В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

БЭРОВСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА. VII

Данная работа примыкает к статье* [1].

Предложение 1. *Метрическое пространство* (S, d_s), *определенное в п. 2 [1], полное.*

Доказательство. Пусть $(f_k \in S\ k \in N)$ и последовательность $\{f_k\}_{k\in N}$ фундаментальная в (S, d_s), т. е.

$$d_s(f_k, f_m)\xrightarrow[\min\{k,m\}\to\infty]{} 0. \tag{1}$$

а) Фиксируем произвольное $r > 0$. Через V_r обозначаем r-окрестность точки x_0, т. е. множество всех тех $x \in V^n$, для которых $\rho(x, x_0) < r$ (напомним, что точка $x_0 \in V^n$ была зафиксирована в **[1,** п. 2] при определении метрики d_s). Положим $q \underset{\text{def}}{=} (1+r)^{-1}$.

Имеем

$$\inf_{x\in V_r}[1+\rho(x,x_0)]^{-1} = \{\sup_{x\in V_r}[1+\rho(x,x_0)]\}^{-1} \geqslant (1+r)^{-1} = q. \tag{2}$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Тогда $\min\left\{\frac{1}{2}\varepsilon, q\right\} > 0$ и, согласно соотношению (1), существует $(l \in \mathbf{N})$ такое, что для всяких $(k \in \mathbf{N})$, $(m \in \mathbf{N})$ таких, что $\min\{k, m\} \geqslant l$, имеет место неравенство

$$d_s(f_k, f_m) < \min\left\{\frac{1}{2}\varepsilon, q\right\}. \tag{3}$$

При всяких $k \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ таких, что $\min\{k, m\} \geqslant l$, для всякого $x \in V_r$ имеет место неравенство*

$$\inf_{u\in G(f_k x, f_m x)}\{\min\{s(u),[1+\rho(x,x_0)]^{-1}\} + \|\varphi_u df_{mx} - df_{kx}\|\} \underset{(1.5)}{\leqslant}$$

$$\underset{(1.5)}{\leqslant} d_s(f_k, f_m) \underset{(3)}{<} \min\left\{\frac{1}{2}\varepsilon, q\right\},$$

из которого следует, что найдется кривая (путь) $u \in G(f_k x, f_m x)$ такая, что имеет место неравенство

$$\min\{s(u),[1+\rho(x,x_0)]^{-1}\} + \|\varphi_u df_{mx} - df_{kx}\| < \min\left\{\frac{1}{2}\varepsilon, q\right\} \leqslant q, \tag{4}$$

из которого в силу неравенства (2) следует неравенство

$$s(u) < [1+\rho(x,x_0)]^{-1}; \tag{5}$$

в силу неравенства (5) неравенство (4) можно переписать в виде

$$s(u) + \|\varphi_u df_{mx} - df_{kx}\| < \min\left\{\frac{1}{2}\varepsilon, q\right\} \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Подведем итог этого пункта. В нем доказано следующее утверждение. *Для всякого* $r > 0$ *для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $l \in \mathbf{N}$ *такое, что при всяких* $k \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ *таких, что* $\min\{k, m\} \geqslant l$, *для всякого* $x \in V_r$ *найдется кривая (путь)* $u \in G(f_k x, f_m x)$ *такая, что*

---

* В этой статье кривую (путь), т. е. отображение $[0,1] \to V^n$, обозначаем не через u_t, как в [1], а через u; через u_t обозначаем значение этого отображения в точке t, через du_t —производную этого отображения в точке t, а через u_t обозначается $(du_t) \times (\tau_i^{[1]})^{-1}$ 1 (определение отображения $\tau_x^{[n]}$, отождествляющего касательное пространство к $\mathbf{R}^n$ в точке x с $\mathbf{R}^n$, воспроизведено в [1], п. 8, но там оно обозначено через τ_x). В этой статье ссылка на формvлу (1.N) есть сокращенная запись ссылки на формулу (N) [1].

$$s(u)+\left\|\varphi_u df_{mx}-df_{kx}\right\|<\frac{1}{2}\varepsilon. \qquad (6)$$

б) Поскольку для всяких $y_1\in V^n$, $y_2\in V^n$ имеет место формула $\rho(y_1,y_2)\underset{\mathrm{def}}{=}\inf\limits_{\mathrm{def}\, u\in G(y_1,y_2)}s(u)$, то из утверждения, доказанного в п. а), вытекает следующее утверждение. Для всякого $r>0$ для всякого $\varepsilon>0$ существует $l\in\mathbf{N}$ такое, что для всяких $k\in\mathbf{N}$, $m\in\mathbf{N}$ таких, что $\min\{k,m\}\geqslant l$, для всякого $x\in V_r$ имеет место неравенство

$$\rho(f_kx,f_mx)<\frac{1}{2}\varepsilon. \qquad (7)$$

Из этого утверждения вытекает, что для всякого $x\in V^n$ (заметим, что всякое $x\in V^n$ принадлежит множеству V_r при $r>\rho(x,x_0)$) последовательность $\{f_rx\}_{r\in\mathbf{N}}$ фундаментальная, а так как метрическое пространство (V^n,ρ) полное (это требование было наложено в п. 1 [1]), то для всякого $x\in V^n$ существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}f_kx\in V^n$.

Определим отображение $f:V^n\to V^n$, *положив при всяком* $x\in V^n$

$$fx\underset{\mathrm{def}}{=}\lim_{k\to\infty}f_kx. \qquad (8)$$

в) Если для некоторого $x\in V^n$ для некоторого $k\in\mathbf{N}$ и всех $m\in\mathbf{N}$, больших некоторого $l\in\mathbf{N}$, выполнено неравенство (7), то выполнено и неравенство

$\rho(f_kx,fx)\underset{(8)}{=}\lim\limits_{m\to\infty}\rho(f_kx,f_mx)\underset{(7)}{\leqslant}\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon.$ Поэтому из утверждения, содержащего формулу (7), вытекает следующее утверждение. *Для всякого* $r>0$ *для всякого* $\varepsilon>0$ *существует* $l\in\mathbf{N}$ *такое, что для всякого натурального* $k\geqslant l$ *для всякого* $x\in V_r$ *имеет место неравенство* $\rho(f_kx,fx)<\varepsilon$.

Это утверждение означает, что при всяком $r>0$ последовательность отображений $\{f_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ сходится к отображению f равномерно на множестве V_r, а так как* $\{V_r\}_{r\in\mathbf{R}_*^+}$ — покрытие пространства V^n открытыми множествами, то *отображение* $f:V^n\to V^n$ *непрерывно.*

г) Фиксируем произвольную точку $y\in V^n$. Пусть $W\ (y)$ — некоторая координатная окрестность этой точки, $h_y:W(y)\to R^n$ — координатное отображение; пусть, далее, $W(fy)$ — некоторая координатная окрестность точки fy, причем $h_{fy}:W(fy)\to R^n$ — соответствующее координатное отображение**.

Возьмем какую-нибудь открытую окрестность V точки y такую, что ее замыкание $\overline{V}$ компактно, причем

$$\overline{V}\subset W(y), \qquad (9)$$

и какую-нибудь открытую окрестность W точки fy такую, что ее замыкание $\overline{W}$ компактно, причем

$$\overline{W}\subset W(fy). \qquad (10)$$

Фиксируем какое-нибудь число $\overline{r}>\rho(y,x_0)$; тогда $y\in V_{\overline{r}}$ (напомним, что через V_r обозначается множество всех тех точек $x\in V^n$, для которых $\rho(x,x_0)<r$; следовательно, V_r — открытое множество при всяком $r>0$.) Берем, далее, число $r_1>0$ такое, что $3r_1$-окрестность точки fy содержится в W:

$$V_{3r_1}(fy)\subset W \qquad (11)$$

---

* Через $\mathbf{R}_*^+$ обозначается множество всех положительных вещественных чисел.

** Мы различаем в обозначениях: R^n — пространство строк из n вещественных чисел, рассматриваемое как векторное пространство над полем вещественных чисел, и R^n —абстрактно заданное n-мерное векторное пространство над полем вещественных чисел.

(через $V_\sigma(z)$ обозначаем σ-окрестность точки $z \in V^n$, т. е. множество всех тех точек $x \in V^n$, для которых $\rho(x,z) < \sigma$; вместо $V_\sigma(x_0)$ пишем короче: V_σ). Пусть W_1 — такая открытая окрестность точки y, что имеют место включения:

$$ \tag{12} $$

$$fW_1 \subset V_{r_1}(fy). \tag{13}$$

Существование такой окрестности W_1 точки y вытекает из доказанной в п. в) непрерывности отображения $f: V^n \to V^n$.

