$$

$$\chi^t(A,x) \underset{\text{def}}{=} (A, f^t x) \tag{7}$$

(при всяких $A \in S,\ x \in \mathfrak{B},\ \mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n$).

Так как для всяких $t,s \in \mathbf{R}$ имеет место формула

$$f^{t+s} = f^t f^s, \tag{8}$$

то из (7) непосредственно следует, что для всяких $t,s \in \mathbf{R}$ имеет место формула

$$\chi^{t+s} = \chi^t \chi^s. \tag{9}$$

Напомним очевидные тождества:

$$\mathfrak{X}(\theta,0;f^\tau x, A) = \mathfrak{X}(\theta+\tau,\tau;x,A), \tag{10}$$

$$\mathfrak{X}(\theta,\sigma;x,A)\mathfrak{X}(\sigma,\tau;x,A) = \mathfrak{X}(\theta,\tau;x,A), \tag{11}$$

$$\mathfrak{X}(\theta,\theta;x,A) = 1_{R^n}, \tag{12}$$

которым удовлетворяет оператор Коши $\mathfrak{X}(\theta,\tau;x,A)$ системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$. Для всяких $t,s \in \mathbf{R}$, $A \in S,\ x \in \mathfrak{B},\ \mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n$ имеют место равенства:

$$X^t X^s(A,x,\mathfrak{x}) = X^t(A, f^s x, \mathfrak{X}(s,0;x,A)\mathfrak{x}) \underset{(6),(8)}{=} (A, f^{t+s}x,$$

$$\mathfrak{X}(t,0;f^S x, A)\mathfrak{X}(s,0;x,A)\mathfrak{x}) \underset{(10)}{=} (A, f^{t+s}x, \mathfrak{X}(t+s,s;x,A)\mathfrak{X}(s,0;$$

$$x,A)\mathfrak{x}) \underset{(11)}{=} (A, f^{t+s}x, \mathfrak{X}(t+s,0;x,A)\mathfrak{x}) \underset{(6)}{=} X^{t+s}(A,x,\mathfrak{x}).$$

Таким образом, для всяких $t,s \in \mathbf{R}$ справедливо

$$X^{t+s} = X^t X^s \tag{13}$$

При всяком $t \in \mathbf{R}$ имеют место формулы:

$$X^t X^{-t} \underset{(13)}{=} X^0 \underset{(6),(12)}{=} 1_E,\ \ X^{-t} X^t \underset{(13)}{=} X^0 \underset{(6),(12)}{=} 1_E,$$

$$\chi^t \chi^{-t} \underset{(9)}{=} \chi^0 \underset{(7)}{=} 1_B,\ \ \chi^{-t} \chi^t \underset{(9)}{=} \chi^0 \underset{(7)}{=} 1_B,$$

т.е. (X^{-t}, χ^{-t}) – морфизм векторного расслоения (E,p,B), обратный морфизму (X^t, χ^t); следовательно, (X^t, χ^t) - изоморфизм векторного расслоения (E,p,B).

Таким образом, (см.формулы (9), (13)) построен гомоморфизм группы $\mathbf{R}$ в группу изоморфизмов векторного расслоения (E,p,B); образом точки $t \in R$ при этом гомоморфизме является (X^{-t}, χ^t).

Определим функцию $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ формулой

$$a((A,x)) \underset{\text{def}}{=} \sup_{y \in \mathfrak{B}} \|A(y)\|. \tag{14}$$

Имеем

$$a(\chi^t(A,x)) \underset{(7)}{=} a((A, f^t x)) \underset{(14)}{=} \sup_{y \in \mathfrak{B}} \|A(y)\| \underset{(14)}{=} a((A,x)).$$

Справедливость при всяких $b \in B$, $t \in R^+$ неравенства (1) вытекает из формулы (6) в силу известного неравенства

$$\|\mathfrak{X}(t,0;x,A)\| \leqslant \exp\left|\int_0^t \|A(f^s x)\| ds\right| \underset{(14)}{\leqslant} \exp(|t| a((A,x))),$$

которому удовлетворяет оператор Коши системы $\dot{\mathfrak{X}} = A(f^t x)\mathfrak{X}$ при всяких $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$, $t \in R$.

Итак, построены объекты, о которых говорится в п. 2 введения (причем здесь возник тот вариант, в котором фигурирует группа $\mathbf{R}$ (а не Z)). Положив, как и в п. 3 введения, при всяком $m \in N$

$$(X(m), \chi(m)) \underset{\text{def}}{=} (X^m \chi^m),$$

получаем семейство морфизмов

$$(X(m),\chi(m)):(E,p,B)\to(E,p,B)$$

($m\in N$), удовлетворяющее условиям а) – в), сформулированным в п. 3 введения. Это и есть семейство морфизмов, построенное в § 2 [2].

2. Лемма 1. *Пусть в $\mathbf{R}^n$ фиксирована евклидова структура. Пусть дана линейная система дифференциальных уравнений*

$$\dot{\mathfrak{x}}=\mathfrak{A}(t)\mathfrak{x}\quad(\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n),\tag{15}$$

где $\mathfrak{A}(\cdot):R\to Hom(R^n,R^n)$ - непрерывное отображение, причем $\sup\limits_{t\in R}\left\|\mathfrak{A}(t)\right\|<+\infty$, и пусть $\mathfrak{X}(\theta,\tau)$ - оператор Коши * *системы (15).*

Тогда для всякого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для всякого $\bar{t}\in N$ и всяких невырожденных линейных операторов

$$W_m:R^n\to R^n\quad(m\in\left\{1,...,\bar{t}\right\}),$$

удовлетворяющих при всяком $m\in\left\{1,...,\bar{t}\right\}$ неравенству

$$\left\|W_m\left[\mathfrak{X}(m,m-1)\right]^{-1}-I\right\|+\left\|\mathfrak{X}(m,m-1)W_m^{-1}-I\right\|<\delta\tag{16}$$

найдется непрерывное отображение

$$\widehat{\mathfrak{A}}(\cdot):\left[0,\bar{t}\right]\to Hom(R^n,R^n)$$

такое, что:

а) $\sup\limits_{t\in\left[0,\bar{t}\right]}\left\|\widehat{\mathfrak{A}}(t)+\mathfrak{A}(t)\right\|<\varepsilon$;

б) $\widehat{\mathfrak{X}}(m,m-1)=W_m$ *при всяком* $m\in\left\{1,...,\bar{t}\right\}$, *где* $\widehat{\mathfrak{X}}(\theta,\tau)$ *- оператор Коши системы* $\dot{\mathfrak{X}}=\widehat{\mathfrak{A}}(t)\mathfrak{X}$.

