УДК 517.926.4

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

БЭРОВСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА. VI

Статья продолжает цикл работ [1—5] и представляет собой исправленное и дополненное изложение содержания начала п. 1 § 4 [3].

1. Пусть V^n — связное дифференцируемое (класса C^2)* n-мерное многообразие со счетной базой, на котором фиксирована некоторая риманова метрика $\delta(\cdot\,,\ \cdot)$ (класса C^1).

Как известно, с помощью этой римановой метрики многообразие V^n наделяется структурой метрического пространства; мы потребуем, чтобы это метрическое пространство (V^n,ρ) (где ρ — расстояние) было полным. Через $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ будем обозначать касательное расслоение многообразия V^n, через TV^n — пространство этого векторного расслоения, стандартным образом наделенное структурой дифференцируемого многообразия; зафиксированная нами риманова метрика, как известно, есть не что иное, как риманова метрика в (гладком) векторном расслоении $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ (определяемая, как в [6], гл. 3, определение 9.2, с той разницей, что здесь мы требуем, чтобы отображение *в* (здесь мы будем обозначать его через δ) было не только непрерывным, но и гладким (класса C^1)).

2. Пусть $f: V^n \to V^n$— диффеоморфизм (класса C^1). Потребуем, чтобы диффеоморфизм f удовлетворял следующему условию:

$$\max\left\{\|\|df\|\|, \|\|(df)^{-1}\|\|\right\} < +\infty\,, \tag{1}$$

где

$$\|\|df\|\| \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n} \|df_x\|, \tag{2}$$

$$\|\|(df)^{-1}\|\| \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n} \|(df_x)^{-1}\| \tag{3}$$

(диффеоморфизм $f: V^n \to V^n$ (класса C^1) — непрерывно дифференцируемое отображение V^n на V^n, имеющее обратное отображение $f^{-1}: V^n \to V^n$ которое тоже непрерывно дифференцируемо); через df_x обозначается производная отображения f в точке $x \in V^n$ (см. [7, с. 83], где определено* отображение df; там оно обозначено через $f_*: T(V^n) \to T(V^n)$; через df_x обозначаем сужение на касательное пространство $\pi^{-1}(x)$ отображения $df: TV^n \to TV^n$; для всякого дифференцируемого отображения f его производная df_x в точке x есть линейное отображение касательного пространства $\pi^{-1}(x)$ в точке x в касательное пространство $\pi^{-1}(fx)$ в точке fx; для диффеоморфизма f это линейное отображение есть невырожденное отображение $\pi^{-1}(x)$ на $\pi^{-1}(fx)$; зафиксированная риманова метрика на V^n индуцирует на касательных пространствах многообразия V^n структуры евклидовых пространств, что позволяет определить норму производной в точке как норму линейного оператора; теперь условие на f полностью разъяснено; отметим дополнительно, что $1 = \|1_{\pi^{-1}(fx)}\| = \|(df_x)(df_x)^{-1}\| \leqslant \|df_x\|\cdot\|(df_x)^{-1}\| \underset{(3)}{\overset{(2)}{\leqslant}} \|\|df\|\| \times \|\|(df)^{-1}\|\| \leqslant (\max\left\{\|\|df\|\|, \|\|(df)^{-1}\|\|\right\})^2$, откуда

$$\max\left\{\|\|df\|\|, \|\|(df)^{-1}\|\|\right\} \geqslant 1. \tag{4}$$

---

* Всюду в [3] многообразие V^n должно быть класса C^2, а не C^1.

* Определяя df, согласно [7, с. 83], нужно «обеднить» дифференциальную структуру многообразия V^n, рассмотрев его как многообразие класса C^1.

Множество S всех диффеоморфизмов $f: V^n \to V^n$ (класса C^1), удовлетворяющих условию (1), наделим структурой метрического пространства, зафиксировав некоторую точку $x_0 \in V^n$ и задав для всяких $f_1 \in S,\ f_2 \in S$ расстояние $d_S(f_1, f_2)$ формулой**:

$$d_S(f_1, f_2) \underset{def}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{u_t \in G(f_1 x, f_2 x)} \{\min\{s(u_t), [1+\rho(x, x_0)]^{-1}\} +$$
$$+\left\|\varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x}\right\| + \left\|(\varphi_{u_t} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1}\right\|\}; \tag{5}$$

здесь для всяких $y_1 \in V^n,\ y_2 \in V^n$ через $G(y_1, y_2)$ обозначается множество всех кусочно-гладких кривых (путей)***, соединяющих точку y_2 с точкой y_1; при этом под кусочно-гладкой кривой (путем), соединяющей точку y_2 с точкой y_1, понимается непрерывное отображение отрезка [0, 1] в многообразии V^n, причем это отображение имеет кусочно-непрерывную производную и значение этого отображения при $t=0$ равно $y_2 (u_t|_{t=0} = y_2)$, а его значение при $t=1$ равно $y_1 (u_t|_{t=1} = y_1)$, как известно, из связности дифференцируемого многообразия V^n вытекает, что $G(y_1, y_2) \neq \varnothing$ для всяких точек $y_1 \in V^n,\ y_2 \in V^n$ (в частности, $G(y,\ y)$ содержит кривую (путь) $u_t \equiv y \quad (t \in [0,1])$); далее, $s(u_t) \underset{def}{=} \int_0^1 [\delta(\dot{u}_t, \dot{u}_t)]^{\frac{1}{2}}\, dt$ — длина кривой (пути) u_t (в частности, длина кривой (пути) $u_t \equiv y$ равна нулю); $\varphi_{u_t}: \pi^{-1}(y_2) \to \pi^{-1}(y_1)$ — параллельный перенос вдоль кривой (пути) $u_t \in G(y_1, y_2)$ (для всякого $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(y_2)$ вектор $\varphi_{u_t}\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(y_1)$ по определению есть результат параллельного перенесения вектора J вдоль кривой (пути) u_t); параллельное перенесение осуществляется с помощью римановой связности, индуцированной фиксированной в п. 1 римановой метрикой $\delta(\cdot,\ \cdot)$; известно, что так определенное отображение $\varphi_{u_t}: \pi^{-1}(y_2) \to \pi^{-1}(y_1)$ есть изоморфизм касательных пространств (как евклидовых пространств; структуры евклидовых пространств индуцированы в касательных пространствах многообразия V^n римановой метрикой $\delta(\cdot,\ \cdot)$); в частности, если $u_t \equiv y$, то $\varphi_{u_t} = 1_{\pi^{-1}(y)}$.

Еще пояснения к формуле (5): $df_{ix} \quad (i \in \{1,\ 2\})$ — производная отображения $f_i: V^n \to V^n$ в точке $x \in V^n$; $df_{ix} \quad (i \in \{1,\ 2\})$ есть, следовательно, линейное отображение $\pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(f_i x)$; если $u_1 \in G(f_1 x, f_2 x)$, то φ_{u_t} есть линейное отображение $\pi^{-1}(f_2 x) \to \pi^{-1}(f_1 x)$; следовательно, $\varphi_{u_t} df_{2x}$ есть линейное отображение $\pi^{-1}(x') \to \pi^{-1}(f_1 x)$, и, таким образом, разность $\varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x}$ определена и является линейным отображением $\pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(f_1 x)$; $\left\|\varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x}\right\| \in R^+$ есть норма этого линейного отображения.

3. Докажем, что формула (5) в самом деле определяет расстояние на множестве S всех диффеоморфизмов $f: V^n \to V^n$ класса C^1, удовлетворяющих условию (1).

а) Для всяких $f_1 \in S,\ f_2 \in S$ имеет место неравенство $d_S(f_1, f_2) < +\infty$.

Докажем это. Пусть $f_1 \in S,\ f_2 \in S$. Для всякого $x \in V^n$ для всякой кривой (пути) $u_t \in G(f_1 x, f_2 x)$ имеем

$$\min\left\{s(u_t),\ [1+\rho(x, x_0)]^{-1}\right\} \leqslant [1+\rho(x, x_0)]^{-1} \leqslant 1. \tag{6}$$

Для всяких $x \in V^n$, $u_t \in G(f_1 x, f_2 x)$ имеем

$$\left\|\varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x}\right\| \leqslant \left\|\varphi_{u_t} df_{2x}\right\| + \left\|df_{1x}\right\| \leqslant \left\|\varphi_{u_t}\right\| \cdot \left\|df_{2x}\right\| + \left\|df_{1x}\right\| =$$

** В статье [3] формула (12) написана неправильно. Приводимая здесь формула (5) является ее исправленным вариантом.

*** Встречающееся далее выражение: «кривая (путь) u_t лежит в множестве M», где $M \subset V^n$, означает: «Все значения отображения u_t принадлежат множеству M».

$$=\left\|df_{2x}\right\|+\left\|df_{1x}\right\|\underset{(2)}{\leqslant}\left\|\left|df_2\right|\right\|+\left\|\left|df_1\right|\right\| \tag{7}$$

(равенство в цепочке (7) вытекает из равенства

$$\left\|\varphi_{u_t}\right\|=\left\|(\varphi_{u_t})^{-1}\right\|=1, \tag{8}$$

вытекающего в свою очередь из того, что φ_{u_t}, как было отмечено выше, изоморфизм слоев касательного расслоения как евклидовых пространств). Для всяких $x\in V^n$, $u_t\in G(f_1x, f_2x)$ имеем

$$\left\|(\varphi_{u_t}df_{2x})^{-1}-(df_{1x})^{-1}\right\|\leqslant\left\|(df_{2x})^{-1}(\varphi_{u_t})^{-1}\right\|+\left\|(df_{1x})^{-1}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|(df_{2x})^{-1}\right\|\cdot\left\|(\varphi_{u_t})^{-1}\right\|+\left\|(df_{1x})^{-1}\right\|\underset{(8)}{=}\left\|(df_{2x})^{-1}\right\|+$$

$$+\left\|(df_{1x})^{-1}\right\|\underset{(3)}{\leqslant}\left\|\left|(df_2)^{-1}\right|\right\|+\left\|\left|(df_1)^{-1}\right|\right\|. \tag{9}$$

Из формулы (5) в силу неравенств (6), (7), (9) следует

$$d_S(f_1, f_2)\leqslant 1+\left\|\left|df_1\right|\right\|+\left\|\left|(df_1)^{-1}\right|\right\|+\left\|\left|df_2\right|\right\|+\left\|\left|(df_2)^{-1}\right|\right\|\underset{(1)}{<}+\infty, \tag{10}$$

так как $f_1\in S,\ f_2\in S$. Утверждение, сформулированное в начале подпункта а), доказано.