Возьмем, далее, такое $l_1 \in \mathbf{N}$, что для всякого натурального $k \geqslant l_1$ для всякого $x \in V_{\bar r}$ имеет место неравенство

$$\rho(f_k x, fx) < r_1. \tag{14}$$

Существование такого l_1 следует из утверждения, сформулированного и доказанного в п. в).

Для всякого $x \in W_1$ имеем

$$x \in W_1 \underset{(12)}{\subset} V \cap V_{\bar r}, \tag{15}$$

$$fx \in fW_1 \underset{(13)}{\subset} V_{r_1}(fy). \tag{16}$$

Для всякого $x \in W_1$ имеем $x \underset{(15)}{\in} V \cap V_{\bar r}$, и, следовательно (см. выше фразу, содержащую формулу (14)), для всякого $x \in W_1$ для всякого натурального $k \geqslant l_1$ имеем

$$f_k x \in V_{r_1}(fx) \underset{(16)}{\subset} V_{2r_1}(fy) \underset{(11)}{\subset} W; \tag{17}$$

кроме того, для всякого $x \in W_1$ имеем

$$fx \underset{(16)}{\in} V_{r_1}(fy) \underset{(11)}{\subset} W. \tag{18}$$

Поэтому при всяком натуральном $k \geqslant l_1$ определено отображение*

$$h_{fy} f_k (h_y)^{-1}|_{h_y w_1} : h_y W_1 \to h_{fy} W \tag{19}$$

и определено отображение

$$h_{fy} f (h_y)^{-1}|_{h_y w_1} : h_y W_1 \to h_{fy} W. \tag{20}$$

Введя обозначения:

$$\hat W_1 \underset{\text{def}}{=} h_y W_1, \tag{21}$$

$$\hat W \underset{\text{def}}{=} h_{fy} W, \tag{22}$$

$$\hat f_k \underset{\text{def}}{=} h_{fy} f_k (h_y)^{-1}|_{h_y w_1} \quad (k \geqslant l_1), \tag{23}$$

$$\hat f \underset{\text{def}}{=} h_{fy} f (h_y)^{-1}|_{h_y w_1}, \tag{24}$$

перепишем формулы (19), (20) в виде $\hat f_k : \hat W_1 \to \hat W \ (k \geqslant l_1)$, $\hat f : \hat W_1 \to \hat W$. Так как отображения $(h_y)^{-1} : h_y W(y) \to V^n$, $h_{fy} : W(fy) \to R^n$ принадлежат тому же классу гладкости, что и многообразие V^n (т.е., по условию, классу C^2), и при всяком $k \in \mathbf{N}$ отображение $f_k : V^n \to V^n$ принадлежит классу C^1, то при всяком натуральном $k \geqslant l_1$ отображение $\hat f_k : \hat W_1 \to \hat W$ принадлежит классу C^1.

$\hat W_1$ и $\hat W$ — открытые множества в R^n. В самом деле, W_1 — открытое множество в V^n, $W_1 \underset{(12)}{\subset} V \underset{(9)}{\subset} W(y)$, $\hat W_1 \underset{(21)}{=} h_y W_1$,, а отображение $h_y : W(y) \to h_y W(y)$ — гомеоморфизм; W — открытое множество в V^n, $W \underset{(10)}{\subset} W(fy)$, $\hat W \underset{(22)}{\subset} h_{fy} W$, а отображение $h_{fy} : W(fy) \to h_{fy} W(fy)$ — гомеоморфизм.

---

* Через $g|_A$ обозначается сужение на множество A отображения g.

д) Возьмем $l_2 \in \mathbf{N}$ такое, что при всяких $k \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ удовлетворяющих неравенству $\min\{k,m\} \geqslant l_2$, для всякого $x \in V_{\bar r}$ найдется кривая (путь) $u \in G(f_k x, f_m x)$ такая, что

$$s(u) + \|\varphi_u df_{mx} - df_{kx}\| < r_1 \tag{25}$$

(такое l_2 существует в силу утверждения, доказанного в п. а); формулировка цитируемого утверждения составляет содержание последней фразы п. а)).

Положим

$$\bar l \underset{\text{def}}{=} \max\{l_1, l_2\} \tag{26}$$

(напомним, что число l_1 определено фразой, содержащей формулу (14)).

Для всяких $k \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ таких, что $\min\{k,m\} \geqslant \bar l \underset{(26)}{\geqslant} l_2$, для всякого $x \in W_1 \underset{(12)}{\subset} V_{\bar r}$ найдется кривая (путь) $u \in G(f_k x, f_m x)$, удовлетворяющая неравенству (25) (см. фразу, содержащую формулу (25)). Из неравенства (25) следует неравенство

$$s(u) < r_1 \tag{27}$$

откуда при всяких $k \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ таких, что $\min\{k,m\} \geqslant \bar l$, при всяком $x \in W_1$ в силу фраз, содержащих формулы (16) и (17), следует, что кривая (путь) $u \in G(f_k x, f_m x)$ лежит в множестве* $V_{3r_1}(fy) \underset{(11)}{\subset} W$.

В самом деле, пусть $z = u_\theta$, где $\theta \in [0,1]$, — произвольная точка на кривой (пути) $u \in G(f_k x, f_m x)$. Тогда

$$\rho(z, f_k x) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\upsilon \in G(f_k x, z)} s(\upsilon) \leqslant s(w) \leqslant s(u) \underset{(27)}{<} r_1, \tag{28}$$

где $w \in G(f_k x, z)$ — кривая (путь), определенная равенством $w_t \underset{\text{def}}{=} u_{\theta + t(1-\theta)}$ $(t \in [0,1])$. Имеем

$$z \underset{(28)}{\in} V_{r_1} G(f_k x) \tag{29}$$

а так как $x \in W_1$, $k \geqslant \bar l \underset{(26)}{\geqslant} l_1$, то в силу фразы, содержащей формулу (17), имеет место включение

$$V_{r_1}(f_k x) \subset V_{2r_1}(fx), \tag{30}$$

а в силу фразы, содержащей формулу (16), имеет место включение

$$V_{2r_1}(fx) \subset V_{3r_1}(fy); \tag{31}$$

из (29)—(31) следует, что $z \in V_{3r_1}(fy) \underset{(11)}{\subset} W$, что и требовалось доказать.

Введем обозначение

$$\hat u_t \underset{\text{def}}{=} h_{fy} u_t \quad (t \in [0,1]). \tag{32}$$

Так как кривая (путь) *u* лежит в *W,* то в силу формул (22), (32) кривая (путь) $\hat u$, определенная формулой (32), лежит в $\hat W$; так как отображение $h_{fy} : W(fy) \to R^n$ принадлежит* классу C^2, то из того, что кривая (путь) u — кусочно-гладкая, следует, что кривая (путь) $\hat u$ — кусочно-гладкая; так как $u \in G(f_k x, f_m x)$, то $\hat u \in G(h_{fy} f_k x, h_{fy} f_m x)$.

Итак, в этом пункте доказано следующее утверждение: *для всяких* $k \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ *таких, что* $\min\{k,m\} \geqslant \bar l$, *для всякого* $x \in W_1$ *найдется кривая (путь)* $u \in G(f_k x, f_m x)$ *удовлетворяющая неравенству (25); при всяких* $k \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ *таких, что* $\min\{k,m\} \geqslant \bar l$, *при всяком* $x \in W_1$ *всякая кривая (путь)* $u \in G(f_k x, f_m x)$ *удовлетворяющая неравенству (25), лежит в W и кривая (путь), определенная формулой (32), обладает свойствами, сформулированными в предыдущей фазе.*

---

* Как и в [1], под словами: «кривая (путь) ***u*** лежит в множестве ***M***», где $M \subset V^n$, понимается следующее: «все значения отображения $u : [0,1] \to V^n$ принадлежат множеству *M*».

* Напомним, что координатные отображения принадлежат тому же классу гладкости, что и многообразие V^n; в данном случае, следовательно, они принадлежат классу C^2 (это условие наложено в п. 1 [1]).