Доказательство. Пусть дано $\varepsilon>0$. Возьмем

$$\delta\in(0,1)\tag{17}$$

такое, что выполнены следующие два неравенства:

$$\delta_1\underset{\text{def}}{=}\delta+(\delta+1)\delta\sup_{t\in R}\left\|\mathfrak{A}(t)\right\|<1,\tag{18}$$

$$\varepsilon_2+(\delta_1(1+\varepsilon_1)+\varepsilon_1)\sup_{t\in R}\left\|\mathfrak{A}(t)\right\|<\varepsilon,\tag{19}$$

где

$$\varepsilon_1\underset{\text{def}}{=}\delta_1(1-\delta_1)^{-1},\tag{20}$$

$$\varepsilon_2\underset{\text{def}}{=}\pi(1+\varepsilon_1)\delta_1\tag{21}$$

(такое δ существует, так как при $\delta>0$ левая часть неравенства (19) стремится к нулю).

Пусть дано $\bar{t}\in N$ и даны невырожденные линейные операторы

$$W_m:R^n\to R^n\quad(m\in\left\{1,...,t\right\}),$$

удовлетворяющие неравенству (16) при всяком $m\in\left\{1,...,\bar{t}\right\}$.

Введем обозначения (вместо $1_{\mathbf{R}^n}$ пишем I):

$$\left.\begin{aligned}&Z_0=I,\\&Z_m\underset{def}{=}W_m\left[\mathfrak{X}(m,m-1)\right]^{-1}\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

$$(m\in\left\{1,...,\bar{t}\right\}).$$

При всяких $m\in\left\{0,...,\overline{t-1}\right\}$, $t\in[0,1]$ положим

---

* Напомним, что оператор Коши $\mathfrak{X}(\theta,\tau)$ системы (15) по определению сопоставляет значение всякого решения системы (15) в точке $t=\theta$ со значением того же решения в точке $t=\theta$.

$$Z_{m,t} \underset{def}{=} \frac{1}{2}[(1+\cos\pi t)I + (1-\cos\pi t)Z_{m+1} +$$
$$+t(1+\cos\pi t)(Z_m\mathfrak{A}(m)Z_m^{-1} - \mathfrak{A}(m))]. \tag{23}$$

Пользуясь обозначениями (22), перепишем неравенство (16) в виде

$$\|Z_m - I\| + \|Z_m^{-1} - I\| < \delta. \tag{24}$$

Так как неравенство (16) имеет место при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$, а

$$\|Z_0 + I\| + \|Z_0^{-1} - I\| \underset{(22)}{=} 0,$$

то неравенство (24) имеет место при всяком $m \in \{0,...,\bar{t}\}$.

При всяких $m \in \{0,...,\bar{t}-1\}, t \in [0,1]$ имеем

$$\|Z_{m,t} - I\| \underset{(23)}{=} \left\| \frac{1}{2}(1+\cos\pi t)I + \frac{1}{2}(1-\cos\pi t)Z_{m+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}t(1+\cos\pi t)(Z_m\mathfrak{A}(m)Z_m^{-1} - \mathfrak{A}(m)) - I \right\| =$$
$$= \left\| \frac{1}{2}(1-\cos\pi t)(Z_{m+1} - I) + \frac{1}{2}t(1+\cos\pi t)(Z_m\mathfrak{A}(m)Z_m^{-1} - \mathfrak{A}(m)) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|Z_{m+1} - I\| + \|Z_m\mathfrak{A}(m)Z_m^{-1} - \mathfrak{A}(m)\|. \tag{25}$$

При всяком $m \in \{0,...,\bar{t}-1\}$ имеем

$$\|Z_m\mathfrak{A}(m)Z_m^{-1} - \mathfrak{A}(m)\| \leqslant \|Z_m\mathfrak{A}(m)Z_m^{-1} - Z_m\mathfrak{A}(m)\| +$$
$$+\|Z_m\mathfrak{A}(m) - \mathfrak{A}(m)\| \leqslant \|Z_m\| \cdot \|\mathfrak{A}(m)\| \cdot \|Z_m^{-1} - I\| + \|Z_m - I\| \cdot \|\mathfrak{A}(m)\| \leqslant$$
$$\leqslant (\|Z_m - I\| + 1) \cdot \|\mathfrak{A}(m)\| \cdot \|Z_m^{-1} - I\| + \|Z_m - I\| \cdot \|\mathfrak{A}(m)\| \leqslant$$
$$\leqslant (\|Z_m - I\| + 1)\|\mathfrak{A}(m)\|(\|Z_m - I\| + \|Z_m^{-1} - I\|) \underset{(24)}{\leqslant} (\delta+1)\delta \sup_{t\in R}\|\mathfrak{A}(t)\|. \tag{26}$$

Из неравенства (25) в силу неравенств (24) и (26) следует неравенство

$$\|Z_{m,t} - I\| < \delta + (\delta+1)\delta \sup_{t\in R}\|\mathfrak{A}(t)\| \underset{(18)}{=} \delta_1 \underset{(18)}{<} 1 \tag{27}$$

(при всяких $m \in \{0,...,\bar{t}-1\}, t \in [0,1]$). Хорошо известно (и легко доказывается), что отсюда следует, что при всяких $m \in \{0,...,\bar{t}-1\}$, $t \in [0,1]$ существует $Z_{m,t}^{-1}$ и имеет место формула:

$$Z_{m,t}^{-1} = \sum_{s=0}^{+\infty}(I - Z_{m,t})^s. \tag{28}$$

При всяких $m \in \{0,...,\bar{t}-1\}$, $t \in [0,1]$ имеем

$$\|Z_{m,t}^{-1} - I\| \underset{(28)}{=} \left\| \sum_{s=1}^{+\infty}(I - Z_{m,t})^s \right\| \leqslant \sum_{s=1}^{+\infty}\|I - Z_{m,t}\|^s \underset{(27)}{\leqslant} \delta_1(1-\delta_1)^{-1} \underset{(20)}{=} \varepsilon_1, \tag{29}$$