б) Для всяких $f_1\in S,\ f_2\in S$ имеет место неравенство

$$d_S(f_1, f_2)\geqslant 0. \tag{11}$$

Это утверждение непосредственно следует из формулы (5). Итог подпунктов а) и б): $d_S(\cdot,\ \cdot)$ есть отображение $S\times S\to R^+$.

в) Для всякого $f\in S$ имеет место равенство

$$d_S(f, f)=0. \tag{12}$$

Докажем это. Пусть $f\in S$. Для всякого $x\in V^n$ множество $G(fx, fx)$ содержит кривую (путь) $u_t(x)\equiv fx\quad (t\in[0,1])$. Для такой кривой (пути), как было отмечено в пояснениях к формуле (5), определяющей расстояние $d_S(f_1, f_2)$, имеют место равенства $s(u_t(x))=0,\ \ \varphi_{u_t(x)}=1_{\pi^{-1}(fx)}$, поэтому при всяком $x\in V^n$ имеют место равенства

$$\min\left\{s(u_t(x)),\ \ [1+\rho(x,x_0)]^{-1}\right\}=0,$$

$$\left\|\varphi_{u_t(x)}df_x-df_x\right\|=0,\quad \left\|(\varphi_{u_t(x)}df_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\right\|=0.$$

Сложив эти три равенства, получаем при всяком $x\in V^n$ равенство

$$\min\left\{s(u_t(x)),\ \ [1+\rho(x,x_0)]^{-1}\right\}+\left\|\varphi_{u_t(x)}df_x-df_x\right\|+$$

$$+\left\|(\varphi_{u_t(x)}df_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\right\|=0 \tag{13}$$

Так как $u_t(x)\in G(fx, fx)$ при всяком $x\in V^n$, то при всяком $x\in V^n$ из равенства (13) следует неравенство

$$\begin{gathered} i(x)\underset{\text{def}}{=}\inf_{u_t\in G(fx, fx)}\{\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+ \\ +\|\varphi_{u_t}df_x-df_x\|+\|(\varphi_{u_t}df_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\|\}\leqslant 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Так как неравенство (14) выполнено при всяком $x\in V^n$, то $d_S(f, f)\overset{(5)}{\underset{(14)}{=}}\sup\limits_{x\in V^n} i(x)\leqslant 0$. Сопоставлением этого неравенства с неравенством (11) (взятым при $f_1=f_2=f$) заканчивается доказательство равенства (12). Утверждение, сформулированное в начале подпункта в), доказано.

г) Если $f_1\in S$, $f_2\in S$ и имеет место равенство

$$d_S(f_1, f_2)=0, \tag{15}$$

то $f_1=f_2$.

Докажем это. Пусть $f_1\in S$, $f_2\in S$ и имеет место равенство (15). Тогда для всякого $x\in V^n$ имеем

$$\rho\,(f_1x,\,f_2x) \underset{\text{def}}{=} \inf_{u_t\in G\,(f_1x,\,f_2x)} s\,(u_t). \tag{16}$$

Далее, при всяком $x\in V^n$ имеем

$$\inf_{u_t\in G\,(f_1x,\,f_2x)}\{\min\{s\,(u_t),\ [1+\rho\,(x,\ x_0)]^{-1}\}\} \underset{(5)}{\leqslant} d_S(f_1,\,f_2) \underset{(15)}{=} 0. \tag{17}$$

При всяком $x\in V^n$ имеем

$$\begin{gathered}\inf_{u_t\in G\,(f_1x,\,f_2x)}\{\min\{s\,(u_t),\ [1+\rho\,(x,\ x_0)]^{-1}\}\} = \min\{\{\inf_{u_t\in G\,(f_1x,\,f_2x)}\{s\,(u_t)\},\\ [1+\rho\,(x,\ x_0)]^{-1}\} \underset{(16)}{=} \min\{\rho\,(f_1x,\,f_2x),\ [1+\rho\,(x,\ x_0)]^{-1}\};\end{gathered} \tag{18}$$

первое равенство в цепочке равенств (18) следует из формулы $\inf\limits_{a\in A}\min\{\alpha\,(a),\ \beta\}\} = \min\{\{\inf\limits_{a\in A}\alpha\,(a)\},\ \beta\}$, которая имеет место для всякой функции $\alpha\,(\cdot): A\to \mathbf{R}$ (где A — произвольное множество) и всякого числа $\beta\in\mathbf{R}$; эта формула есть частный случай хорошо известной (и легко доказываемой) формулы $\inf\limits_{a\in A}\inf\limits_{b\in B}\alpha\,(a,\ b) = \inf\limits_{b\in B}\inf\limits_{a\in A}\alpha\,(a,\ b)$, где A, B — произвольные множества, а $\alpha\,(\cdot,\ \cdot): A\times B\to\mathbf{R}$ — произвольная функция.

При всяком $x\in V^n$ имеем

$$\min\{\rho\,(f_1x,\,f_2x),\ [1+\rho\,(x,\ x_0)]^{-1}\} \overset{(17)}{\underset{(18)}{\leqslant}} 0. \tag{19}$$

Так как $[1+\rho\,(x,\ x_0)]^{-1}>0$ при всяком $x\in V^n$, то $\rho\,(f_1x,\,f_2x) \underset{(19)}{=} 0$ при всяком $x\in V^n$. Следовательно, $f_1x = f_2x$ при всяком $x\in V^n$. Таким образом, $f_1=f_2$, т. е. утверждение, сформулированное в начале подпункта г), доказано.

д) Для всяких $f_1\in S$, $f_2\in S$ имеет место равенство $d_S(f_1,\,f_2) = d_S(f_2,\,f_1)$.

Докажем это. Пусть $f_1\in S$, $f_2\in S$. Для всяких $y_1\in V^n$, $y_2\in V^n$ для всякой кривой (пути) $u_t\in G\,(y_1,\ y_2)$ кривая (путь) u_{1-t} принадлежит множеству $G\,(y_2,\ y_1)$. Обратно, всякая кривая $v_t\in G\,(y_2,\ y_1)$ может быть представлена в виде $v_t = u_{1-t}$, где $u_t\in G\,(y_1,\ y_2)$ (доказательство: положим $u_t = v_{1-t}$). При этом

$$s\,(u_{1-t}) = s\,(u_t), \tag{20}$$

$$\varphi_{u_{1-t}} = (\varphi_{u_t})^{-1} \tag{21}$$

(формулы (20), (21) вытекают непосредственно из определений длины кривой и параллельного перенесения вдоль кривой (пути)).

Для всякого $x\in V^n$ для всякой кривой (пути) $u_t\in G\,(f_1x,\,f_2x)$ имеет место равенство $\varphi_{u_t}df_{2x} - df_{1x} = \varphi_{u_t}[df_{2x} - (\varphi_{u_t})^{-1}df_{1x}] \underset{(21)}{=} \varphi_{u_t}[df_{2x} - \varphi_{u_{1-t}}df_{1x}]$, откуда следует (так как φ_{u_t} — изоморфизм евклидовых пространств) равенство

$$\|\,\varphi_{u_t}df_{2x} - df_{1x}\,\| = \|\,\varphi_{u_{1-t}}df_{1x} - df_{2x}\,\|. \tag{22}$$

Для всякого $x\in V^n$ для всякого $u_t\in G\,(f_1x,\,f_2x)$ имеют место равенства $(\varphi_{u_t}df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} = (df_{2x})^{-1}(\varphi_{u_t})^{-1} - (df_{1x})^{-1} = [(df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1}\varphi_{u_t}](\varphi_{u_t})^{-1} \underset{(21)}{=}$
$\underset{(21)}{=} [(df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1}(\varphi_{u_{1-t}})^{-1}](\varphi_{u_t})^{-1} = [(df_{2x})^{-1} - (\varphi_{u_{1-t}}df_{1x})^{-1}](\varphi_{u_t})^{-1}$, откуда следует (так как φ_{u_t} — изоморфизм евклидовых пространств) равенство

$$\|\,(\varphi_{u_t}df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1}\,\| = \|\,(\varphi_{u_{1-t}}df_{1x})^{-1} - (df_{2x})^{-1}\,\|. \tag{23}$$