е) Для всякой кривой (пути) $u \in G(y_1, y_2)$, лежащей в W, определим отображение

$$\hat{\varphi}_u \underset{\text{def}}{=} \tau_{h_{fy}y_1} d(h_{fy})_{y_1} \ \ \varphi_u (d(h_{fy})_{y_2})^{-1} (\tau_{h_{fy}y_2})^{-1}. \tag{33}$$

Здесь $\tau_z = \tau_z^{(n)}$, где $\tau_z^{[k]} : \hat{\pi}^{-1}(z) \to R^k$ (при всяком $z \in R^k$), — стандартное отображение «отождествления», ставящее в соответствие вектору касательного пространства $\hat{\pi}^{-1}(z)$ многообразия R^k в точке z вектор из R^k; определение отображений $\tau_z^{[k]}$ воспроизведено в п. 8 [1] с той разницей, что там вместо R^k фигурирует $\mathbf{R}^n$, а касательное пространство многообразия $\mathbf{R}^n$ в точке z обозначается через $\hat{\pi}^{-1}(z)$; там же в **[1]** даны библиографические указания по этому поводу.

Поясним обозначения: если отображение обозначено буквой с индексом (например, h_{fy}), то во избежание путаницы в обозначении производной этого отображения в точке **z** оставляем скобки (например, $d(h_{fy})_z$); иногда, впрочем, скобки не пишем, например всюду выше написано df_{mx}, а не $d(f_m)_x$ (это последнее сокращение обозначения делается в тех случаях, когда индекс состоит из одной буквы и обозначение точки, в которой берется производная, состоит из одной буквы).

ж)На многообразии V^n в п. **1** [1] была зафиксирована риманова метрика (класса C^1) $\delta(\cdot, \cdot)$. Риманова метрика $\delta(\cdot, \cdot)$ многообразия V^n индуцирует риманову метрику $\tilde{\delta}(\cdot, \cdot)$ на $h_y W(y)$ и риманову метрику $\tilde{\delta}(\cdot, \cdot)$ на $h_{fy} W(fy)$, определяемые формулами:

$$\tilde{\delta}(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2) \underset{\text{def}}{=} \delta(d((h_y)^{-1})_{\hat{\pi}b_1} b_1, \ d((h_y)^{-1})_{\hat{\pi}b_1} b_2) \tag{34}$$

(для всяких $\mathrm{b}_i \in T(h_y W(y))$ $(i \in \{1,2\}$ таких, что $\hat{\pi}\mathrm{b}_1 = \hat{\pi}\mathrm{b}_2$),

$$\tilde{\delta}(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) \underset{\text{def}}{=} \delta(d((h_{fy})^{-1})_{\hat{\pi}a_1} \mathrm{a}_1, \ d((h_{fy})^{-1})_{\hat{\pi}a_1} \mathrm{a}_2) \tag{35}$$

(для всяких $\mathrm{a}_i \in T(h_{fy} W(fy))$ $i \in \{1,2\}$ таких, что $\hat{\pi}\mathrm{a}_1 = \hat{\pi}\mathrm{a}_2$).

Поясним обозначения. Касательное расслоение многообразия R^n обозначаем через $(TR^n, \hat{\pi}, R^n)$, его сужение на открытое множество $G \subset R^n$ — через $(TG, \hat{\pi}, G)$. Напомним, что

$$\hat{W}_1 \underset{(21)}{=} h_y W_1 \underset{(12)}{\subset} h_y V \underset{(9)}{\subset} h_y W(y), \tag{36}$$

$$\hat{W} \underset{(22)}{=} h_{fy} W \underset{(10)}{\subset} h_{fy} W(fy). \tag{37}$$

С помощью отображений «отождествления» τ_x римановы метрики $\tilde{\delta}_1(\cdot, \cdot)$ и $\tilde{\delta}(\cdot, \cdot)$ могут быть, как хорошо известно (и легко доказывается), записаны в виде

$$\tilde{\delta}_1(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2) = g^{(1)}_{\alpha\beta}(\hat{\pi}\mathrm{b}_1)(\tau_{\hat{\pi}\mathrm{b}_1} \mathrm{b}_1)^{\alpha} \ \ (\tau_{\hat{\pi}\mathrm{b}_2} \mathrm{b}_2)^{\beta} \tag{38}$$

(для всяких $\mathrm{b}_i \in T(h_y W(y))$ $(i \in \{1,2\}$ таких, что $\hat{\pi}\mathrm{b}_1 = \hat{\pi}\mathrm{b}_2$),

$$\tilde{\delta}_1(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) = g_{\alpha\beta}(\hat{\pi}\mathrm{a}_1)(\tau_{\hat{\pi}\mathrm{a}_1} \mathrm{a}_1)^{\alpha} \ \ (\tau_{\hat{\pi}\mathrm{a}_2} \mathrm{a}_2)^{\beta} \tag{39}$$

(для всяких $\mathrm{a}_i \in T(h_{fy} W(fy))$ $i \in \{1,2\}$ таких, что $\hat{\pi}\mathrm{a}_1 = \hat{\pi}\mathrm{a}_2$), где при всяких $\alpha \in \{1,...,n\}$, $\beta \in \{1,...,n\}$ вещественная функция $g^{(1)}_{\alpha\beta}(\cdot)$ определена и непрерывно дифференцируема на $h_y W(y) \underset{(36)}{\supset} \hat{W}_1$, а вещественная функция $g_{\alpha\beta}(\cdot)$ определена и непрерывно дифференцируема на $h_{fy} W(fy) \underset{(37)}{\supset} \hat{W}$, причем матрицы $g^{(1)}_{\alpha\beta}(z)$, $(g_{\alpha\beta}(z))$ симметрические, а соответствующие им квадратичные формы положительно определенные при всяком $z = (z^1, ..., z^n)$ (соответственно из множества $h_y W(y) \supset \hat{W}_1$ и из множества $h_{fy} W(fy) \supset \hat{W}$. В правых частях равенств (38), (39) по повторяющимся индексам α и β подразумевается суммирование от 1 до n.

з) Для всяких двух точек $\hat{y}_1 \in \hat{W}$, $\hat{y}_2 \in \hat{W}$ для всякой кривой (пути) $u \in G(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$, лежащей в $\hat{W}$, в классических руководствах по римановой геометрии и тензорному анализу определено отображение $\hat{\varphi}_\upsilon$, ставящее в соответствие всякому вектору $a \in R^n$ вектор

$\hat{\varphi}_\upsilon a \in R^n$, являющийся результатом параллельного перенесения вектора a вдоль кривой (пути) υ (в силу римановой связности, индуцированной римановой метрикой (35)). Если $\upsilon = \hat{u}$ где кривая (путь) $\hat{u}$ определена через некоторую кривую (путь) $u \in G(y_1, y_2)$ лежащую в W, формулой (32), то, как известно,

$$\hat{\varphi}_{\hat{u}} = \hat{\varphi}_\upsilon, \tag{40}$$

где отображение $\hat{\varphi}_u$ определено формулой (33).

Для дальнейшего изложения удобно ввести некоторые обозначения, которые будут часто использовываться на протяжении нескольких следующих пунктов. Пусть $g: U \to R^n$ — произвольное дифференцируемое в точке $z \in R^n$ отображение (здесь U — окрестность точки z в пространстве R^n). Полагаем по определению

$$\hat{d}g_z \underset{\text{def}}{=} \tau_{gz} dg_z (\tau_z)^{-1} : R^n \to R^n, \tag{41}$$

Где $\hat{d}g_z : \hat{\pi}^{-1}(z) \to \hat{\pi}^{-1}(gz)$ есть производная отображения $g: U \to R^n$ в точке z. Как известно, $\hat{d}g_z$ задается матрицей $\left(\dfrac{\partial g^i}{\partial z^j}\right)$.