откуда

$$\|Z_{m,t}^{-1}\| \leqslant \|I\| + \|Z_{m,t}^{-1} - I\| \leqslant 1 + \varepsilon_1. \tag{30}$$

При всяких $m \in \{0,...,\bar{t}-1\}$, $t \in [0,1]$ имеем*

$$\|\dot{Z}_{m,t}Z_{m,t}^{-1}\| \leqslant \|\dot{Z}_{m,t}\| \cdot \|Z_{m,t}^{-1}\| \underset{(30)}{\leqslant} (1+\varepsilon_1)\|\dot{Z}_{m,t}\| \underset{(23)}{=}$$
$$\underset{(23)}{=} \frac{1}{2}(1+\varepsilon_1)\|\pi\sin\pi t(Z_{m+1} - I) + (1+\cos\pi t - \pi t\sin\pi t)(Z_m\mathfrak{A}(m)Z_m^{-1} -$$

* Точкой обозначается дифференцирование по t.

$$-\mathfrak{A}(m))\| \le \frac{\pi}{2}(1+\varepsilon_1)\|Z_{m+1}-I\| + \frac{2+\pi}{2}(1+\varepsilon_1)\|Z_m\mathfrak{A}(m)Z_m^{-1} -$$
$$-\mathfrak{A}(m)\| \underset{(24)}{<} \pi(1+\varepsilon_1([\delta + \|Z\,\mathfrak{A}(m)Z_m^{-1} - \mathfrak{A}(m)\|] \underset{(26)}{\le} \pi(1+\varepsilon_1)\times$$
$$\times\left[\delta + (\delta+1)\delta \sup_{t\in R}\|\mathfrak{A}(t)\|\right] \underset{(18)}{=} \pi(1+\varepsilon_1)\delta_1 \underset{(21)}{=} \varepsilon_2. \qquad (31)$$

При всяких $m \in \{0,...,\bar{t}-1\}$, $t \in [0,1)$, а также при $m = \bar{t}-1$, $t = 1$ положим

$$\widehat{\mathfrak{A}}(m+t) \underset{\text{def}}{=} (Z_{m,t}\mathfrak{X}(m+t,m))\cdot(Z_{m,t}\mathfrak{X}(m+t,m))^{-1}. \qquad (32)$$

Эта формула определяет отображение

$$\widehat{\mathfrak{A}}(\cdot):[0,\bar{t}] \to Hom\ (\mathbf{R}^{\mathrm{n}},\mathbf{R}^{\mathrm{n}}).$$

При всяких $m \in \{0,...,\bar{t}-1\}$, $t \in [0,1)$, а также при $m = \bar{t}-1$, $t = 1$ имеем

$$\widehat{\mathfrak{A}}(m+t) = (\dot{Z}_{m,t}\mathfrak{X}(m+t,m) + Z_{m,t}\dot{\mathfrak{X}}(m+t),m))(\mathrm{J}(m+t,m))^{-1}Z_{m,t}^{-1} =$$
$$= \dot{Z}_{m,t}Z_{m,t}^{-1} + Z_{m,t}\dot{\mathfrak{X}}(m+t,m)(\mathfrak{X}(m+t,m))^{-1}Z_{m,t}^{-1} =$$
$$= \dot{Z}_{m,t}Z_{m,t}^{-1} + Z_{m,t}\mathfrak{A}(m+t)Z_{m,t}^{-1}. \qquad (33)$$

Из формулы (23) следует, что для всяких $m \in \{0,...,\bar{t}-1\}$, $t \in [0,1]$ $Z_{m,t}$ непрерывно дифференцируемо по t и имеет место формула

$$\dot{Z}_{m,t} = \frac{\pi}{2}\sin\pi t(Z_{m+1}-I) +$$
$$+\frac{1}{2}(1+\cos\pi t - \pi t\sin\pi t)(Z_m\mathfrak{A}(m)Z_m^{-1} - \mathfrak{A}(m)). \qquad (34)$$

Из формул (23) и (34) следует, что при всяком $m \in \{0,...,\bar{t}-1\}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} &Z_{m,0} = I, Z_{m,1} = Z_{m+1},\\ &\dot{Z}_{m,0} = Z_m\mathfrak{A}(m)Z_m^{-1} - \mathfrak{A}(m),\\ &\dot{Z}_{m,1} = 0. \end{aligned} \qquad (35)$$

При всяком $m \in \{0,...,\bar{t}-1\}$ имеем

$$\lim_{t\to m-0}\widehat{\mathfrak{A}}(t) \underset{(33)}{=} \dot{Z}_{m-1,1}Z_{m-1,1}^{-1} + Z_{m-1,1}\mathfrak{A}(m)Z_{m-1,1}^{-1} \underset{(35)}{=} Z_m\mathfrak{A}(m)Z_m^{-1},$$
$$\lim_{t\to m-0}\widehat{\mathfrak{A}}(t) \underset{(33)}{=} \dot{Z}_{m,0}Z_{m,0}^{-1} + Z_{m,0}\mathfrak{A}(m)Z_{m,0}^{-1} \underset{(35)}{=}$$
$$\underset{(35)}{=} Z_m\mathfrak{A}(m)Z_m^{-1} - \mathfrak{A}(m) + \mathfrak{A}(m) = Z_m\mathfrak{A}(m)Z_m^{-1}.$$

Таким образом, доказано, что

$$\lim_{t\to m-0}\widehat{\mathfrak{A}}(t) = \lim_{t\to m+0}\widehat{\mathfrak{A}}(t)$$

при всяком $m \in \{0,...,\bar{t}-1\}$. Тем самым доказана непрерывность отображения $\widehat{\mathfrak{A}}(\cdot):[0,\bar{t}] \to Hom\ (\mathbf{R}^{\mathrm{n}},\mathbf{R}^{\mathrm{n}})$, определенного выше (см. (32)).