Из формул (20), (22), (23) следует, что при всяком $x\in V^n$ имеет место равенство

$$\inf_{u_t \in G(f_1x, f_2x)} \{\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\} + \|\varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x}\| +$$
$$+\|(\varphi_{u_t} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1}\|\} = \inf_{u_t \in G(f_1x, f_2x)} \{\min\{s(u_{t-1}),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\} +$$
$$+\|(\varphi_{u_{t-1}} df_{1x} - df_{2x}\| + \|(\varphi_{u_{1-t}} df_{1x})^{-1} - (df_{2x})^{-1}\|\} = \tag{24}$$
$$= \inf_{u_t \in G(f_2x, f_1x)} \{\min\{s(v_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\} + \|(\varphi_{v_t} df_{1x} - df_{2x}\| +$$
$$+\|(\varphi_{v_t} df_{1x})^{-1} - (df_{2x})^{-1}\|\}.$$

Формула (24) представляет собой равенство трех функций от x. Согласно формуле (5), $d_S(f_1, f_2)$ равно $\sup\limits_{x \in V^n}$ от первой из этих функций, а $d_S(f_2, f_1)$ равно $\sup\limits_{x \in V^n}$ от третьей из этих функций. Поэтому из формулы (24) следует равенство $d_S(f_1, f_2) = d_S(f_2, f_1)$. Утверждение, сформулированное в начале подпункта д), доказано.

е) Для всяких $f_1 \in S$, $f_2 \in S$, $f_3 \in S$ имеет место неравенство $d_S(f_1, f_2) \leqslant d_S(f_1, f_3) + d_S(f_3, f_2)$

Докажем это. Пусть $f_1 \in S$, $f_2 \in S$, $f_3 \in S$. Для всякого $x \in V^n$ для всяких

$$v_t \in G(f_1x, f_3x), \quad w_t \in G(f_3x, f_2x) \tag{25}$$

рассмотрим кривую (путь):

$$\overline{u}_t \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} w_{2t} & \text{при } \left[0,\ \dfrac{1}{2}\right), \\ v_{2t-1} & \text{при } \left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]. \end{cases} \tag{26}$$

Из формул (25), (26) следует $\overline{u}_t \in G(f_1x, f_2x)$. Имеет место равенство

$$\varphi_{\overline{u}_t} = \varphi_{v_t}\varphi_{w_t}, \tag{27}$$

вытекающее в силу формулы (26) из определения параллельного перенесения вдоль кривой (пути). Для кривой (пути), определенной формулой (26), имеем

$$\varphi_{\overline{u}_t} df_{2x} - df_{1x} \underset{(27)}{=} \varphi_{v_t}\varphi_{w_t} df_{2x} - df_{1x} = \varphi_{v_t}\varphi_{w_t} df_{2x} - \varphi_{v_t} df_{3x} + \varphi_{v_t} df_{3x} - df_{1x} =$$
$$= \varphi_{v_t}(\varphi_{w_t} df_{2x} - df_{3x}) + \varphi_{v_t} df_{3x} - df_{1x}. \tag{28}$$

Из формулы (28) следует

$$\|\varphi_{\overline{u}_t} df_{2x} - df_{1x}\| \leqslant \|\varphi_{v_t}\| \cdot \|\varphi_{w_t} df_{2x} - df_{3x}\| + \|\varphi_{v_t} df_{3x} - df_{1x}\| \underset{(8)}{=}$$
$$\underset{(8)}{=} \|\varphi_{w_t} df_{2x} - df_{3x}\| + \|\varphi_{v_t} df_{3x} - df_{1x}\|. \tag{29}$$

Для кривой (пути), определенной формулой (26), имеем также

$$(\varphi_{\overline{u}_t} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} = (df_{2x})^{-1}(\varphi_{\overline{u}_t})^{-1} - (df_{1x})^{-1} \underset{(27)}{=}$$
$$\underset{(27)}{=} (df_{2x})^{-1}(\varphi_{w_t})^{-1}(\varphi_{v_t})^{-1} - (df_{1x})^{-1} = (df_{2x})^{-1}(\varphi_{w_t})^{-1}(\varphi_{v_t})^{-1} -$$
$$-(df_{3x})^{-1}(\varphi_{v_t})^{-1} + (df_{3x})^{-1}(\varphi_{v_t})^{-1} - (df_{1x})^{-1} = \tag{30}$$
$$= [(\varphi_{w_t} df_{2x})^{-1} - (df_{3x})^{-1}](\varphi_{v_t})^{-1} + (\varphi_{v_t} df_{3x})^{-1} - (df_{1x})^{-1}.$$

Из формулы (30) следует

$$\|(\varphi_{\overline{u}_t} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1}\| \leqslant \|(\varphi_{w_t} df_{2x})^{-1} - (df_{3x})^{-1}\| \cdot \|(\varphi_{v_t})^{-1}\| + \|(\varphi_{v_t} df_{3x})^{-1} -$$
$$-(df_{1x})^{-1}\| \underset{(8)}{=} \|(\varphi_{w_t} df_{2x})^{-1} - (df_{3x})^{-1}\| + \|(\varphi_{v_t} df_{3x})^{-1} - (df_{1x})^{-1}\|. \tag{31}$$

Для кривой (пути) $\overline{u}_t$, определенной формулой (26), имеет место равенство

$$s(\overline{u}_t) = s(w_t) + s(v_t), \tag{32}$$

вытекающее непосредственно из определения длины кривой (пути). Из равенства (32) следует неравенство

$$\min\{s(\overline{u}_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\} \leqslant \min\{s(w_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\} +$$
$$= \min\{s(v_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}. \tag{33}$$

В самом деле, если $\min\{s(w_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}=s(w_t)$ и $\min\{s(v_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}=s(v_t)$, то правая часть неравенства (33) равна $s(w_t)+s(v_t)$, а так как левая часть (33) $\min\{s(\overline{u}_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}\leqslant s(\overline{u}_t)\underset{(32)}{=}s(w_t)+s(v_t)$, то неравенство (33) выполнено в этом случае. Если же хоть одно из двух слагаемых в правой части неравенства (33) равно $[1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}$, то правая часть (33) больше или равна $[1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}$, а так как левая часть (33) $\min\{s(\overline{u}_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}\leqslant[1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}$, то неравенство (33) выполнено и в этом случае.

Итак, неравенство (33) доказано.

Из формул (33), (29) и (31) следует неравенство

$$\begin{gathered}\min\{s(\overline{u}_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\|\varphi_{\overline{u}_t}df_{2x}-df_{1x}\|+\|(\varphi_{\overline{u}_t}df_{2x})^{-1}-\\ -(df_{1x})^{-1}\|\leqslant\min\{s(w_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\|\varphi_{w_t}df_{2x}-df_{3x}\|+\\ +\|(\varphi_{w_t}df_{2x})^{-1}-(df_{3x})^{-1}\|+\min\{s(v_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\\ +\|\varphi_{v_t}df_{3x}-df_{1x}\|+\|(\varphi_{v_t}df_{3x})^{-1}-(df_{1x})^{-1}\|.\end{gathered}\tag{34}$$

Итак, для всякого $x\in V^n$ для всяких $v_t\in G(f_1x,f_3x)$, $w_t\in G(f_3x,f_2x)$ формула (26) определяет кривую (путь) $\overline{u}_t\in G(f_1x,f_2x)$, для которой имеет место неравенство (34). Поэтому для всякого $x\in V^n$ имеем

$$\begin{gathered}\inf_{u_t\in G(f_1x,f_2x)}\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\|\varphi_{u_t}df_{2x}-df_{1x}\|+\\ +\|(\varphi_{u_t}df_{2x})^{-1}-(df_{1x})^{-1}\|\leqslant\inf_{\substack{v_t\in G(f_1x,f_3x)\\ w_t\in G(f_3x,f_2x)}}\{\min\{s(w_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\\ +\|\varphi_{w_t}df_{2x}-df_{3x}\|+\|(\varphi_{w_t}df_{2x})^{-1}-(df_{3x})^{-1}\|+\min\{s(v_t),\\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\|\varphi_{v_t}df_{3x}-df_{1x}\|+\|(\varphi_{v_t}df_{3x})^{-1}-(df_{1x})^{-1}\|\}=\\ =\inf_{v_t\in G(f_1x,f_3x)}\{\min\{s(v_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\|\varphi_{v_t}df_{3x}-df_{1x}\|+\\ +\|(\varphi_{v_t}df_{3x})^{-1}-(df_{1x})^{-1}\|\}+\inf_{w_t\in G(f_3x,f_2x)}\{\min\{s(w_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\\ +\|\varphi_{w_t}df_{2x}-df_{3x}\|+\|(\varphi_{w_t}df_{2x})^{-1}-(df_{3x})^{-1}\|\}.\end{gathered}\tag{35}$$

последнее равенство в формуле (35) следует из очевидного равенства

$$\inf_{(a,\ b)\in A\times B}[\alpha(a)+\beta(b)]=\inf_{a\in A}\alpha(a)+\inf_{b\in B}\beta(b),\tag{36}$$

верного для всяких функций $\alpha(\cdot):A\to\mathbf{R}$, $\beta(\cdot):B\to\mathbf{R}$, где A, B — произвольные множества.