Пусть $L \in \operatorname{Hom}(R^n, R^n)$, т. е. L есть линейное отображение пространства R^n в R^n. Полагаем по определению

$$\|L\|_c \underset{\text{def}}{=} \sup_{b \in R^n_*} \{ |La|_c \cdot |a|_c^{-1} \}, \tag{42}$$

где

$$|a|_c \underset{\text{def}}{=} \left[\sum_{i=1}^n (a^i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \; a = (a^1, ..., a^n). \tag{43}$$

Для всяких $z_1 \in h_y W(y)$, $z \in h_{fy} W(fy)$ полагаем по определению

$$\|L\|^z_{1,z_1} \underset{\text{def}}{=} \sup_{b \in R^n_*} \{ |Lb|_z \, (|b|_{1,z_1})^{-1} \}, \tag{44}$$

где

$$|a|_z \underset{def}{=} \left[g_{\alpha\beta}(z) a^\alpha a^\beta \right]^{\frac{1}{2}} \underset{(39)}{=} \left[\tilde{\delta}((\tau_z)^{-1} a, (\tau_z)^{-1} a) \right]^{\frac{1}{2}} \underset{(35)}{=}$$

$$\underset{(35)}{=} \left[\delta(d((h_{fy})^{-1})_z (\tau_z)^{-1} a, \; d((h_{fy})^{-1})_z (\tau_z)^{-1} a \right]^{\frac{1}{2}} \tag{45}$$

для всякого $a = (a^1, ..., a^n) \in R^n$,

$$|b|_{1,z_1} \underset{def}{=} \left[g^{(1)}_{\alpha\beta}(z_1) b^\alpha b^\beta \right]^{\frac{1}{2}} \underset{(38)}{=} \left[\tilde{\delta}_1((\tau_{z_1})^{-1} b, \; (\tau_{z_1})^{-1} b \right]^{\frac{1}{2}} \underset{(34)}{=}$$

$$\underset{(34)}{=} \left[\delta(d((h_y)^{-1})_{z_1} (\tau_{z_1})^{-1} b, \; d((h_y)^{-1})_{z_1} (\tau_{z_1})^{-1} b \right]^{\frac{1}{2}} \tag{46}$$

для всякого $b = (b^1, ..., b^n) \in R^n$ (в формулах (45), (46) по индексам α, β, повторяющимся вверху и внизу, подразумевается суммирование от 1 до n). Для всяких $z_1 \in h_y W(y)$, $z \in h_{fy} W(fy)$ полагаем по определению

$$\|L\|^{1,z_1}_z \underset{def}{=} \sup_{b \in R^n_*} \left\{ |Lb|_{1,z_1} \, (|b|_z)^{-1} \right\}. \tag{47}$$

Для всякого $x \in W_1$ для всяких натуральных $k \geqslant l_1$, $m \geqslant l_1$ для всякой кривой (пути) $u \in G(f_k x, f_m x)$, лежащей в W, имеет место равенство

$$\varphi_u \underset{(33)}{=} (d(h_{fy})_{f_k x})^{-1} (\tau_{h_{fy} f_k x})^{-1} \widehat{\varphi}_u \tau_{h_{fy} f_m x} d(h_{fy})_{f_m x}, \tag{48}$$

при этом при $i = k$ и при $i = t$ имеем

$$df_{ix} \underset{(23)}{=} (d(h_{fy})_{f_i x})^{-1} (d(\widehat{f}_i)_{h_y x}) d(h_y)_x \underset{(41)}{=} (d(h_{fy})_{f_i x})^{-1} (\tau_{\hat{f}_i h_y x})^{-1} \times$$

$$\times(\widehat{d}(\widehat{f}_i)_{h_y x})\tau_{h_y x} d(h_y)_x \underset{(23)}{=} (d(h_{fy})_{f_i x})^{-1}(\tau_{h_{fy} f_i x})^{-1}(\widehat{d}(\widehat{f}_i)_{h_y x})\tau_{h_y x} d(h_y)_x \tag{49}$$

Для всякого $x \in W_1$ для всяких натуральных $k \geqslant l_1,\ m \geqslant l_1$ для всякой кривой (пути) $u \in G(f_k x, f_m x)$, лежащей в W, имеем

$$\varphi_u df_{mx} - df_{kx} \underset{(49)}{\overset{(48)}{=}}$$

$$\underset{(49)}{\overset{(48)}{=}} d(h_{fy})_{f_k x})^{-1}(\tau_{h_{fy} f_k x})^{-1}\widehat{\varphi}_u(\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x})\tau_{h_y x} d(h_y)_x -$$

$$-d(h_{fy})_{f_k x})^{-1}(\tau_{h_{fy} f_k x})^{-1}(\widehat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y x})\tau_{h_y x} d(h_y)_x \underset{(40)}{=}$$

$$\underset{(40)}{=} (d(h_{fy})_{f_k x})^{-1}(\tau_{h_{fy} f_k x})^{-1}(\widehat{\varphi}_{\hat{u}}\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x} - \widehat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y x})\tau_{h_y x} d(h_y)_x, \tag{50}$$

$$\|\varphi_u df_{mx} - df_{kx}\| \underset{def}{=} \sup_{\mathfrak{X} \in \pi_*^{-1}(x)} \{[\delta((\varphi_u df_{mx} - df_{kx})\mathfrak{X},$$

$$\left(\varphi_u df_{mx} - df_{kx}\right)\mathfrak{X})]^{\frac{1}{2}}\left[\delta(\mathfrak{X},\mathfrak{X}\right]^{-\frac{1}{2}}\} =$$

$$= \sup_{b \in R_*^n}\Big\{[\delta((\varphi_u df_{mx} - df_{kx})(d(h_y)_x)^{-1}(\tau_{h_y x})^{-1} b,$$

$$(\varphi_u df_{mx} - df_{kx})(d(h_y)_x)^{-1}(\tau_{h_y x})^{-1} b]^{\frac{1}{2}}[\delta((d(h_y)_x)^{-1}(\tau_{h_y x})^{-1} b,$$

$$(d(h_y)_x)^{-1}(\tau_{h_y x})^{-1} b)]^{-\frac{1}{2}}\} \underset{(50)}{=} \sup_{b \in R_*^n}\{[\delta((d(h_{fy})_{f_k x})^{-1}(\tau_{h_{fy} f_k x})^{-1} \times$$

$$\times(\widehat{\varphi}_{\hat{u}}\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x} - \widehat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y x})b,\ \ (d(h_{fy})_{f_k x})^{-1}(\tau_{h_{fy} f_k x})^{-1} \times$$

$$\times(\widehat{\varphi}_{\hat{u}}\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x} - \widehat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y x})b)]^{\frac{1}{2}}\ [\delta((d(h_y)_x)^{-1}(\tau_{h_y x})^{-1} b,$$

$$(d(h_y)_x)^{-1}(\tau_{h_y x})^{-1} b)]^{-\frac{1}{2}}\} \underset{(46)}{\overset{(45)}{=}}$$

$$\underset{(46)}{\overset{(45)}{=}} \sup_{b \in R_*^n}\left\{\left|(\widehat{\varphi}_{\hat{u}}\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x} - \widehat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y x})b\right|_{h_{fy} f_k x}(|b|_{1,h_y x})^{-1}\right\} \underset{(44)}{=}$$

$$\underset{(44)}{=} \left\|\widehat{\varphi}_{\hat{u}}\widehat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x} - \widehat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y x}\right\|_{1,h_y x}^{h_{fy} f_k x}. \tag{51}$$

и) Как известно, отображение $\widehat{\varphi}_v$, определение которого воспроизведено в начале п. з), может быть описано следующим образом. Пусть $y_1 \in \widehat{W},\ y_2 \in \widehat{W}$ и пусть кривая (путь) $v \in G(y_1, y_2)$ лежит в $\widehat{W}$. Пусть $a_0 = (a_0^1, ..., a_0^n) \in R^n$. Тогда вектор $\widehat{\varphi}_v a_0$ равен значению при t=1 решения следующей задачи Коши[1]:

$$\frac{da^\gamma}{dt} = -\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(v_t^1, ..., v_t^n)\frac{dv_t^\alpha}{dt}a^\beta\,(\gamma \in \{1, ..., n\}), \tag{52}$$

$$a(0) = a_0, \tag{53}$$

где $(v_t^1, ... v_t^n) = v_t(t \in [0,1])$, а символы Кристоффеля $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ определены известной формулой

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(z^1, ..., z^n) = \frac{1}{2}g^{\gamma\xi}(z^1, ..., z^n)\left[\frac{\partial g_{\alpha\xi}(z^1, ..., z^n)}{\partial z^\beta} + \right.$$

[1] Для числовой функции $\xi(\cdot)$, значение которой в точке t может обозначаться не только через $\xi(t)$, но и через ξ_t, принято стандартное обозначение (вместо $\frac{d\xi}{dt}$ может быть написано $\frac{d\xi_t}{dt}$)

$$\frac{d\xi}{dt} = \lim_{\to 0}(\Delta t)^{-1}\left[\xi(t + \Delta t) - \xi(t)\right].$$

$$+\frac{\partial g_{\beta\xi}(z^1,...,z^n)}{\partial z^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}(z^1,...,z^n)}{\partial z^\xi}\Bigg]. \qquad (54)$$

В правых частях равенств (52) и (54) по всякому дважды (вверху и внизу) встречающемуся индексу подразумевается суммирование от 1 до n. Через $(g^{\alpha\beta})$ обозначается матрица, обратная матрице $(g_{\alpha\beta})$.