При всяких $m \in \left\{0,...,\bar{t}-1\right\}, t \in \left[0,1\right]$, а также при $m = t-1, t = 1$ имеем

$$\widehat{\mathfrak{A}}(m+t) - \mathfrak{A}(m+t) \underset{(33)}{=} \dot{Z}_{m,t}Z_{m,t}^{-1} + Z_{m,t}\mathfrak{A}(m+t)Z_{m,t}^{-1} - \mathfrak{A}(m+t) =$$
$$= \dot{Z}_{m,t}Z_{m,t}^{-1} + Z_{m,t}\mathfrak{A}(m+t)Z_{m,t}^{-1} - \mathfrak{A}(m+t)Z_{m,t}^{-1} + \mathfrak{A}(m+t)Z_{m,t}^{-1} -$$
$$-\mathfrak{A}(m+t) = \dot{Z}_{m,t}Z_{m,t}^{-1} + (Z_{m,t}-I)\mathfrak{A}(m+t)Z_{m,t}^{-1} + \mathfrak{A}(m+t)(Z_{m,t}^{-1} - I),$$

поэтому

$$\sup_{t\in[0,\bar{t}]}\left\|\hat{\ddot{\mathfrak{A}}}(t) - \ddot{\mathfrak{A}}(t)\right\| \leqslant \sup_{\substack{m\in\langle 0,...,\bar{t}-1\rangle\\ t\in[0,1]}}(\|\dot{Z}_{m,t}Z_{m,t}^{-1}\| + \|Z_{m,t}-I\|\cdot\|\ddot{\mathfrak{A}}(m+t)\|\times$$

$$\times\left\|Z_{m,t}^{-1}\right\|+\left\|\ddot{\mathfrak{A}}(m+t)\right\|\cdot\left\|Z_{m,t}^{-1}-I\right\|)\underset{(30),(29)}{\overset{(31),(27)}{\leqslant}}\varepsilon_2+(\delta_1(1+\varepsilon_1)+\varepsilon_1)\times$$

$$\times\sup_{t\in R}\left\|\ddot{\mathfrak{A}}(t)\right\|\underset{(19)}{<}\varepsilon. \tag{36}$$

Оператор Коши $\widehat{\mathfrak{X}}(\theta,\tau)$ системы $\dot{\mathfrak{x}}=\widehat{\ddot{\mathfrak{A}}}(t)\mathfrak{x}$ при всяких $m\in\left\{0,\dots,\bar{t}-1\right\},t\in\left[0,1\right]$, а также при $m=\bar{t}-1,t=1$ удовлетворяет равенству

$$\widehat{\mathfrak{X}}(m+t,m)=Z_{m,t}\mathfrak{X}(m+t,m), \tag{37}$$

так как имеют место равенства

$$Z_{m,0}\mathfrak{X}(m,m)\underset{(35)}{=}\mathfrak{X}(m,m)=I,$$

$$(Z_{m,t}\mathfrak{X}(m+t,m))\underset{(32)}{=}\widehat{\mathfrak{A}}(m+t)Z_{m,t}\mathfrak{X}(m+t,m).$$

Равенство (37) при $t=1$ превращается в следующее равенство:

$$\widehat{\mathfrak{X}}(m+1,m)=Z_{m,1}\mathfrak{X}(m+1,m)\underset{(35)}{=}Z_{m+1}\mathfrak{X}(m+1,m)\underset{(22)}{=}W_{m+1} \tag{38}$$

$$\left(m\in\left\{0,\dots,\bar{t}-1\right\}\right).$$

Из формул (36), (38) следует, что построенное непрерывное отображение $\widehat{\mathfrak{A}}(\cdot):[0,\bar{t}]\to\mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$ удовлетворяет требованиям а), б) (см. формулировку леммы 1). Лемма 1 доказана.

3 . Л е м м а 2. *Семейство морфизмов*

$$(X(m),\chi(m)):(E,p,B)\to(E,p,B)$$

$(m\in N)$*, построенное в п. 1 § 1, является насыщенным (определение насыщенного семейства морфизмов (см. п. 4 введения) понимается с тем уточнением, которое изложено в п. 5 введения).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В п. *1 § 1* доказано, что построенное там семейство морфизмов

$$(X(m),\chi(m)):(E,p,B)\to(E,p,B)$$

$(m\in N)$ удовлетворяет условиям а)—в), сформулированным в п. 3 введения. Пусть дана точка $b\in B$ такая, что $\chi^t b\neq b$ при всяком $t\in\mathbf{R}\setminus\left\{0\right\}$. В силу первой из формул (5) имеем: $b=(A,x)$, где* $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$. Так как

$$\chi^t(A,x)\underset{(7)}{=}(A,f^t x),$$

то из того, что $\chi^t b\neq b$ при всяком $t\in\mathbf{R}\setminus\left\{0\right\}$, следует, что

$$f^t x\neq x\ \text{(при всяком } t\in\mathbf{R}\setminus\left\{0\right\}\text{)}. \tag{39}$$

Из формулы (6) при $t=1$ имеем (напомним, что $X\underset{\mathrm{def}}{=}X^1$)

$$X(A,f^{m-1}x,\mathfrak{x})=(A,f^m x,\mathfrak{X}(1,0;f^{m-1}x,A)\mathfrak{x})\underset{(10)}{=}$$

$$\underset{(10)}{=}(A,f^m x,\mathfrak{X}(m,m-1;x,A)\mathfrak{x})$$

(при всяких $m\in N,\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n$), откуда следует, что**

$$(X[\chi^{m-1}b])_{R^n}=\mathfrak{X}(m,m-1;x,A) \tag{40}$$

---

* Подчеркнем, что, начиная с этого места до конца доказательства леммы 2, x обозначает фиксированную точку пространства B, A – фиксированную точку пространства S; при этом $b=(A,x)$.

** Если дано отображение $Y:p^{-1}(b_1)\to p^{-1}(b_2)$ слоя $p^{-1}(b_1)$ тривиального векторного расслоения $B\times\mathbf{R}^n(p\underset{\mathrm{def}}{=}pr_1)$ в слой $p^{-1}(b_2)$ того же расслоения, то через $(Y)\mathbf{R}^n$ обозначаем отображение $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ такое, что $Y((b_1,\mathfrak{X}))=(b_2,(Y)_{R^n}\mathfrak{X})$ для всякого $\mathfrak{X}\in\mathbf{R}^n$.

(соотношение (40) имеет место при всяком $m \in \mathbf{R}$, но в дальнейшем оно будет использовано при $m \in N$).