Имеем

$$\begin{gathered}d_S(f_1,f_2)\underset{(5)}{=}\sup_{x\in V^n}\inf_{u_t\in G(f_1x,f_2x)}\{\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\|\varphi_{u_t}df_{2x}-\\ -df_{1x}\|+\|(\varphi_{u_t}df_{2x})^{-1}-(df_{1x})^{-1}\|\}\underset{(35)}{\leqslant}\sup_{x\in V^n}\inf_{v_t\in G(f_1x,f_3x)}\{\min\{s(v_t),\\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\|\varphi_{v_t}df_{3x}-df_{1x}\|+\|(\varphi_{v_t}df_{3x})^{-1}-\\ -(df_{1x})^{-1}\|\}=\sup_{x\in V^n}\inf_{w_t\in G(f_3x,f_2x)}\{\min\{s(w_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\\ +\|\varphi_{w_t}df_{2x}-df_{3x}\|+\|(\varphi_{w_t}df_{2x})^{-1}-(df_{3x})^{-1}\|\}\underset{(5)}{=}d_S(f_1,f_3)+d_S(f_3,f_2).\end{gathered}\tag{37}$$

В формуле (37) неравенство, помеченное номером (35), следует из формулы (35) в силу известного неравенства $\sup_{a\in A}[\alpha(a)+\beta(b)]\leqslant\sup_{a\in A}\alpha(a)+\sup_{a\in A}\beta(b)$, верного для всяких функций $\alpha(\cdot):A\to\mathbf{R}$, $\beta(\cdot):A\to\mathbf{R}$ (где A — произвольное множество).

Доказав формулу (37), мы доказали утверждение, сформулированное в начале подпункта е).

Итак, доказано, что формула (5) определяет расстояние на S.

4. а) Наряду с метрикой, определенной формулой (5), можно рассмотреть метрику (на том же множестве S), определяемую для всяких $f_1\in S$, $f_2\in S$ формулой

$$\tilde{d}_S(f_1, f_2) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{u_t \in G(f_1 x, f_2 x)} \{\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\} + \\ + \| \varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x} \|\}. \tag{38}$$

Смысл обозначений тот же, что и в п. 2.

Сравнивая формулу (38) с формулой (5), видим, что их отличает последнее слагаемое во внешних фигурных скобках в формуле (5), отсутствующее в формуле (38).

То, что функция $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$, определенная формулой (38), есть расстояние на S, доказывается аналогично тому, как в п. 3 было доказано, что функция $d_S(\cdot,\ \cdot)$, определенная формулой (5), есть расстояние на S. Точнее, доказательство этого утверждения для $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$ получается сокращением доказательства этого утверждения для $d_S(\cdot,\ \cdot)$ (опустив последнее слагаемое во внешних фигурных скобках в формуле (5), нужно, естественно, опустить и все относящиеся к этому слагаемому рассуждения).

б) Метрика $d_S(\cdot,\ \cdot)$ и метрика $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$, определенные соответственно формулами (5) и (38), индуцируют на множестве S одну и ту же топологию.

Докажем это. Так как последнее слагаемое во внешних фигурных скобках в формуле (5) неотрицательно, то для всяких $f_1 \in S$, $f_2 \in S$ имеет место неравенство

$$\tilde{d}_S(f_1, f_2) \underset{(38)}{\overset{(5)}{\leqslant}} d_S(f_1, f_2). \tag{39}$$

Для всяких $f_1 \in S$, $f_2 \in S$ для всякого $x \in V^n$, для всякого $u_t \in G(f_1 x, f_2 x)$ имеем

$$(\varphi_{u_t} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} = (df_{1x})^{-1}\{[1_{\pi^{-1}(f_1 x)} + (\varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x})^{-1} \times \\ \times (df_{1x})^{-1}]^{-1} - 1_{\pi^{-1}(f_1 x)}\}. \tag{40}$$

Введем временно следующие два обозначения:

$$C \underset{\text{def}}{=} -(\varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x})(df_{1x})^{-1}, \tag{41}$$

$$I \underset{\text{def}}{=} 1_{\pi^{-1}(f_1 x)}. \tag{42}$$

С помощью этих обозначений формула (40) перепишется в виде

$$(\varphi_{u_t} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} = (df_{1x})^{-1}[(I-C)^{-1} - I]. \tag{43}$$

Хорошо известно (и легко доказывается), что если

$$\| C \| < 1, \tag{44}$$

то

$$(I-C)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} C^k, \tag{45}$$

$$\| (I-C)^{-1} - I \| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \| C^k \| = \| C \| (I - \| C \|)^{-1}. \tag{46}$$

При условии (44) имеем

$$\| (\varphi_{u_t} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} \| \underset{(43)}{\leqslant} \| (df_{1x})^{-1} \| \cdot \| (I-C)^{-1} - I \| \underset{(46)}{\leqslant} \| (df_{1x})^{-1} \| \times \\ \times \| C \| (1 - \| C \|)^{-1} \underset{(3)}{\leqslant} ||| (df_{1x})^{-1} ||| \cdot \| C \| (1 - \| C \|)^{-1}. \tag{47}$$

Из формулы (41) имеем

$$\| C \| \leqslant \| \varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x} \| \cdot \| (df_{1x})^{-1} \| \underset{(3)}{\leqslant} ||| (df_{1x})^{-1} ||| \cdot \| \varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x} \|. \tag{48}$$

Если для некоторых $f_1 \in S$, $f_2 \in S$, $x \in V^n$, $u_t \in G(f_1 x, f_2 x)$ выполнено условие

$$||| (df_{1x})^{-1} ||| \cdot \| \varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x} \| < \frac{1}{2}, \tag{49}$$

то

$$\| C \| \underset{(48)}{\leqslant} ||| (df_{1x})^{-1} ||| \cdot \| \varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x} \| \underset{(49)}{<} \frac{1}{2}, \tag{50}$$

следовательно, выполнено неравенство (44) и

$$\begin{aligned}&\|(\varphi_{u_t}df_{2x})^{-1}-(df_{1x})^{-1}\|\underset{(47)}{\leqslant}|||(df_{1x})^{-1}|||\cdot\|C\|(1-\|C\|)^{-1}\underset{(50)}{\leqslant}\\&\underset{(50)}{\leqslant}2|||(df_{1x})^{-1}|||\cdot\|C\|\underset{(48)}{\leqslant}2|||(df_{1x})^{-1}|||^2\|\varphi_{u_t}df_{2x}-df_{1x}\|.\end{aligned}\tag{51}$$

Пусть для некоторых $f_1\in S$, $f_2\in S$ выполнено условие

$$\tilde d_S(f_1,f_2)<\frac{1}{2}|||(df_{1x})^{-1}|||^{-1}.\tag{52}$$

Тогда в силу формулы (38) для всякого $x\in V^n$ найдется $u_t\in G(f_1x,f_2x)$ такое, что $\{\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\|\varphi_{u_t}df_{2x}-df_{1x}\|<\frac{1}{2}|||(df_{1x})^{-1}|||^{-1}$, тогда выполнено условие (49), из которого, как доказано выше, вытекает неравенство (51). Следовательно, при условии (52) при всяком $x\in V^n$ при таком всяком $u_t\in G(f_1x,f_2x)$ имеем неравенство $\|\varphi_{u_t}df_{2x}-df_{1x}\|+\|(\varphi_{u_t}df_{2x})^{-1}-(df_{1x})^{-1}\|\underset{(51)}{\leqslant}(1+2|||(df_1)^{-1}|||^2)\|\varphi_{u_t}df_{2x}-df_{1x}\|$, из которого следует неравенство $\{\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\|\varphi_{u_t}df_{2x}-df_{1x}\|+\|(\varphi_{u_t}df_{2x})^{-1}-$ $-(df_{1x})^{-1}\|\leqslant(1+2|||(df_1)^{-1}|||^2)\{\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\|\varphi_{u_t}df_{2x}-df_{1x}\|\}$.

Следовательно, при условии (52), для всякого $x\in V^n$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned}&\inf_{u_t\in G(f_1x,f_2x)}\{\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\\&+\|\varphi_{u_t}df_{2x}-df_{1x}\|+\|(\varphi_{u_t}df_{2x})^{-1}-(df_{1x})^{-1}\|\leqslant\\&\leqslant(1+2|||(df_1)^{-1}|||^2)\inf_{u_t\in G(f_1x,f_2x)}\{\min\{s(u_t),\\&[1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\|\varphi_{u_t}df_{2x}-df_{1x}\|\}.\end{aligned}\tag{53}$$

В силу формулы (5) $\sup\limits_{x\in V^n}$ от левой части неравенства (53) есть $d_S(f_1,f_2)$, а в силу формулы (38) $\sup\limits_{x\in V^n}$ от правой части неравенства (53) есть $(1+2|||(df_1)^{-1}|||^2)\,\tilde d_S(f_1,f_2)$. Таким образом, доказано, что всякие $f_1\in S$, $f_2\in S$, удовлетворяющие неравенству (52), удовлетворяют неравенству $d_S(f_1,f_2)\leqslant(1+2|||(df_1)^{-1}|||^2)\,\tilde d_S(f_1,f_2)$. Соединяя это утверждение с доказанным выше неравенством (39), получаем, что метрики $d_S(\cdot,\ \cdot)$ и $\tilde d_S(\cdot,\ \cdot)$, определенные соответственно формулами (5) и (38), индуцируют на множестве S одну и ту же топологию. Утверждение, сформулированное в начале подпункта б), доказано.