к) Имеют место следующие утверждения.

i) *При всяких* $\alpha\in\{1,...,n\}$, $\beta\in\{1,...,n\}$ *функция* $g_{\alpha\beta}(\cdot)$ *принадлежит классу* C^1 *на некотором открытом множестве* $G\in R^n$.

Доказательство. Таким открытым множеством G является множество $h_{fy}W(fy)$ (см. предпоследнюю фразу п. ж)).

При всяких $\alpha\in\{1,...,n\}$, $\beta\in\{1,...,n\}$, $\gamma\in\{1,...,n\}$ *функция* $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\cdot)$, *определенная формулой (54), непрерывна на множестве* G (это непосредственно следует из предыдущего утверждения).

ii) $\overline{\widehat{W}}$ — *компактное множество, содержащееся в G.*

Доказательство. $\widehat{W}\underset{(22)}{=}h_{fy}W, \overline{W}$ - компактное множество, содержащееся в множестве $W(fy)$ (см. фразу, содержащую формулу (10)), а координатное отображение $h_{fy}:W(fy)\to h_{fy}W(fy)$ — гомеоморфизм.

Пусть теперь (до конца этого пункта) K — компактное множество, содержащееся в открытом множестве $G\in R^n$, на котором функции $g_{\alpha\beta}(\cdot)$ $\alpha\in\{1,...,n\}$, $\beta\in\{1,...,n\}$ принадлежат классу C^1 (например, $K=\overline{\widehat{W}}$).

Найдется $\bar{c}\in R^+$ такое, что при всяких $\alpha\in\{1,...,n\}$, $\beta\in\{1,...,n\}$, $\gamma\in\{1,...,n\}$, $z=\{z^1,...,z^n\}\in K$ имеет место неравенство

$$\left|\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(z^1,...,z^n)\right|\leqslant\bar{c}. \qquad (55)$$

При всяком $z=\{z^1,...,z^n\}\in G$ квадратичная форма $g_{\alpha\beta}(z)a^\alpha a^\beta$ положительно определенная, а ее коэффициенты непрерывны на G; хорошо известно (и легко доказывается), что отсюда следует (поскольку K — компактное множество, $K\in G$, что существуют числа $\bar{d}\geqslant d>0$ такие, что для всякого $z=\{z^1,...,z^n\}\in K$ для всякого $a=\{a^1,...,a^n\}\in R^n$ имеет место неравенство[1]

$$\overline{d^2}\left(|a|_c\right)^2\geqslant g_{\alpha\beta}(z)a^\alpha a^\beta\geqslant d^2\left(|a|_c\right)^2. \qquad (56)$$

Пусть $y_1\in K$, $y_2\in K$ и пусть кривая (путь) $v\in G(y_1,y_2)$ лежит в K.

Линейную систему дифференциальных уравнений (52) перепишем в виде

$$\frac{da^\gamma}{dt}=B^\gamma_\beta a^\beta \quad (\gamma\in\{1,...,n\}), \qquad (57)$$

где

$$B^\gamma_\beta(t)\underset{def}{=}-\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(v^1_t,...,v^n_t)\frac{dv^\alpha_t}{dt} \qquad (58)$$

$$\left(\beta\in\{1,...,n\},\quad \gamma\in\{1,...,n\}\right)$$

(сохраняется обычное соглашение о суммировании по дважды (вверху и внизу) встречающимся индексам).

При всяких $\beta\in\{1,...,n\}$, $\gamma\in\{1,...,n\}$, $t\in[0,1]$ имеем $\left|B^\gamma_\beta(t)\right|\underset{(58)}{\overset{(55)}{\leqslant}}\sum_{\alpha=1}^n\bar{c}\left|\frac{dv^\alpha_t}{dt}\right|$, следовательно,

---

[1] Напомним, что в качестве K можно взять $\overline{\widehat{W}}=\overline{h_{fy}W}$.

$$\left|B_\beta^\gamma(t)\right|^2 \leqslant \overline{c^2} n^2 \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{dv_t^\alpha}{dt} \right)^2 . \tag{59}$$

Далее, при всяких $\gamma \in \{1,...,n\}$, $\tau \in [0,1]$ имеем

$$\sum_{\beta=1}^{n} \left[B_\beta^\gamma(\tau) \right]^2 \underset{(59)}{\leqslant} \overline{c^2} n^3 \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{dv_\tau^\alpha}{d\tau} \right)^2 \underset{(56)}{\leqslant} \overline{c^2} n^3 d^{-2} g_{\alpha\beta}(v_\tau) \frac{dv_\tau^\alpha}{d\tau} \frac{dv_\tau^\beta}{d\tau} . \tag{60}$$

В силу леммы Гронуолла для всякого решения $a(t) = (a^1(t),...a^n(t))$ линейной системы дифференциальных уравнений (57) при всяком $t \in [0,1]$ имеет место неравенство

$$\left|a(t)\right|_c \leqslant \left|a(0)\right|_c \exp \int_0^t \left(\sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\gamma=1}^{n} \left[B_\beta^\gamma(\tau) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \underset{(60)}{\leqslant}$$

$$\underset{(60)}{\leqslant} \left|a(0)\right|_c \exp \left\{ \bar{c} d^{-1} n^2 \int_0^t \left[g_{\alpha\beta}(v_\tau) \frac{dv_\tau^\alpha}{d\tau} \frac{dv_\tau^\beta}{d\tau} \right]^{\frac{1}{2}} d\tau \right\} . \tag{61}$$

Поскольку длина кривой (пути) v по определению равна

$$s(v) \underset{def}{=} \int_0^1 \left[g_{\alpha\beta}(v_\tau) \frac{dv_\tau^\alpha}{d\tau} \frac{dv_\tau^\beta}{d\tau} \right]^{\frac{1}{2}} d\tau , \tag{62}$$

то из формулы (61) при всяком $t \in [0,1]$ следует неравенство

$$\left|a(t)\right|_c \leqslant \left|a(0)\right|_c \exp\left(\bar{c} d^{-1} n^2 s(v) \right) . \tag{63}$$

Для всякого решения $a(t) = (a^1(t),...a^n(t))$ системы (57) при всяком $t \in [0,1]$ имеем

$$a^\gamma(t) - a^\gamma(0) = \int_0^t B_\beta^\gamma(\tau) a^\beta(\tau) d\tau \tag{64}$$

$$(\gamma \in \{1,...,n\}) ,$$

$$\left|a(1) - a(0)\right|_c \leqslant \sum_{\gamma=1}^{n} \left|a^\gamma(1) - a^\gamma(0)\right| \underset{64)}{\leqslant} \sum_{\gamma=1}^{n} \int_0^1 \left|B_\beta^\gamma(\tau)\right| \cdot \left|a^\beta(\tau)\right| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\gamma=1}^{n} \int_0^1 \left[\sum_{\beta=1}^{n} \left|B_\beta^\gamma(\tau)\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{\beta=1}^{n} \left|a^\beta(\tau)\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\tau = \tag{65}$$

$$= \int_0^1 \left\{ \sum_{\gamma=1}^{n} \left[\sum_{\beta=1}^{n} \left|B_\beta^\gamma(\tau)\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \left|a(\tau)\right|_c d\tau \underset{(63)}{\leqslant} \left|a(\tau)\right|_c \exp(\bar{c} d^{-1} n^2 s(v)) \times$$

$$\times \int_0^1 \sum_{\gamma=1}^{n} \left[\sum_{\beta=1}^{n} \left[B_\beta^\gamma(\tau) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\tau \underset{(62)}{\overset{(60)}{\leqslant}} \left|a(0)\right|_c \left\{ \exp(\bar{c} d^{-1} n^2 s(v)) \right\} \bar{c} d^{-1} n^{\frac{5}{2}} s(v) .$$

В силу равенства $a(1) = \hat{\varphi}_v a(0)$ (см. п. и)) из формулы (65) следует неравенство

$$\left|\hat{\varphi}_v a - a\right|_c \leqslant \left|a\right|_c \left\{ \exp(\bar{c} d^{-1} n^2 s(v)) \right\} \bar{c} d^{-1} n^{\frac{5}{2}} s(v) \tag{66}$$

для всякого $a \in R^n$.