Пусть дано $\bar{\varepsilon} > 0,$ дан базис $\{\xi_1,...,\xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ (в силу определения, содержащего формулу (5'''), $\xi_i = (b, \mathfrak{x}_i)$ $(i \in \{1,...,n\}),$ где $\{\mathfrak{x}_1,...,\mathfrak{x}_n\}$ — некоторый базис пространства $\mathbf{R}^n$) и даны окрестности $U(\xi_i)$ точек ξ_i $(i \in \{1,...,n\})$ в пространстве $E \underset{(5)}{=} B \times \mathbf{R}^n$.

Возьмем $\varepsilon_1 \in (0, \bar{\varepsilon})$ такое, что при всяком $i \in \{1,...,n\}$ ε_1-окрестность *точки* ξ_i содержится в $U(\xi_i)$ *(т. е.* для всякого $i \in \{1,...,n\}$ всякое $(b_1, \mathfrak{x}) \in E$*, для* которого $d_E((b_i, \mathfrak{x}), (b, \mathfrak{x}_i)) < \varepsilon_1$, принадлежит множеству $U(\xi_i)$).

Положим для всякого $t \in \mathbf{R}$

$$\mathfrak{A}(t) \underset{\text{def}}{=} A(f^t x). \tag{41}$$

Формула (41) определяет непрерывное отображение $\mathfrak{A}(\cdot): \mathbf{R} \to \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n),$ причем

$$\sup_{t \in R} \|\mathfrak{A}(t)\| = \sup_{t \in R} \|A(f^t x)\| \leqslant \sup_{x \in \mathfrak{B}} \|A(x)\| < +\infty.$$

Рассмотрим систему (15), в которой $\mathfrak{A}(t)$ определим формулой (41). Оператор Коши этой системы в п. 1 § 1 обозначался через $\mathfrak{X}(\theta, \tau; x, A)$. Теперь, учитывая, что x и A фиксированы, будем обозначать его кратко: $\mathfrak{X}(\theta, \tau)$. С помощью этого сокращенного обозначения формула (40) записывается так:

$$\left(X\left[\chi^{m-1} b\right]\right)_{R^n} = \mathfrak{X}(m, m-1) \tag{42}$$

$$(m \in N)$$

Положим

$$\varepsilon \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{2n} \varepsilon_1. \tag{43}$$

По системе (15), в которой $\mathfrak{A}(t)$ задано формулой (41), и числу $\varepsilon > 0$, определенному формулой (43), возьмем $\delta > 0$, обладающее свойствами, сформулированными в лемме 1.

Пусть задано $\bar{t} \in N$ и заданы невырожденные линейные операторы

$$Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1} b) \to p^{-1}(\chi^m b) \tag{44}$$

$$\left(m \in \{1,...,\bar{t}\}\right),$$

удовлетворяющие при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ неравенству

$$\left\| Y_m \left(X\left[\chi^{m-1} b\right]\right)^{-1} - I \right\| + \left\| X\left[\chi^{m-1} b\right] Y_m^{-1} - I \right\| < \delta\,. \tag{45}$$

Неравенство (45) эквивалентно неравенству

$$\left\| (Y_m)_{R^n} \left((X\left[\chi^{m-1} b\right])_{R^n} \right)^{-1} - I \right\| + \left\| (X\left[\chi^{m-1} b\right])_{R^n} \left((Y_m)_{R^n} \right)^{-1} - I \right\| < \delta \tag{46}$$

(см. построение римановой метрики на векторном расслоении (E, p, B) в п. 1 § 1).

Введем обозначение

$$W_m \underset{\text{def}}{=} (Y_m)_{R^n} \quad (m \in \{1,...,\bar{t}\})\,. \tag{47}$$

С помощью формул (42) и (47) неравенство (46) переписывается в виде

$$\left\| W_m \left(\mathfrak{X}(m, m-1)\right)^{-1} - I \right\| + \left\| \mathfrak{X}(m, m-1) W_m^{-1} - I \right\| < \delta\,,$$

т. е. совпадает с неравенством (16).

Поскольку $\delta > 0$ было выбрано так, что оно обладает свойствами, сформулированными в лемме 1, то найдется непрерывное отображение

$$\widehat{\mathfrak{A}}(\cdot): \left[0, \bar{t}\right] \to Hom(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$$

такое, что

$$\sup_{t\in\left[0,\bar{t}\right]}\left\|\widehat{\ddot{\mathfrak{A}}}(t)-\ddot{\mathfrak{A}}(t)\right\|<\varepsilon \underset{(43)}{=} \frac{1}{2n}\varepsilon_1, \tag{48}$$

$$\widehat{\mathfrak{X}}(m,m-1)=W_m \tag{49}$$

(при всяком $m\in\left\{1,...,\bar{t}\right\}$), где $\widehat{\mathfrak{X}}(\theta,\tau)$ - оператор Коши системы $\dot{\mathfrak{x}}=\widehat{\mathfrak{A}}(t)\mathfrak{x}$.

Так как $f^t x\neq x$ при всяком $t\in R\setminus\left\{0\right\}$ (см. выше формулу (39)), то из равенства $f^t x=f^s x$ следует равенство $t=s$ (в самом деле, если $f^t x=f^s x$, то $f^{s-t}x=f^{-t}f^s x=f^{-t}f^t x=x$, откуда $s-t=0$).

Следовательно, формула

$$\varphi(f^t x)\underset{\text{def}}{=}t \quad (t\in R) \tag{50}$$

определяет (однозначное) отображение $\varphi(\cdot):\left\{f^t x\right\}_{t\in R}\to R$, являющееся обратным отображению $R\to\left\{f^t x\right\}_{tR}$, ставящему в соответствие числу $t\in R$ точку $f^t x$. Так как последнее отображение непрерывно, а $\left[0,\bar{t}\right]$— компакт, то множество

$$\mathcal{F}\underset{\text{def}}{=}\left\{f^t x\right\}_{t\in[0,\bar{t}]} \tag{51}$$