5. Для всякого $j\in S$ рассмотрим множество S_j всех диффеоморфизмов $f:V^n\to V^n$ класса C^1, удовлетворяющих условию (1) и еще одному дополнительному условию

$$\sup_{x\in V^n}\rho(fx,\ fx)<+\infty.\tag{54}$$

Это множество наделим структурой метрического пространства, задав расстояние формулой

$$\begin{aligned}&d_1(f_1,f_2)\underset{\text{def}}{=}\sup_{x\in V^n}\inf_{u_t\in G(f_1x,f_2x)}\{s(u_t)+\\&+\|\varphi_{u_t}df_{2x}-df_{1x}\|+\|(\varphi_{u_t}df_{2x})^{-1}-(df_{1x})^{-1}\|\}\end{aligned}\tag{55}$$

(смысл обозначений тот же, что и в п. 2).

Можно ввести другое расстояние на множестве S_j:

$$\tilde d_1(f_1,f_2)\underset{\text{def}}{=}\sup_{x\in V^n}\inf_{u_t\in G(f_1x,f_2x)}\{s(u_t)+\|\varphi_{u_t}df_{2x}-df_{1x}\|\}.\tag{56}$$

При всяком $j\in S$ метрика $\tilde d_1(\cdot,\ \cdot)$ и метрика $\tilde d_1(\cdot,\ \cdot)$ индуцируют на S_j одну и ту же топологию.

Доказательства сформулированных выше в этом пункте утверждений проводятся по тому же плану, по которому выше были проведены доказательства аналогичных утверждений для S, $d_S(\cdot,\ \cdot)$, $\tilde d_S(\cdot,\ \cdot)$, но несколько проще. В одном рассуждении, правда, происходит не упрощение, а небольшое усложнение. А именно, фразу, содержащую формулу (6), надо заменить теперь фразой: для всякого $x \in V^n$ найдется кривая (путь) $u_t \in G(f_1x, f_2x)$ такая, что $s(u_t) < \rho(f_1x, f_2x) + 1$; тогда

$$s(u_t) < \rho(f_1x, f_2x) + 1 \leqslant \rho(f_1x, jx) + \rho(f_2x, jx) + 1 \leqslant \sup_{x \in V^n} \rho(f_1x, jx) + \sup_{x \in V^n} \rho(f_2x, jx) + 1 .$$

В следующем пункте будет доказано, что в случае, когда многообразие V^n замкнутое (т. е. компактно), множество S_j при всяком $j \in S$ совпадает с множеством S, а метрика $d_S(\cdot,\ \cdot)$ эквивалентна метрике $d_1(\cdot,\ \cdot)$ и метрика $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$ эквивалентна метрике $\tilde{d}_1(\cdot,\ \cdot)$. Поэтому рассмотрение того или иного из пространств S, S_j приводит к разным результатам только тогда, когда многообразие V^n не является замкнутым. Наша цель, однако, получение результатов и для незамкнутых многообразий V^n (например, для $\mathbf{R}^n$).

6. Пусть V^n — замкнутое многообразие (т. е. V^n — компакт; кроме того, все условия п. 1 по-прежнему предполагаются выполненными). Тогда имеют место следующие утверждения:

1) для всякого $j \in S$ имеет место равенство $S_j = S$ (определения множеств S и S_j см. соответственно в начале п. 3 и в начале п. 5);

2) метрика $d_S(\cdot,\ \cdot)$, определенная формулой (5), эквивалентна [1] метрике $d_1(\cdot,\ \cdot)$, определенной формулой (55);

3) метрика $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$, определенная формулой (38), эквивалентна метрике $\tilde{d}_1(\cdot,\ \cdot)$, определенной формулой (56).

Докажем эти утверждения.

1) Если V^n — компакт, то (непрерывная на компакте $V^n \times V^n$) функция $\rho(\cdot,\ \cdot): V^n \times V^n \to \mathbf{R}^n$ ограничена; следовательно, для всяких отображений $f: V^n \to V^n$, $j: V^n \to V^n$ имеет место неравенство $\sup\limits_{x \in V^n} \rho(fx, jx) \leqslant \sup\limits_{(y,\, z) \in V^n \times V^n} \rho(y, z) < +\infty$. Следовательно, условие (54) выполнено для всяких $j \in S$, $f \in S$, и $S \subset S_j$ при всяком $j \in S$.

С другой стороны, для произвольного (не только для замкнутого) многообразия V^n, удовлетворяющего условиям, сформулированным в начале п. 1, имеет место включение

$$S_j \subset S \tag{57}$$

(вытекающее непосредственно из определений множеств S и S_j, данных соответственно в начале п. 3 и в начале п. 5).

Следовательно, для замкнутого многообразия V^n имеет место равенство (для всякого $j \in S$) $S_j = S$. Утверждение 1) доказано.

2) Пусть V^n — произвольное многообразие, удовлетворяющее условиям, сформулированным в начале п. 1. Пусть $j \in S$. Пусть $f_1 \in S_j$, $f_2 \in S_j$. Тогда $f_1 \in S_j$, $f_2 \in S_j$ (в силу формулы (57)). Для всякого $x \in V^n$ для всякого $u_t \in G(f_1x, f_2x)$ имеет место неравенство $\min\{s(u_t),\ [1 + \rho(x, x_0)]^{-1}\} \leqslant s(u_t)$, из которого следует неравенство

$$\min\{s(u_t),\ [1 + \rho(x, x_0)]^{-1}\} + $$
$$+ \| \varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x} \| + \| (\varphi_{u_t} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} \| \leqslant s(u_t) + \| \varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x} \| + \| (\varphi_{u_t} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} \| .$$

Следовательно, при всяком $x \in V^n$ имеет место неравенство

---

[1] Две метрики $d_1(\cdot,\ \cdot)$ и $d_2(\cdot,\ \cdot)$ заданные на одном и том же множестве M, называем эквивалентными, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всяких $y \in M$, $z \in M$ таких, что $d_1(y, z) < \delta$, имеет место неравенство $d_2(y, z) < \varepsilon$ и для всяких $y \in M$, $z \in M$ таких, что $d_2(y, z) < \delta$, имеет место неравенство $d_1(y, z) < \varepsilon$. Если две метрики, заданные на множестве M, эквивалентны, то всякая последовательность точек множества M, фундаментальная относительно одной из этих метрик, фундаментальна и относительно другой, а всякая последовательность точек множества M, сходящаяся к некоторой точке множества M по одной из этих метрик, сходится к той же точке и по другой метрике. Отсюда следует, что если M полно относительно одной из двух эквивалентных метрик, то оно полно и относительно другой. Отметим, что эквивалентность метрик равносильна совпадению индуцированных ими равномерных структур.

$$\inf_{u_t \in G(f_1x, f_2x)} \{\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\} +$$
$$+\|\varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x}\| + \|(\varphi_{u_t} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1}\| \leqslant$$
$$\inf_{u_t \in G(f_1x, f_2x)} \{s(u_t) + \|\varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x}\| + \|(\varphi_{u_t} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1}\|\}.$$

В силу формул (5), (55) имеет место неравенство

$$d_S(f_1, f_2) \leqslant d_1(f_1, f_2). \tag{58}$$

Пусть теперь многообразие V^n замкнутое (т. е. компакт). Тогда для всякого $x \in V^n$ имеет место неравенство

$$\rho(x,\ x_0) \leqslant \sup_{(y,\ z)\in V^n \times V^n} \rho(y,\ z) < +\infty. \tag{59}$$

Для всякого $x \in V^n$ имеем

$$[1+\rho(x,\ x_0)]^{-1} \geqslant \rho_0^{-1} > 0, \tag{60}$$

где $\rho_0 \underset{\mathrm{def}}{=} \sup\limits_{(y,\ z)\in V^n \times V^n} [1+\rho(z,\ y)] < +\infty$.

Пусть $f_1 \in S$, $f_2 \in S$ (многообразие V^n по-прежнему предполагается замкнутым) и пусть

$$d_S(f_1, f_2) < \rho_0^{-1}. \tag{61}$$

Тогда

$$d_1(f_1, f_2) = d_S(f_1, f_2). \tag{62}$$

В самом деле, так как $f_1 \in S$, $f_2 \in S$, то $f_1 \in S_j$, $f_2 \in S_j$ для всякого $j \in S$ (поскольку для всякого $j \in S$ имеет место равенство $S = S_j$, см. доказанное выше утверждение 1) этого пункта). В силу формулы (5) для всякого $\delta > 0$ для всякого $x \in V^n$ найдется кривая (путь) $u_t \in G(f_1x, f_2x)$ такая, что

$$\begin{gathered}\{\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\} + \|\varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x}\| + \\ + \|(\varphi_{u_t} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1}\| < d_S(f_1, f_2) + \delta;\end{gathered} \tag{63}$$

из неравенства (63) следует неравенство $\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\} < d_S(f_1, f_2) + \delta$, из которого при $\delta < \rho_0^{-1} - d_S(f_1, f_2)$ (напомним, что $\rho_0^{-1} \underset{(61)}{>} d_S(f_1, f_2)$) следует (поскольку при всяком $x \in V^n$ имеет место неравенство (60)) равенство

$$\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\} = s(u_t); \tag{64}$$

с помощью равенства (64) неравенство (63) переписывается в виде

$$s(u_t) + \|\varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x}\| + \|(\varphi_{u_t} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1}\| < d_S(f_1, f_2) + \delta. \tag{65}$$