Подведем итог этого пункта. В нем доказано следующее утверждение.

Пусть К — компактное множество, содержащееся в открытом множестве, на котором все функции $g_{\alpha\beta}(\cdot)$ $\alpha \in \{1,...,n\}$, $\beta \in \{1,...,n\}$ *принадлежат классу* C^1*. *Тогда найдутся числа* $\bar{c} \in R^+, d \in R_*^+$ *такие, что для всяких* $y_1 \in K, y_2 \in K$ *для всякой кривой (пути)* $v \in G(y_1, y_2)$*, лежащей в К, имеет место неравенство*

---

* В начале этого пункта доказано, что этому условию удовлетворяет множество $K = \overline{\widehat{W}}$.

$$\left\|\widehat{\varphi}_u - 1_{R^n}\right\|_c \underset{(66)}{\overset{(42)}{\leqslant}} s(v)\overline{c}d^{-1}n^{\frac{5}{2}}\exp(\overline{c}d^{-1}n^2 s(v)). \qquad (67)$$

Множество $\overline{\widehat{W}}_1$ компактно и содержится в множестве $h_y W(y)$, так как $\widehat{W}_1 \underset{(21)}{=} h_y W_1, \overline{W}_1 \underset{(12)}{\subset} \overline{V}$ причем множество $\overline{V}$ компактно и содержится в множестве $W(y)$ (см. фразу, содержащую формулу (9)), а координатное отображение $h_y : W(y) \to h_y W(y)$ — гомеоморфизм. При всяком $z \in h_y W(y)$ квадратичная форма $g^{(1)}_{\alpha\beta}(z) b^\alpha b^\beta$ положительно определенная, а ее коэффициенты непрерывны на $h_y W(y)$.

Хорошо известно (и легко доказывается), что отсюда следует существование чисел $d_1 \geqslant \overline{d}_1 > 0$ таких, что при всяких $z \in \overline{\widehat{W}}_1 = \overline{h_y W_1}, b = (b^1, ..., b^n) \in R^n$ имеет место неравенство

$$\overline{d}_1^2 \left(|b|_c\right)^2 \leqslant g^{(1)}_{\alpha\beta}(z) b^\alpha b^\beta \leqslant d_1^2 \left(|b|_c\right)^2. \qquad (68)$$

м) Для пояснения некоторых встречающихся далее формул напомним следующие формулы:

$$v_t \underset{def}{=} (dv_t)(\tau_t^{[1]})^{-1} \ 1, \qquad (69)$$

где $v : [0,1] \to R^n$ (или $v : [0,1] \to V^n$ — кусочно-гладкое отображение, dv_t его производная в точке t, понимаемая как отображение касательного пространства многообразия **R** в точке t в касательное пространство многообразия R^n (или V^n) в точке v_t, где v_t — значение отображения v в точке t для $v : [0,1] \to R^n$ имеем:

$$\tau_{v_t}(dv_t)(\tau_t^{[1]})^{-1} \ 1 = \left(\frac{dv^1}{dt}, ..., \frac{dv^n}{dt}\right) \qquad (70)$$

(формула (70) — хорошо известное равенство; смысл, вкладываемый в его правую часть, разъяснен выше при пояснении формулы (52): $\frac{d}{dt}$ понимается как предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю). Смысл других обозначений, использованных в формулах (69), (70), разъяснен в пояснении к формуле (33).

Отметим, что обозначение u_t (или v_t) часто встречается в [1] и в этой статье; везде в этих статьях смысл, вкладываемый в это обозначение, один и тот же — он расшифровывается формулой (69), которая приведена также в сноске в начале этой статьи.

Пусть теперь $y_1 \in W$, $y_2 \in W$ и пусть кривая (путь) $u \in G(y_1, y_2)$ лежит в W. Тогда (см. предпоследнюю фразу п. д)) кривая (путь), определенная формулой (32), кусочно-гладкая и лежит в $\widehat{W}$.

Имеем

$$s(\hat{u}) = \int_0^1 \left[g_{\alpha\beta}(\hat{u}_t) \frac{d\hat{u}_t^\alpha}{dt} \frac{d\hat{u}_t^\beta}{dt} \right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(70)}{\overset{(69)}{=}}$$

$$\underset{(70)}{\overset{(69)}{=}} \int_0^1 \left[g_{\alpha\beta}(\hat{u}_t)(\tau_{\hat{u}_t} \hat{u}_t)^\alpha (\tau_{\hat{u}_t} \hat{u}_t)^\beta \right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(39)}{=} \int_0^1 \left[\tilde{\delta}(\hat{u}_t, \hat{u}_t) \right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(35)}{=}$$

$$\underset{(35)}{=} \int_0^1 \left[\delta(d((h_{fy})^{-1})_{\hat{u}_t} \ \hat{u}_t, \ d((h_{fy})^{-1})_{\hat{u}_t} \ \hat{u}_t) \right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(69)}{\overset{(32)}{=}}$$

$$\underset{(69)}{\overset{(32)}{=}} \int_0^1 \left[\delta(u_t, u_t) \right]^{\frac{1}{2}} dt = s(u). \qquad (71)$$

и) При всяком натуральном $k \geqslant l_1$ (число l_1 определено фразой, содержащей формулу (14)) рассмотрим отображение $\hat{f}_k : \widehat{W}_1 \to \widehat{W}$ определенное формулой (23). Так как

$\widehat{W}_1 \subset R^n, \widehat{W} \subset R^n$, то при всяком натуральном $k \geqslant l_1$ отображение $\widehat{f}_k : \widehat{W}_1 \to \widehat{W}$ задается набором n вещественных функций, каждая от n вещественных переменных:

$$\widehat{f}_k^1(\cdot,...,\cdot),...,\widehat{f}_k^n(\cdot,...,\cdot). \qquad (72)$$

Так как при всяком натуральном $k \geqslant l_1$ отображение $\widehat{f}_k : \widehat{W}_1 \to \widehat{W}$ принадлежит классу C^1 (см. предпоследнюю фразу п. г)), то при всяком натуральном $k \geq l_1$ при всяком $i \in \{1,...,n\}$ функция $\widehat{f}_k^i(\cdot,...,\cdot)$ непрерывно дифференцируема на $\widehat{W}_1$.

Отображение $\widehat{f} : \widehat{W}_1 \to \widehat{W}$, определенное формулой (24), задается набором n вещественных функций, каждая от n вещественных переменных:

$$\widehat{f}^1(\cdot,...,\cdot),...,\widehat{f}^n(\cdot,...,\cdot), \qquad (73)$$

о) Так как $fx \underset{(8)}{=} \lim_{k\to\infty} f_k x$ при всяком $x \in V_n$, а координатное отображение $h_{fy} : W(fy) \to R^n$ непрерывно, то

$$h_{fy} f(h_y)^{-1} z = \lim_{k\to\infty} h_{fy} f_k (h_y)^{-1} z \qquad (74)$$

при всяком $z \in h_y W_1$.

Переписав левую часть равенства (74) в виде $\widehat{f} z$ (согласно формуле (24)), а выражение, стоящее под знаком предела в правой части равенства (74), в виде $\widehat{f}_k z$ согласно формуле (23)), получаем из формулы (74), что при всяком $z \in \widehat{W}_1 \underset{(21)}{=} h_y W_1$ имеет место равенство

$$\widehat{f} z = \lim_{k\to\infty} \widehat{f}_k z. \qquad (75)$$

п) Выше было доказано (см. фразу, содержащую формулу (6)), что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $l_\varepsilon \in N$ такое, что при всяких $k \in N$, $m \in N$ таких, что $\min\{k,m\} \geqslant l_\varepsilon$, для всякого $x \in W_1 \underset{(12)}{\subset} V_r$ - найдется кривая (путь) $u \in G(f_k x, f_m x)$ такая, что

$$s(u) + \left\|\varphi_u df_{mx} - df_{kx}\right\| < \min\{\varepsilon, n_{r_1}\} \qquad (76)$$

Положим

$$l(\varepsilon) \underset{\text{def}}{=} \max\{l_\varepsilon, \bar{l}\}, \qquad (77)$$

где $\bar{l}$ определено формулой (26).