компактно, следовательно, замкнуто в $\mathfrak{B}$, а сужение отображения φ на множество $\mathcal{F}$ (это сужение обозначим через $\varphi_{\mathcal{F}}$) непрерывно. Так как отображения $\varphi_{\mathcal{F}}:\mathcal{F}\to R,\ \widehat{\mathfrak{A}}(\cdot):\left[0,\bar{t}\right]\to Hom(R^n,R^n)$ и $A_{\mathcal{F}}^{-1}(\cdot):\mathcal{F}\to Hom(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$, определенное формулой

$$A_{\mathcal{F}}^{-1}(y)\underset{def}{=}\widehat{\mathfrak{A}}(\varphi(y))-A(y) \tag{52}$$

(при всяком $y\in\mathcal{F}$), непрерывно. В силу (48), (50) — (52), (41) имеет место неравенство

$$\sup_{y\in\mathcal{F}}\left\|A_{\mathcal{F}}^{-1}(y)\right\|<\frac{1}{2n}\varepsilon_1 \tag{53}$$

Зафиксируем в $\mathbf{R}^n$ какой-нибудь ортонормированный базис и поставим в соответствие каждому элементу L множества $Hom(R^n,R^n)$, т. е. каждому линейному отображению $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, матрицу $\left\{l_{ij}\right\}_{i,j\in\{1,...,n\}}$, задающую это отображение в этом базисе. Хорошо известно (и легко доказывается)), что

$$\max_{i,j\in\{1,...,n\}}\left|l_{ij}\right|\leqslant\left\|L\right\|\leqslant n\max_{i,j\in\{1,...,n\}}\left|l_{ij}\right|. \tag{54}$$

Поставив в соответствие при всяком $y\in\mathcal{F}$ линейному отображению $A_{\mathcal{F}}^{-}(y)$ матрицу $\left\{a_{\mathcal{F},ij}^{-}(y)\right\}_{i,j\in\{1,...,n\}}$, задающую это отображение в фиксированном выше базисе, получаем n^2 отображений

$$a_{\mathcal{F},ij}^{-}(\cdot):\mathcal{F}\to R \quad (i,j\in\{1,...,n\}).$$

При этом из формул (53), (54) следует, что

$$\sup_{y\in\mathcal{F}}\max_{i,j\in\langle 1,...,n\rangle}\left|a_{\mathcal{F},ij}^{-}(y)\right|<\frac{1}{2n}\varepsilon_1, \tag{55}$$

т. *е.* мы имеем отображения:

$$a_{\mathcal{F},ij}^{-}(\cdot):\mathcal{F}\to\left[-\frac{1}{2n}\varepsilon_1,\frac{1}{2n}\varepsilon_1\right]$$

$$(i,j\in\{1,...,n\}).$$

Эти отображения непрерывны, так как отображение $A_{\mathcal{F}}^{-}(\cdot):\mathcal{F}\to\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$ непрерывно. В силу теоремы Титце о продолжении {см. [6] или, например, [7], с. 90—92, 170) при всяких $i,j\in\{1,...,n\}$ непрерывное отображение $a_{\mathcal{F},ij}^{-1}(\cdot)$ замкнутого подпространства

$\mathcal{F}$ метрического пространства $\mathfrak{B}$ в отрезок $\left[-\frac{1}{2n}\varepsilon_1, \frac{1}{2n}\varepsilon_1\right]$ может быть продолжено до непрерывного отображения

$$a_{ij}^{-}(\cdot):\mathfrak{B}\to\left[-\frac{1}{2n}\varepsilon_1, \frac{1}{2n}\varepsilon_1\right]. \tag{56}$$

Обозначив при всяком $y\in\mathfrak{B}$ через $A^{-}(y)$ линейное отображение $\mathbf{R}^n$ *в* $\mathbf{R}^n$, задаваемое в фиксированном выше базисе матрицей $\left\{a_{ij}^{-}(y)\right\}_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$, получаем непрерывное отображение*

$$A_{\mathcal{F}}^{-}(\cdot):\mathfrak{B}\to\mathrm{Hom}(R^n,R^n)$$

такое, что при всяком $t\in[0,\bar{t}]$ справедливо равенство

$$A^{-}(f^t x)=A_{\mathcal{F}}^{-}(f^t x)\underset{(50)-(52)}{=}\widehat{\mathfrak{A}}(t)-A(f^t x). \tag{57}$$

Это отображение $A^{-}(\cdot)$ удовлетворяет неравенству

$$\sup_{y\in\mathfrak{B}}\left\|A^{-}(y)\right\|\underset{(56),(54)}{\le}\frac{1}{2}\varepsilon_1<\varepsilon_1. \tag{58}$$

Положив (при всяком $y\in\beta$)

$$A'(y)\underset{\text{def}}{=}A^{-1}(y)+A(y), \tag{59}$$

получаем непрерывное отображение

$$A'(\cdot):\mathfrak{B}\to\mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$$

такое, что при всяком $t\in[0,\bar{t}]$ справедливо равенство

$$A'(f^t x)\underset{(59),(57)}{=}\hat{\hat{\mathfrak{A}}}(t). \tag{60}$$

Имеет место неравенство

$$\sup_{y\in\mathfrak{B}}\left\|A'(y)-A(y)\right\|\underset{(59),(58)}{<}\varepsilon_1 . \tag{61}$$

Так как $A\in S$, то $\sup\limits_{y\in\mathfrak{B}}\left\|A(y)\right\|<+\infty$, откуда в силу неравенства (61) следует, что $\sup\limits_{y\in\mathfrak{B}}\left\|A'(y)\right\|<+\infty$. Следовательно, непрерывное отображение $A'(\cdot)$ принадлежит пространству S.

Положим

$$b'\underset{\text{def}}{=}(A',x)\in B. \tag{62}$$

Так как $b=(A,x),\quad b'\underset{(62)}{=}(A',x)$ **, то**

$$d_B(b',b)\underset{(51)}{=}d_S(A',A)\underset{\text{def}}{=}\sup_{y\in\mathfrak{B}}\left\|A'(y)-A(y)\right\|\underset{(61)}{<}\varepsilon_1 \tag{63}$$

При всяком $m\in\left\{0,\dots,\bar{t}\right\}$ определим отображение

$$\psi_m:p^{-1}(\chi^m b')\to p^{-1}(\chi^m b)$$

формулой

$$\psi_m(\chi^m b',\mathfrak{x})\underset{\text{def}}{=}(\chi^m b,\mathfrak{x}) \tag{64}$$

(при всяком $\mathfrak{x}\in R^n$). Из этого определения в силу формул (5'''), (5'''') следует, что при всяком $m\in\left\{0,\dots,\bar{t}\right\}$ отображение ψ_m есть изоморфизм слоев как евклидовых пространств.