Итак, доказано, что для всякого $\delta \in (0,\ \rho_0^{-1} - d_S(f_1, f_2))$ для всякого $x \in V^n$ найдется $u_t \in G(f_1x, f_2x)$, удовлетворяющее неравенству (65). Следовательно, для всякого $\delta > 0$ для всякого $x \in V^n$ выполнено неравенство

$$\begin{gathered}\inf_{u_t \in G(f_1x, f_2x)} \{s(u_t) + \|\varphi_{u_t} df_{2x} - df_{1x}\| + \\ + \|(\varphi_{u_t} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1}\| < d_S(f_1, f_2) + \delta.\end{gathered} \tag{66}$$

Следовательно, для всякого $\delta > 0$ выполнено неравенство $d_1(f_1, f_2) \overset{(55)}{\underset{(66)}{\leqslant}} d_S(f_1, f_2) + \delta$, поэтому)

$$d_1(f_1, f_2) \leqslant d_S(f_1, f_2). \tag{67}$$

Итак, для замкнутого многообразия V^n доказано следующее: найдется $\rho_0^{-1} > 0$ такое, что всякие $f_1 \in S$, $f_2 \in S$, удовлетворяющие неравенству $d_S(f_1, f_2) < \rho_0^{-1}$ удовлетворяют неравенству (67). Сопоставив это с неравенством (58), доказанным выше для всяких $f_1 \in S_j$, $f_2 \in S_j$ и равенством $S = S_j$ (см. утверждение 1) этого пункта), получаем, что утверждение 2), сформулированное в начале этого пункта, доказано. Доказательство утверждения 3) аналогично доказательству утверждения 2).

7. Пусть теперь многообразие V^n, обладающее свойствами, перечисленными в начале п. 1, обладает следующим дополнительным свойством: параллельный перенос не зависит от

выбора кривой (пути), соединяющей точки, т. е. для всяких $y_1 \in V^n$, $y_2 \in V^n$ для всяких $u_t \in G(y_1, y_2)$, $v_t \in G(y_1, y_2)$ имеет место равенство $\varphi_{u_t} = \varphi_{v_t}$ (разъяснение использованных здесь обозначений дано выше после формулы (5)).

Для параллельного переноса в таком многообразии, называемом в дальнейшем, как это принято в литературе, евклидовым многообразием, будем пользоваться обозначением $\varphi_{y_2}^{y_1} : \pi^{-1}(y_2) \to \pi^{-1}(y_1)$ вместо обозначения $\varphi_{u_t} : \pi^{-1}(y_2) \to \pi^{-1}(y_1)$ (где $u_t \in G(y_1, y_2)$), поскольку отображение φ_{u_t} не зависит от кривой (пути) $u_t \in G(y_1, y_2)$, а зависит только от упорядоченной пары точек (y_1, y_2).

Для евклидова многообразия формулы, которыми выше были определены метрики d_S и $\tilde{d}_S$ на множестве S и метрики d_1 и $\tilde{d}_1$ на множествах S_j, упрощаются.

Формулу (5) перепишем сначала в виде

$$\begin{aligned} d_S(f_1, f_2) = \sup_{x \in V^n} \inf_{u_t \in G(f_1 x, f_2 x)} \{\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x, x_0)]^{-1}\} + \\ + \| \varphi_{f_2 x}^{f_1 x} df_{2x} - df_{1x} \| + \| (\varphi_{f_2 x}^{f_1 x} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} \| \}. \end{aligned} \tag{68}$$

Так как при всяких фиксированных $f_1 \in S$, $f_2 \in S$, $x \in V^n$ второе и третье слагаемые во внешних фигурных скобках не зависят от кривой $u_t \in G(f_1 x, f_2 x)$, то при всяких $f_1 \in S$, $f_2 \in S$, $x \in V^n$ имеем

$$\begin{aligned} &\inf_{u_t \in G(f_1 x, f_2 x)} \{\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x, x_0)]^{-1}\} + \\ &+ \| \varphi_{f_2 x}^{f_1 x} df_{2x} - df_{1x} \| + \| (\varphi_{f_2 x}^{f_1 x} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} \| \} = \\ &= \inf_{u_t \in G(f_1 x, f_2 x)} \{\min\{s(u_t),\ [1+\rho(x, x_0)]^{-1}\}\} + \\ &+ \| \varphi_{f_2 x}^{f_1 x} df_{2x} - df_{1x} \| + \| (\varphi_{f_2 x}^{f_1 x} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} \| = \\ &= \min\{\{\inf_{u_t \in G(f_1 x, f_2 x)} s(u_t)\},\ [1+\rho(x, x_0)]^{-1}\} + \\ &+ \| \varphi_{f_2 x}^{f_1 x} df_{2x} - df_{1x} \| + \| (\varphi_{f_2 x}^{f_1 x} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} \| = \\ &\min\{\rho(f_1 x, f_2 x),\ [1+\rho(x, x_0)]^{-1}\} + \\ &+ \| \varphi_{f_2 x}^{f_1 x} df_{2x} - df_{1x} \| + \| (\varphi_{f_2 x}^{f_1 x} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} \|. \end{aligned} \tag{69}$$

В цепочке равенств (69) предпоследнее равенство есть частный случай известного и легко проверяемого равенства $\inf_{a \in A} \inf_{b \in B} g(a, b) = \inf_{b \in B} \inf_{a \in A} g(a, b)$, верного для всякой функции $g(\cdot, \cdot) : A \times B \to \mathbf{R}$, где A, B — произвольные множества, а последнее равенство следует из того, что для всяких $y_1 \in V^n$, $y_2 \in V^n$ имеет место формула $\rho(y_1, y_2) \underset{\text{def}}{=} \inf_{u_t \in G(y_1, y_2)} s(u_t)$. С помощью (69) формула (68) переписывается в виде

$$\begin{aligned} d_S(f_1, f_2) = \sup_{x \in V^n} \{\min\{\rho(f_1 x, f_2 x),\ [1+\rho(x, x_0)]^{-1}\} + \\ + \| \varphi_{f_2 x}^{f_1 x} df_{2x} - df_{1x} \| + \| (\varphi_{f_2 x}^{f_1 x} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} \| \}. \end{aligned} \tag{70}$$

Так выглядит формула (5) для евклидова многообразия V^n.

Формула (38) для евклидова многообразия V^n может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} \tilde{d}_S(f_1, f_2) = \sup_{x \in V^n} \{\min\{\rho(f_1 x, f_2 x),\ [1+\rho(x, x_0)]^{-1}\} + \\ + \| \varphi_{f_2 x}^{f_1 x} df_{2x} - df_{1x} \| \}; \end{aligned} \tag{71}$$

доказательство отличается от приведенного для формулы (5) тем, что всюду опускается слагаемое $\| (\varphi_{u_t} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} \| - \| (\varphi_{f_2 x}^{f_1 x} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} \|$.

Формулы (55) и (56) для евклидова многообразия V^n могут быть переписаны соответственно в виде

$$d_1(f_1, f_2) = \sup_{x \in V^n} \{\rho(f_1x, f_2x) + \| \varphi_{f_2x}^{f_1x} df_{2x} - df_{1x} \| + \\ = \| (\varphi_{f_2x}^{f_1x} df_{2x})^{-1} - (df_{1x})^{-1} \|, \tag{72}$$

$$\tilde{d}_1(f_1, f_2) = \sup_{x \in V^n} \{\rho(f_1x, f_2x) + \| \varphi_{f_2x}^{f_1x} df_{2x} - df_{1x} \|\}. \tag{73}$$

доказательства аналогичны (но несколько проще) доказательствам того, что формулы (5), (38) для евклидова многообразия V^n могут быть переписаны соответственно в виде (70), (71).

8. Рассмотрим теперь вещественное n- мерное пространство $\mathbf{R}^n$ (мы различаем в обозначениях $\mathbf{R}^n$ (абстрактно заданное n- мерное векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$) и R^n — пространство строк из n вещественных чисел, стандартным образом наделенное структурой векторного пространства над $\mathbf{R}$). Пространство $\mathbf{R}^n$ стандартным образом наделяется структурой дифференцируемого многообразия: фиксируется произвольный базис в $\mathbf{R}^n$ и рассматривается координатное отображение $h(\cdot): \mathbf{R}^n \to R^n$, ставящее в соответствие каждому вектору $x \in \mathbf{R}^n$ строку его координат в этом базисе; берется множество $\mathfrak{F}$ всех бесконечно дифференцируемых функций[1] $g(\cdot): V \to \mathbf{R}$ ($V \in DR^n$); множество $\mathcal{F}$ всех функций вида $f(\cdot) = g(h(\cdot)): U \to \mathbf{R}$, где $g(\cdot) \in \mathfrak{F}$, $U \in DR^n$, объявляется дифференцируемой структурой (структурой дифференцируемого многообразия класса C^∞) на $\mathbf{R}^n$. Через $(T\mathbf{R}^n, \pi, \mathbf{R}^n)$ обозначается касательное расслоение многообразия $\mathbf{R}^n$; π — проекция этого расслоения, $\pi^{-1}(x)$ — касательное пространство в точке x.