В силу доказанного в п. д) (см. последнюю фразу пункта д)) при всяких $k \in N, m \in N$ таких, что $\min\{k,m\} \geqslant l(\varepsilon) \underset{(77)}{\geqslant} \bar{l}$, при всяком $x \in W_1$ кривая (путь) $u \in G(f_k x, f_m x)$, удовлетворяющая неравенству (76), лежит в W, и формула (32) определяет кривую (путь) $\hat{u} \in G(h_{fy} f_k x, h_{fy} f_m x)$, лежащую в $\widehat{W}$. Для этой кривой (пути) $\hat{u}$ имеем

$$s(\hat{u}) + \left\|\widehat{\varphi}_{\hat{u}} \hat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x} - \hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y x}\right\|_{1,h_y x}^{h_{fy} f_k x} \underset{(71)}{\overset{(51)}{=}} s(u) + \left\|\varphi_u df_{mx} - df_{kx}\right\| \underset{(76)}{<} \varepsilon, \qquad (78)$$

$$\left\|\widehat{\varphi}_{\hat{u}} - 1_{R^n}\right\|_c \underset{(67)}{\leqslant} s(\hat{u}) \overline{cd}^{-1} n^{\frac{5}{2}} \exp(\overline{cd}^{-1} n^2 s(\hat{u})) \underset{(78)}{\leqslant} \varepsilon \bar{c} d^{-1} n^{\frac{5}{2}} \exp(\bar{c} d^{-1} n^2 \varepsilon). \qquad (79)$$

Для этой же кривой (пути) u из формул (42)—(46) вследствие неравенств (56), (68) получаем неравенства:

$$\left\|\widehat{\varphi}_{\hat{u}} \hat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x} - \hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y x}\right\|_c \leqslant d_1 d^{-1} \left\|\widehat{\varphi}_{\hat{u}} \hat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x} - \hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y x}\right\|_{1,h_y x}^{h_{fy} f_k x}, \qquad (80)$$

$$\left\|\hat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x}\right\|_c \leqslant d_1 d^{-1} \left\|\hat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x}\right\|_{1,h_y x}^{h_{fy} f_k x}. \qquad (81)$$

Имеем, далее (для той же кривой (пути) *u)*: $\hat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x} - \hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y x} =$ $= \hat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x} - \widehat{\varphi}_{\hat{u}} \hat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x} + \widehat{\varphi}_{\hat{u}} \hat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x} - \hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y x} = (1 - \widehat{\varphi}_{\hat{u}}) \hat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x} + \widehat{\varphi}_{\hat{u}} \hat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x} - \hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y x}$, откуда

$$\left\|\hat{d}(\hat{f}_m)_{h_yx} - \hat{\varphi}_{\hat{u}}\hat{d}(\hat{f}_k)_{h_yx}\right\|_c \leqslant \left\|1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\hat{u}}\right\|_c \times \left\|\hat{d}(\hat{f}_m)_{h_yx}\right\|_c + \left\|\hat{\varphi}_{\hat{u}}\hat{d}(\hat{f}_m)_{h_yx} - \hat{d}(\hat{f}_k)_{h_yx}\right\|_c \underset{(81)}{\overset{(80)}{\leqslant}}$$
$$\underset{(81)}{\overset{(80)}{\leqslant}} d_1 d^{-1}\left\|1_{R^n} - \hat{\varphi}_{\hat{u}}\right\|_c \times \left\|\hat{d}(\hat{f}_m)_{h_yx}\right\|_{1,h_yx}^{h_{fy}f_mx} + d_1 d^{-1}\left\|\hat{\varphi}_{\hat{u}}\hat{d}(\hat{f}_m)_{h_yx} - \hat{d}(\hat{f}_k)_{h_yx}\right\|_{1,h_yx}^{h_{fy}f_mx} \underset{(79)}{\overset{(78)}{\leqslant}} \varepsilon d_1 d^{-2}\bar{c}n^{\frac{5}{2}} \times$$
$$\times\left[\exp(\bar{c}d^{-1}n^2\varepsilon)\right]\cdot\left\|\hat{d}(\hat{f}_m)_{h_yx}\right\|_{1,h_yx}^{h_{fy}f_mx} + d_1 d^{-1}\varepsilon\,. \tag{82}$$

Имеет место формула
$$\left\|\hat{d}(\hat{f}_m)_{h_yx}\right\|_{1,h_yx}^{h_{fy}f_mx} = \left\|df_{mx}\right\|, \tag{83}$$
которая доказывается так же, как была доказана выше формула (51) (можно даже вывести формулу (83) из (51), положив
$$\varphi_u \underset{def}{=} 0,\ \ \hat{\varphi}_u \underset{def}{=} 0,\ \ \hat{\varphi}_{\hat{u}} \underset{def}{=} 0\,, \tag{84}$$
для чего, конечно, надо забыть о происхождении символов φ_u, $\hat{\varphi}_u$, $\hat{\varphi}_{\hat{u}}$ и помнить о них только то, что использовалось при выводе формулы (51), т.е. равенства (40) и (48), которые будут выполнены, если символы φ_u, $\hat{\varphi}_u$, $\hat{\varphi}_{\hat{u}}$ определить формулой (84); после этого нужно еще заменить k на m; излишне говорить о том, что такой вывод формулы (83) весьма искусствен, но формула (83) таким образом полностью доказана).

Напомним, что, согласно (2) [1],
$$\left\|\left|df_m\right|\right\| \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n}\left\|df_{mx}\right\| \quad (m\in N)\,. \tag{85}$$

Из формул (82), (83), (85) следует неравенство
$$\left\|\hat{d}(\hat{f}_m)_{h_yx} - \hat{d}(\hat{f}_k)_{h_yx}\right\|_c \leqslant d_1 d^{-1}\varepsilon + \varepsilon d_1 d^{-2}\bar{c}n^{\frac{5}{2}}\left[\exp(\bar{c}d^{-1}n^2\varepsilon)\right]\cdot\left\|\left|df_m\right|\right\|. \tag{86}$$

р) *Из соотношения (1) в силу (5) [1] (цитируемая формула статьи [1] определяет расстояние $d_S(\cdot,\cdot)$) вытекает, что*
$$\sup_{m\in N}\left\|\left|df_m\right|\right\| < +\infty \tag{87}$$

Докажем это. Из соотношения (1) следует соотношение $\sigma \underset{def}{=} \sup_{m\in N} d_S(f_m, f_1) < +\infty$ (поскольку во всяком метрическом пространстве всякая фундаментальная последовательность ограничена; это хорошо известно и легко доказывается). Из этого соотношения в силу (5) [1] следует, что для всяких $m\in N,\ x\in V^n$ существует кривая (путь) $u\in G(f_mx,\ f_1x)$ такая, что $\left\|\varphi_u df_{1x} - df_{mx}\right\| < \sigma+1$, откуда следует, что для всяких $m\in N,\ x\in V^n$ существует $u\in G(f_mx,\ f_1x)$ такое, что*:
$$\left\|df_{mx}\right\| < \left\|\varphi_u df_{1x}\right\| + \sigma + 1 \leqslant \left\|\varphi_u\right\|\times\left\|df_{1x}\right\| + \sigma + 1 \underset{(1.8)}{\leqslant} \left\|df_{1x}\right\| + \sigma + 1 \underset{(85)}{\leqslant} \left\|\left|df\right|\right\| + \sigma + 1\,.$$

Следовательно, $\sup_{m\in N}\left\|\left|df_m\right|\right\| \underset{(85)}{=} \sup_{m\in N}\sup_{x\in V^n}\left\|df_{mx}\right\| \leqslant \left\|\left|df_1\right|\right\| + \sigma + 1 < +\infty$ (последнее неравенство следует (см. [1], п. 2) из того, что по условию $f_1\in S$).

с) Из неравенства (87) следует, что при всяком $\varepsilon>0$ имеет место неравенство
$$\bar{\varepsilon}(\varepsilon) \underset{def}{=} d_1 d^{-1}\varepsilon + \varepsilon d_1 d^{-2}\bar{c}n^{\frac{5}{2}}\left[\exp(\bar{c}d^{-1}n^2\varepsilon)\right]\sup_{m\in N}\left\|\left|df_m\right|\right\| < +\infty\,, \tag{88}$$
и поэтому для $\bar{\varepsilon}(\varepsilon)$, определенного формулой (88), имеет место соотношение $\bar{\varepsilon}(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$.