Рассмотрим формулу (64) при $m=0$: $\psi_0(b',\mathfrak{x})=(b,\mathfrak{x})$ (при всяком $\mathfrak{x}\in R^n$). Отсюда следует, что при всяком $\mathfrak{x}\in R^n$

---

* Отметим, что, хотя это не отражено в обозначении, отображение $A^{-}(y)$ зависит, вообще говоря, не только от ***A* и *x*, *но и от*** $\bar{t}$.

$$\psi_0^{-1}(b,\mathfrak{x}) = (b',\mathfrak{x}) \tag{65}$$

$$d_E(\psi_0^{-1}(b,\mathfrak{x}),(b,\mathfrak{x})) \underset{(65)}{=} d_E((b',\mathfrak{x}),(b,\mathfrak{x})) \underset{(5'')}{=} d_B(b',b) \underset{(63)}{<} \varepsilon_1$$

Полагая здесь $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_i$ *получаем (см. выше определение числа* ε_1*), что*

$$\psi_0^{-1}(\xi_i) \in U(\xi_i)$$

при всяком $i \in \{0,...,\bar{t}\}$, *т. е. выполнено требование* i*) определения 1. При всяком* $m \in N$ *имеет место равенство*

$$\left(X\left[\chi^{m-1}b'\right]\right)_{R^n} = \mathfrak{X}(m,m-1;x,A') \tag{66}$$

(выводящееся из формул (6) и (10) так же, как выше было выведено равенство (40)). Из того, что при всяком $m \in N$ имеет место равенство (66), вытекает, что при всяком $m \in N$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(\chi^{m-1}b') \arrow[r, "X\left[\chi^{m-1}b'\right]"'] \arrow[d, "p_{2,\chi^{m-1}b'}"] & p^{-1}(\chi^{m}b') \arrow[d, "p_{2,\chi^{m}b'}"] \\
R^n \arrow[r, "\mathfrak{X}(m,m-1;x,A')"'] & R^n
\end{tikzcd} \tag{67}$$

(напомним введенное в п. 1 § 1 обозначение: при всяком $\bar{b} \in B$ через $p_{2,\bar{b}}$ обозначается сужение на слой $p^{-1}(\bar{b})$ отображения pr_2 (где pr_2 — проекция произведения $B \times R^n$ на второй сомножитель); из формул (5''') и (б'''') следует, что при всяком $\bar{b} \in B$ отображение $p_{2,\bar{b}}$ есть изоморфизм евклидова пространства $p^{-1}(\bar{b})$ на евклидово пространство R^n. Утверждение о том, что из равенства (66) следует коммутативность диаграммы (67), вытекает непосредственно из определения операции $(\cdot)_{R^n}$ (см. сноску к формуле (40)); содержащееся в этой сноске равенство $Y((b_1,\mathfrak{x}))$=(b$_2(Y)_{R^n}\mathfrak{x})$ (для всякого $\mathfrak{x} \in R^n$) эквивалентно коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(b_1) \arrow[r, "Y"'] \arrow[d, "p_{2,b_1}"] & p^{-1}(b_1) \arrow[d, "p_{2,b_2}"] \\
R^n \arrow[r, "(Y)_{R^n}"'] & R^n
\end{tikzcd}$$

По той же причине из того, что при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ для операторов (44) имеют место формулы (47), (49), следует, что при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(\chi^{m-1}b) \arrow[r, "Y_m"'] \arrow[d, "p_{2,\chi^{m-1}b}"] & p^{-1}(\chi^{m}b) \arrow[d, "p_{2,\chi^{m}b}"] \\
{} & {}
\end{tikzcd} \tag{68}$$

$$R^n \xrightarrow{\widehat{\mathfrak{X}}(m,m-1)} R^n$$

коммутативна. Так как при всяком $\bar{b} \in B$ отображение $p_{2,\bar{b}}$ есть биекция $p^{-1}(\bar{b})$ на $\mathbf{R}^n$, то из коммутативности при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ диаграммы (68) следует, что при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
R^n \arrow[r, "\widehat{\mathfrak{X}}(m,m-1)"] \arrow[d, "(p_{2,\chi^{m-1}b})^{-1}"] & R^n \arrow[d, "(p_{2,\chi^{m}b})^{-1}"] \\
p^{-1}(\chi^{m-1}b) \arrow[r, "Y_m"'] & p^{-1}(\chi^{m}b)
\end{tikzcd} \tag{69}$$

коммутативна (для доказательства достаточно равенство

$$p_{2,\chi^m b} Y_m = \widehat{\mathfrak{X}}(m,m-1) p_{2,\chi^{m-1}b}$$

умножить слева на $(p_{2,\chi^m b})^{-1}$ и справа на $(p_{2,\chi^{m-1}b})^{-1}$. Так как при всяком $t \in [0,\bar{t}]$ имеет место формула (60), то при всяких θ, $\tau \in [0,\bar{t}]$ оператор Коши $\mathfrak{X}(\theta,\tau;x,A')$ системы $\mathfrak{x} = A'(f^t x)\mathfrak{x}$ совпадает с оператором Коши $\widehat{\mathfrak{X}}(\theta,\tau)$ системы $\mathfrak{x} = \widehat{\mathfrak{A}}(t)\mathfrak{x}$; в частности, при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ имеет место равенство

$$\mathfrak{X}(m,m-1;x,A') = \widehat{\mathfrak{X}}(m,m-1). \tag{70}$$

Так как при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ коммутативны диаграммы (67) и (69) и имеет место равенство (70), то при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(\chi^{m-1}b') \arrow[r, "X[\chi^{m-1}b']"] \arrow[d, "(p_{2,\chi^{m-1}b})^{-1} p_{2,\chi^{m-1}b'}"] & p^{-1}(\chi^{m}b') \arrow[d, "(p_{2,\chi^{m}b})^{-1} p_{2,\chi^{m}b'}"] \\
p^{-1}(\chi^{m-1}b) \arrow[r, "Y_m"'] & p^{-1}(\chi^{m}b)
\end{tikzcd}$$

Из определения отображений ψ_m (см. выше фразу, содержащую формулу (64)), следует, что при всяком $s \in \{1,...,\bar{t}\}$ имеет место равенство

$$(p_{2,\chi^3 b})^{-1} p_{2,\chi^3 b'} = \psi_s$$

Полагая в этом равенстве $s = m-1$, $s = m$, получаем, что при всяком $m \in \{1,...,\bar{t}\}$ диаграмма (71) совпадает с диаграммой (4). Таким образом, требование *ii*) определения 1 выполнено. Лемма 2 доказана.