Для всякого $x \in \mathbf{R}^n$ определим отображение (см., например, [7], глава II, § 5):

$$\tau_x : \pi^{-1}(x) \to \mathbf{R}^n \tag{74}$$

следующим образом: для всякого $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x)$ вектор $\tau_x\mathfrak{x}$ есть по определению такой вектор пространства $\mathbf{R}^n$, что кривая φ, определенная формулой

$$\varphi(t) \underset{\text{def}}{=} x + t\tau_x\mathfrak{x} \tag{75}$$

(при всяком $t \in \mathbf{R}$), является представителем класса $\mathfrak{x}$ (мы пользуемся определением касательного вектора в точке как класса эквивалентности гладких кривых, проходящих через эту точку, по некоторому определенному отношению эквивалентности, см., например, [7], глава II, § 5).

Хорошо известно (и легко доказывается), что отображение (74)

является изоморфизмом векторного пространства $\pi^{-1}(x)$ на векторное пространство R^n.

Фиксируем на R^n скалярное произведение $\langle .,. \rangle$. Определим на касательном расслоении (TR^n, π, R^n) риманову метрику $\delta\langle .,. \rangle$ формулой

$$\delta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \underset{\text{def}}{=} \langle \tau_{\pi\mathfrak{x}}\mathfrak{x}, \tau_{\pi\mathfrak{y}}\mathfrak{y} \rangle \tag{76}$$

для всяких $\mathfrak{x} \in TR^n$, $\mathfrak{y} \in TR^n$ таких, что $\pi\mathfrak{x} = \pi\mathfrak{y}$.

Хорошо известно, что многообразие R^n, снабженное такой римановой метрикой, является евклидовым, т. е. что риманова связность, индуцированная римановой метрикой (76), такова, что для всяких точек $y_1 \in R^n$, $y_2 \in R^n$ для всяких кривых (путей) $u_t \in G(y_1, y_2)$, $\upsilon_t \in G(y_1, y_2)$ имеет место равенство $\varphi_{u_t} = \varphi_{\upsilon_t}$, на основании которого в дальнейшем пишем $\varphi_{y_2}^{y_1}$ вместо φ_{u_t} (для всякой кривой (пути) $u_t \in G(y_1, y_2)$), и что

$$\tau_{y_1}\varphi_{y_2}^{y_1} = \tau_{y_2} \tag{77}$$

для всяких $y_1 \in R^n$, $y_2 \in R^n$ (откуда, в частности, следует, что отображения $\varphi_{y_2}^{y_1}$ не зависят от того, какое скалярное произведение $\langle .,. \rangle$ было выбрано на R^n).

Пусть $f: R^n \to R^n$ — дифференцируемое (класса C^1) отображение. Для всякого $y \in R^n$ рассмотрим отображение

---

[1] DM — множество всех открытых множеств пространства M.

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=y} \underset{\text{def}}{=} \tau_{jy}\left(df_y\right)\left(\tau_y\right)^{-1} : R^n \to R^n \tag{78}$$

При всяком $y \in R^n$ отображение (78) линейное (так как отображение $df_y : \pi^{-1}(y) \to \pi^{-1}(fy)$ линейное, а отображение (74) при всяком x есть изоморфизм векторного пространства $\pi^{-1}(x)$ на векторное пространство R^n).

При всяком $x \in R^n$ в силу формулы (76) отображение τ_x есть изоморфизм евклидова пространства $\pi^{-1}(x)$ (евклидова структура на $\pi^{-1}(x)$ индуцирована римановой метрикой $\delta(.,.)$ многообразия R^n, определенной формулой (76)) на евклидово пространство R^n (евклидова структура на R^n была зафиксирована заданием скалярного произведения $\langle .,. \rangle$). Поэтому с помощью (76) — (78) формулы (70) — (73) переписываются для $V^n = R^n$ в виде

$$d_S(f_1, f_2) = \sup_{y \in R^n}\Bigg\{\min\left\{|f_1 y - f_2 y|, \left(1+|y\text{-}x_0|\right)^{-1}\right\} + \left\|\left.\frac{df_1}{dx}\right|_{x=y} - \left.\frac{df_2}{dx}\right|_{x=y}\right\| + \left\|\left(\left.\frac{df_1}{dx}\right|_{x=y}\right)^{-1} - \left(\left.\frac{df_2}{dx}\right|_{x=y}\right)^{-1}\right\|\Bigg\}, \tag{79}$$

$$\overline{d}_S(f_1, f_2) = \sup_{y \in R^n}\Bigg\{\min\left\{|f_1 y - f_2 y|, \left(1+|y - x_0|\right)^{-1}\right\} + \left\|\left.\frac{df_1}{dx}\right|_{x=y} - \left.\frac{df_2}{dx}\right|_{x=y}\right\|\Bigg\}, \tag{80}$$

$$d_1(f_1, f_2) = \sup_{y \in R^n}\Bigg\{|f_1 y - f_2 y| + \left\|\left.\frac{df_1}{dx}\right|_{x=y} - \left.\frac{df_2}{dx}\right|_{x=y}\right\| + \left\|\left(\left.\frac{df_1}{dx}\right|_{x=y}\right)^{-1} - \left(\left.\frac{df_2}{dx}\right|_{x=y}\right)^{-1}\right\|\Bigg\}, \tag{81}$$

$$\overline{d}_1(f_1, f_2) = \sup_{y \in R^n}\Bigg\{|f_1 y - f_2 y| + \left\|\left.\frac{df_1}{dx}\right|_{x=y} - \left.\frac{df_2}{dx}\right|_{x=y}\right\|\Bigg\}. \tag{82}$$

9. В предыдущем пункте было показано, во что превращаются метрики d_S, $\widetilde{d}_S$, d_1, $\widetilde{d}_1$ в случае $V^n = R^n$. В этом пункте тот же материал излагается с других позиций. Для производной отображения $f : R^n \to R^n$ дается другое определение, соответствующее менее детальному членению понятий. Этот подход принят в более старых учебниках анализа, геометрии и механики. Нельзя отрицать наличие некоторых преимуществ у этого подхода, главное из которых — краткость (и с некоторых точек зрения простота) изложения, быстрее приводящего к конечным результатам.

Пусть дано вещественное n-мерное векторное пространство R^n и пусть на нем фиксировано скалярное произведение $\langle .,. \rangle$. Это скалярное произведение задает норму $|\cdot|$ на R^n.

Пусть $f : R^n \to R^n$ — некоторое отображение. Говорят, что f дифференцируемо в точке $y \in R^n$, если существует отображение $A_y \in \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ (т. е. линейное отображение R^n в R^n) такое, что имеет место равенство

$$f(y+z) - fy = A_y z + o(z), \tag{83}$$

где символ $o(\cdot)$ имеет стандартный смысл: $|o(z)| \cdot |z|^{-1} \underset{z \to 0}{\to} 0$. Если формула (83) имеет место, то говорят, что у отображения f существует производная в точке y, при этом A_y обозначается через $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=y}$ и называется производной отображения f в точке y. Норма производной определяется (как норма линейного оператора) формулой $\left\| \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=y} \right\| = \left\| A_y \right\| \underset{def}{=} \sup_{|z| \le 1} \left| A_y z \right|$.

Отображение $f : R^n \to R^n$ называется дифференцируемым класса C^1, если при всяком $y \in R^n$ у f существует производная в точке y, причем эта производная A_y непрерывно зависит от y, т. е. при всяком $y \in R^n$ имеет место соотношение $\left\| A_{y+z} - A_y \right\| \to 0$.

Из формулы (83) следует, что если у отображения f существует производная в точке y, то f непрерывно в этой точке.

Пусть $f : R^n \to R^n$ — дифференцируемое отображение класса C^1, имеющее обратное $f^{-1} : R^n \to R^n$ (для чего необходимо и достаточно, чтобы f было взаимно-однозначным отображением R^n на R^n), пусть $\det\left(\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=y} \right) \ne 0$ при всяком $y \in R^n$ и пусть обратное отображение $f^{-1} : R^n \to R^n$ тоже непрерывно дифференцируемо (эти условия не являются независимыми). Тогда говорят, что $f : R^n \to R^n$ есть диффеоморфизм класса C^1. Хорошо известно, что если $f : R^n \to R^n$ — диффеоморфизм класса C^1, то для всякого $y \in R^n$ имеет место равенство

$$\left. \frac{d\left(f^{-1}\right)}{dx} \right|_{x=fy} = \left(\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=y} \right)^{-1}.$$

Рассмотрим диффеоморфизм $f : R^n \to R^n$ класса C^1 такой, что выполнены следующие два неравенства:

$$\left\| \frac{df}{dx} \right\| \underset{\text{def}}{=} \sup_{y \in R^n} \left\| \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=y} \right\| < +\infty,$$

$$\left\| \left(\frac{df}{dx} \right)^{-1} \right\| \underset{\text{def}}{=} \sup_{y \in R^n} \left\| \left(\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=y} \right)^{-1} \right\| < +\infty.$$

Множество всех таких диффеоморфизмов обозначим через S. Множество S можно наделить структурой метрического пространства, задав расстояние между всякими $f_1 \in S$, $f_2 \in S$ формулой

$$d^{(S)}(f_1, f_2) \underset{\text{def}}{=} |f_1 x_0 - f_2 x_0| + \sup_{y \in R^n} \left\{ \left\| \left. \frac{df_1}{dx} \right|_{x=y} - \left. \frac{df_2}{dx} \right|_{x=y} \right\| + \left\| \left(\left. \frac{df_1}{dx} \right|_{x=y} \right)^{-1} - \left(\left. \frac{df_2}{dx} \right|_{x=y} \right)^{-1} \right\| \right\}, \tag{84}$$

где x_0 — какая-нибудь фиксированная точка пространства R^n.

Можно наделить S другой структурой метрического пространства, зафиксировав точку $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и задав расстояние между всякими $f_1 \in S$, $f_2 \in S$ формулой

$$\tilde{d}^{(S)}(f_1, f_2) \underset{\text{def}}{=} | f_1 x_0 - f_2 x_0 | + \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \left\| \left. \frac{df_1}{dx} \right|_{x=y} - \left. \frac{df_2}{dx} \right|_{x=y} \right\|. \tag{85}$$

Если $V^n = \mathbf{R}^n$, то метрика $d_S(\cdot,\ \cdot)$ определенная формулой (79), эквивалентна метрике $d^{(S)}(\cdot,\ \cdot)$, определенной формулой (84), а метрика $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$, определенная формулой (80), эквивалентна метрике $\tilde{d}^{(S)}(\cdot,\ \cdot)$, определенной формулой (85).

Докажем ту часть этого утверждения, в которой говорится о метриках $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$ и $3\tilde{d}^{(S)}(\cdot,\ \cdot)$ (доказательство части этого утверждения, относящейся к метрикам $d_S(\cdot,\ \cdot)$ и $d^{(S)}(\cdot,\ \cdot)$, проводится аналогично и, кроме того, эта часть утверждения далее не используется).

Пусть $f_1 \in S$, $f_2 \in S$ (напомним, что сейчас $V^n = \mathbf{R}^n$ и за исходные определения приняты определения этого пункта и формулы (79), (80), причем объекты, входящие в формулы (79), (80), опять-таки вводятся на основе определений настоящего пункта).

а) Пусть

$$\tilde{d}_S(f_1, f_2) < 1. \tag{86}$$

Тогда

$$\begin{gathered} \min\{|f_1x_0 - f_2x_0|,\ 1\} = \min\{|f_1x_0 - f_2x_0|,\ (1+|x_0 - x_0|)^{-1}\} \leqslant \\ \leqslant \sup_{y\in\mathbf{R}^n} \min\{|f_1y - f_2y|,\ (1+|y-x_0|)^{-1}\} \leqslant \\ \underset{(80)}{\leqslant} \tilde{d}_S(f_1, f_2) \underset{(86)}{<} 1, \end{gathered} \tag{87}$$

откуда следует равенство

$$|f_1x_0 - f_2x_0| = \min\{|f_1x_0 - f_2x_0|,\ 1\}. \tag{88}$$

Далее,

$$|f_1x_0 - f_2x_0| \overset{(87)}{\underset{(88)}{\leqslant}} \tilde{d}_S(f_1, f_2), \tag{89}$$

$$\sup_{y\in\mathbf{R}^n} \left\| \left.\frac{df_1}{dx}\right|_{x=y} - \left.\frac{df_2}{dx}\right|_{x=y} \right\| \underset{(80)}{\leqslant} \tilde{d}_S(f_1, f_2). \tag{90}$$

Из неравенств (89), (90) и формулы (85) следует неравенство

$$\tilde{d}^{(S)}(f_1, f_2) \leqslant 2\tilde{d}_S(f_1, f_2). \tag{91}$$

Итак, доказано, что из неравенства (86) следует неравенство (91).

б) Для всяких $y \in \mathbf{R}^n$, $k \in \{1,\ 2\}$ имеем

$$f_ky - f_kx_0 = \int_0^1 \left.\frac{df_k}{dx}\right|_{x=\alpha y+(1-\alpha)x_0} (y - x_0)\, d\alpha. \tag{92}$$

Вычитая равенство (92) при $k = 2$ из равенства (92) при $k = 1$, получаем (при всяком $y \in \mathbf{R}^n$)

$$\begin{gathered} f_1y - f_1x_0 - (f_2y - f_2x_0) = \\ = \int_0^1 \left[\left.\frac{df_1}{dx}\right|_{x=\alpha y+(1-\alpha)x_0} - \left.\frac{df_2}{dx}\right|_{x=\alpha y+(1-\alpha)x_0} \right] (y - x_0)\, d\alpha. \end{gathered} \tag{93}$$

Для всякого $y \in \mathbf{R}^n$ имеем

$$\begin{gathered} |f_1y - f_1x_0 - (f_2y - f_2x_0)| \underset{(93)}{\leqslant} \int_0^1 \left\| \left.\frac{df_1}{dx}\right|_{x=\alpha y+(1-\alpha)x_0} - \left.\frac{df_2}{dx}\right|_{x=\alpha y+(1-\alpha)x_0} \right\| \times \\ \times |y - x_0|\, d\alpha \leqslant \left(\sup_{z\in\mathbf{R}^n} \left\| \left.\frac{df_1}{dx}\right|_{x=z} - \left.\frac{df_2}{dx}\right|_{x=z} \right\| \right) |y - x_0|. \end{gathered} \tag{94}$$

Для всякого $y \in \mathbf{R}^n$ имеем

$$\begin{gathered} |f_1y - f_2y| = |f_1x_0 - f_2x_0 + f_1y - f_1x_0 - (f_2y - f_2x_0)| \leqslant |f_1x_0 - f_2x_0| + \\ + |f_1y - f_1x_0 - (f_2y - f_2x_0)| \underset{(94)}{\leqslant} |f_1x_0 - f_2x_0| + \\ + \left(\sup_{z\in\mathbf{R}^n} \left\| \left.\frac{df_1}{dx}\right|_{x=z} - \left.\frac{df_2}{dx}\right|_{x=z} \right\| \right) \cdot |y - x_0| \leqslant |f_1x_0 - f_2x_0|(1 + |y - x_0|) + \\ + \left(\sup_{z\in\mathbf{R}^n} \left\| \left.\frac{df_1}{dx}\right|_{x=z} - \left.\frac{df_2}{dx}\right|_{x=z} \right\| \right) (1 + |y - x_0|) \underset{(85)}{=} \\ \underset{(85)}{=} \tilde{d}^{(S)}(f_1, f_2)(1 + |y - x_0|). \end{gathered} \tag{95}$$

Для всякого $y \in \mathbf{R}^n$ имеем

$$\min\{|f_1y-f_2y|,\ (1+|y-x_0|)^{-1}\}\underset{(95)}{\leqslant}\min\{\tilde d^{(S)}(f_1,f_2)(1+|y-x_0|),$$
$$(1+|y-x_0|)^{-1}\}\leqslant(\tilde d^{(S)}(f_1,f_2))^{\frac{1}{2}}; \tag{96}$$

последнее неравенство цепочки (96) вытекает из очевидного неравенства $\min\{\alpha,\ \beta\}\leqslant(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$, верного для всяких чисел $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$.

Имеем

$$\tilde d_S(f_1,f_2)\underset{(80)}{\leqslant}\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\min\{|f_1y-f_2y|,\ (1+|y-x_0|)^{-1}+\pm$$
$$+\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\left\|\frac{df_1}{dx}\bigg|_{x=y}-\frac{df_2}{dx}\bigg|_{x=y}\right\|\underset{(96)}{\leqslant}(\tilde d^{(S)}(f_1,f_2))^{\frac{1}{2}}+\sup_{y\in\mathbf{R}^n}\left\|\frac{df_1}{dx}\bigg|_{x=y}-\right. \tag{97}$$
$$\left.-\frac{df_2}{dx}\bigg|_{x=y}\right\|\underset{(85)}{\leqslant}(\tilde d^{(S)}(f_1,f_2))^{\frac{1}{2}}+\tilde d^{(S)}(f_1,f_2).$$

Сопоставив неравенство (97) с доказанным в подпункте а) утверждением о том, что из неравенства (86) следует неравенство (91), получаем, что эквивалентность метрик $\tilde d_S(\cdot,\ \cdot)$ и $\tilde d^{(S)}(\cdot,\ \cdot)$ (в случае $V^n=\mathbf{R}^n$) доказана.

Метрики $d^{(S)}(\cdot,\ \cdot)$ и $\tilde d^{(S)}(\cdot,\ \cdot)$ индуцируют на S одну и ту же топологию (при $V^n=\mathbf{R}^n$) (доказательство опускаем: оно является упрощением приведенного в подпункте б) п. 4 доказательства того, что метрики $d_S(\cdot,\ \cdot)$ и $\tilde d_S(\cdot,\ \cdot)$ индуцируют на S одну и ту же топологию).

В случае $V^n=\mathbf{R}^n$ метрические пространства $(S,\ d^{(S)})$ и $(S_j,\ d_1)$, как известно, полные. Содержание следующей статьи цикла состоит в доказательстве полноты метрических пространств $(S,\ d_S)$, $(S_j,\ d_1)$ для произвольного V^n, удовлетворяющего условиям п. 1.

Литература

1. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1408—1416.
2. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. П. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 9, с. 1587—1598.
3. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. III. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 10, с. 1766—1785.
4. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. IV. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 3, с. 431—468.
5. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. V. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 8, с. 1394—1410.
6. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства.— М.: Мир, 1970.