§ 2. В силу леммы 2 семейство морфизмов, построенное в п. 1 § 1, удовлетворяет условиям теоремы статьи [4] (с уточнением, изложенным выше в п. 5 введения).

Здесь в заключение приведем формулировку теоремы из [4] применительно к семейству морфизмов, описанному в п. 1 § 1 настоящей статьи. В этой формулировке совсем не используется язык теории векторных расслоений; эта формулировка дана так, чтобы ее можно было понять, не обращаясь к [1—4] и к предшествующему ей тексту настоящей статьи (это не относится к некоторым сноскам, имеющимся ниже, но эти сноски служат только обоснованием, а не пояснением формулировки; для понимания формулировки чтение сносок не требуется).

Пусть на полном метрическом пространстве $\mathfrak{B}$ задана динамическая система f^t (т. е. непрерывное действие группы R). Фиксируем в пространстве $\mathbf{R}^n$ какую-нибудь евклидову структуру. Рассмотрим непрерывное отображение $A(\cdot):\mathfrak{B}\to \mathrm{Hom}\,(\mathrm{R}^n,\ \mathrm{R}^n)$, удовлетворяющее условию*

$$\sup_{x\in\mathfrak{B}}\|A(x)\|<+\infty .$$

Множество всех таких отображений $A(\cdot)$ (вместо $A(\cdot)$ пишем также $\boldsymbol{A}$**)** наделим структурой метрического пространства, определив расстояние формулой

$$d(A_1,A_2)\underset{\mathrm{def}}{=}\sup_{x\in\mathfrak{B}}\|A_1(x)-A_2(x)\| .$$

Так определенное полное метрическое пространство обозначим через *S*. Положим $B=S\times\mathfrak{B}$**.** При всяких $A\in S,\ x\in\mathfrak{B}$, рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathfrak{x}}=A(f^t x)\mathfrak{x}(\mathfrak{x}\in R^n)\ . \tag{*}$$

Обозначим через

$$\lambda_1(A,x)\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n(A,x)$$

показатели Ляпунова этой системы. Теорема статьи [4] применительно к данной ситуации состоит в следующем.

В пространстве $\boldsymbol{B}$ найдется всюду плотное множество $\boldsymbol{C}$ типа G_δ, обладающее свойством:

для всяких $(A,x)\in C,\ \ k\in\{1,\ldots,n-1\}$ имеет место альтернатива: либо $\lambda_{n-k}(A,x)=\lambda_{n-k+1}(A,x)$**,** либо подпространство $L^k(A,x)$ векторного пространства $L(A,x)$ всех решений системы (*), состоящее из решений, показатели Ляпунова которых $\leqslant\lambda_{n-k+1}(A,x)$, интегрально отделено от всякого своего алгебраического дополнения (в векторном пространстве $L(A,x)$**),** т. е. для всякого алгебраического дополнения L^{n-k} подпространства $L^k(A,x)$ (в векторном пространстве $L(A,x)$**)** существуют числа $\alpha>0,\ \beta>0$ такие, что для всяких ненулевых решений $\mathfrak{x}(\cdot)\in L^{n-k}$, $\mathfrak{y}(\cdot)\in L^k(A,x)$**,** для всяких вещественных** чисел $t\geqslant s\geqslant 0$ имеет место неравенство

$$|\mathfrak{x}(t)|\cdot|\mathfrak{x}(s)|^{-1}\geqslant\alpha\exp\left[\beta(t-s)\right]|\mathfrak{y}(t)|\cdot|\mathfrak{y}(s)|^{-1} .$$

З а м е ч а н и е*. Если при некотором $(A,x)\in C$ имеется $\boldsymbol{m}$ значений $\boldsymbol{\kappa}$**,** для которых $\lambda_{n-k}(A,x)\neq\lambda_{n-k+1}(A,x)$**,** то пространство решений системы (*) разлагается в прямую сумму $m+1$ подпространств, интегрально отделенных друг от друга, а именно пусть

$$\lambda_1(A,x)=\ldots=\lambda_{n-k_1}(A,x)>\lambda_{n-k_1+1}(A,x)=\ldots=\lambda_{n-k_2}(A,x)>\ldots$$
$$\ldots>\lambda_{n-k_m+1}(A,x)=\ldots=\lambda_n(A,x)\ ,$$

тогда

---

* Если $\mathfrak{B}$ - компакт, то это условие выполняется автоматически.

** Из условия, содержащего формулу (1) (для семейства морфизмов, построенного в п. 1 § 1, это условие выполнено), следует, что утверждение перейдет в эквивалентное, если слово «вещественных» заменить здесь словом «целых».

* Аналогичное замечание, очевидно, можно сделать и в той общей ситуации, которая рассмотрена в теореме [4].

$$L(A,x) = L^k{}_m(A,x) \oplus (L^k{}_{m-1}(A,x) \ominus L^k{}_m(A,x)) \oplus \ldots$$
$$\ldots(L(A,x) \ominus L^{k_1}(A,x)),$$
где через $L \ominus M$ обозначено произвольное алгебраическое дополнение подпространства $\boldsymbol{M}$ в векторном пространстве $\boldsymbol{L}$.

Примечание при корректуре. В сноске на с. 1591 в статье [2] вместо C^1 должно быть C^2. В [3] многообразие V^n всюду должно быть класса C^2.

Литература

1. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I,— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1408—1416.
2. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. II.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 9, с. 1587—1598.
3. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. III— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 10, с. 1766—1785.
4. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. IV,— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 3, с. 431—468.
5. ХьюзмоллерД. Расслоенные пространства.— М.: Мир, 1970.
6. Tietze H. Uber Funktionen die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind.— J. de Crelle, 1915, vol. 145, p. 9—14.
7. Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов.— М.: Наука, 1975.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
31 марта 1980 г