Пусть дано $\delta>0$. Возьмем $\varepsilon_\delta>0$ такое, что
$$\vec{\varepsilon}(\varepsilon_\delta) < \delta \tag{89}$$

---

* Напомним, что в этой статье ссылка на формулу (1.*N*) есть сокращенная форма записи ссылки на формулу (*N*) статьи [1]; напомним также, что то, что здесь обозначается через *u*, в [1] обозначалось через u_t.

В п. п) доказано, что при всяких $k \in N,\ m \in N$ таких, что $\min\{k,m\} \geqslant l(\varepsilon_\delta)$, для всякого $x \in W_1 \underset{(21)}{=} (h_y)^{-1}\widehat{W}_1$ имеет место неравенство $\left\| \hat{d}(\widehat{f}_m)_{h_y x} - \hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y x} \right\|_c \overset{(86)}{\underset{(88)}{\leqslant}} \bar{\varepsilon}(\varepsilon_\delta) \underset{(89)}{<} \delta$.

Отсюда следует, что при всяких $\alpha \in \{1,...,n\},\ \beta \in \{1,...,n\}$ последовательность** $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial z^\beta} \widehat{f}^{\,\alpha}_{l_1+k}(z^1,...,z^n) \right\}_{k \in N}$ сходится к некоторому $\widehat{g}^{\,\alpha}_\beta(z^1,...,z^n)$ равномерно относительно $(z^1,...,z^n) \in \widehat{W}_1$. Равенство (75) (при всяком $z \in \widehat{W}_1$) означает, что при всяких $\alpha \in \{1,...,n\}$, z=$\left(z^1,...,z^n\right) \in \widehat{W}_1$ последовательность $\left\{ \widehat{f}^{\,\alpha}_{l_1+k}(z^1,...,z^n) \right\}_{k \in N}$ сходится к $\widehat{f}^{\,\alpha}(z^1,...,z^n)$. Так как ф у н к ц и и $\widehat{f}^{\,\alpha}_k(\cdot,...,\cdot) : \widehat{W}_1 \to R(\alpha \in \{1,...,n\},\ k \geqslant l_1\ (k \in N))$ непрерывно дифференцируемы, то в силу классической теоремы анализа из двух предыдущих фраз следует, что при всяком $\alpha \in \{1,...,n\}$ ф у н к ц и я $\widehat{f}^{\,\alpha}(\cdot,...,\cdot)$ принадлежит классу C^1 на $\widehat{W}_1$ и при всяких $\alpha \in \{1,...,n\},\ \beta \in \{1,...,n\}$, z=$\left(z^1,...,z^n\right) \in \widehat{W}_1$ имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial z^\beta} \widehat{f}^{\,\alpha}(z^1,...,z^n) = \widehat{g}^{\,\alpha}_\beta(z^1,...,z^n).$$

Таким образом, доказано, что *отображение* $\widehat{f} : \widehat{W}_1 \to \widehat{W}$ (см. фразу, содержащую формулу (73)) *принадлежит классу* C^1 и что $\hat{d}\widehat{f}_{kz} \underset{k \to \infty}{\to} \hat{d}\widehat{f}_z$ *равномерно относительно* $z \in \widehat{W}_1$.

Так как

$$\widehat{W}_1 \underset{(21)}{=} h_y W_1 \underset{(12)}{\subset} h_y V \underset{(9)}{\subset} h_y W(y),$$
$$\widehat{W} \underset{(22)}{=} h_{fy} W \underset{(10)}{\subset} h_{fy} W(fy),$$

а координатные отображения $h_y : W(y) \to h_y,\ h_{fy} : W(fy) \to h_{fy}W(fy)$ — диффеоморфизмы (класса C^2, а в этом месте достаточно, чтобы они были класса C^1), то из того, что отображение $\widehat{f} : \widehat{W}_1 \to \widehat{W}$ принадлежит классу C^1, следует, что отображение $f\Big|_{W_1} \underset{(24)}{=} (h_{fy})^{-1}\widehat{f}h_y\Big|_{W_1}$ (сужение на W_1 отображения f принадлежит классу C^1, а из того, что $\hat{d}\widehat{f}_{kz} \underset{k \to \infty}{\to} \hat{d}\widehat{f}_z$ при всяком $z \in \widehat{W}_1$ следует в силу формул (23), (24), (41), что $\hat{d}\widehat{f}_{kx} \underset{k \to \infty}{\to} \hat{d}\widehat{f}_x$ при всяком $z \in W_1$.

Подведем итог пп. г) — с). В этих пунктах доказано, что *у всякой точки* $y \in V^n$ *существует окрестность* W_1 *(*W_1 зависит, конечно, от *y,* хотя это и не отражено в обозначении) *такая, что сужение* $f\big|_{W_1}$ *на множество* W_1 *отображения* $f : V^n \to V^n$, *определенного формулой (8), принадлежит классу* C^1, *и такая, что* $\hat{d}\widehat{f}_{kx} \underset{k \to \infty}{\to} \hat{d}\widehat{f}_x$ *при всяком* $x \in W_1$. Тем самым доказано, что *отображение* $f : V^n \to V^n$, *определенное формулой (8), принадлежит классу C^1 и* что

$$df_x = \lim_{k \to \infty} df_{kx} \qquad (90)$$

при всяком $x \in V^n$ доказано также (в п. г)), что *для всякой т о ч к и* $y \in V^n$ *найдется ее окрестность* W_1, *содержащаяся в некоторой координатной окрестности* $W(y)$ *этой точки* ($h_y : W(y) \to R^n$ — соответствующее координатное отображение), *и найдется*

** Непрерывно дифференцируемые функции $\widehat{f}^{\,\alpha}_k(\cdot,...,\cdot)$ определены в п. н) (см. фразу, содержащую формулу (72)).

координатная окрестность $W(fy)$ *точки* $fy(h_{fy}:W(fy)\to R^n$ — соответствующее координатное отображение) *такие, что* $f_kW_1\subset W(fy)$ *при всяком натуральном k, большем некоторого* $l_1\in N$.

т) При всяком $x\in V^n$ имеем $\|df_x\| \underset{(90)}{=} \lim\limits_{k\to\infty}\|df_x\| \underset{(85)}{\leqslant} \sup\limits_{k\in N}\|\|df_k\|\|$. Следовательно,

$$\|\|df\|\| \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n}\|df_x\| \leqslant \sup_{k\in N}\|\|df_k\|\| \underset{(87)}{<} +\infty\,. \tag{91}$$

В начале п. р) отмечено, что из соотношения (1) следует, что

$$\sigma \underset{def}{=} \sup_{m\in N} d_S(f_m, f_1) < +\infty\,. \tag{92}$$

Из формулы (92) в силу формулы (5) [1] следует, что для всяких $m\in N,\ x\in V^n$ существует кривая (путь) $u\in G(f_mx, f_1x)$ такая, что $\|(\varphi_u df_{1x})^{-1}-(df_{mx})^{-1}\|<\sigma+1$, откуда следует, что для всяких $m\in N,\ x\in V^n$ имеем $\|(df_{mx})^{-1}\|<\|(\varphi_u df_{1x})^{-1}\|+\sigma+1=\|(df_{1x})^{-1}(\varphi_u)^{-1}\|+$ $+\sigma+1\leqslant\|(df_{1x})^{-1}\|\times\|(\varphi_u)^{-1}\|+\sigma+1 \underset{(1.8)}{=} \|(df_{1x})^{-1}\|+\sigma+1 \underset{(1.3)}{\leqslant} \|\|(df_1)^{-1}\|\|+\sigma+1$; поэтому

$$\sup_{\substack{m\in N\\ x\in V^n}}\|(df_{mx})^{-1}\| \leqslant \|\|(df_1)^{-1}\|\|+\sigma+1 \overset{(92)}{\underset{(1.1)}{<}} +\infty \tag{93}$$

(ссылка на формулу (1) [1] расшифровывается так: $f_1\in S$ (см. первую фразу доказательства), следовательно, в силу формулы (1) [1] выполнено неравенство $\|\|(df_1)^{-1}\|\|<+\infty$.

Из того, что при всяком $x\in V^n$ имеет место соотношение (90), следует в силу неравенства (93), что при всяком $x\in V^n$ линейное отображение df_x имеет обратное $(df_x)^{-1}$, которое равно

$$(df_x)^{-1}=\lim_{k\to\infty}(df_{kx})^{-1}\,. \tag{94}$$

(Утверждение, составляющее содержание предыдущей фразы, хорошо известно и легко доказывается.)

При всяком $x\in V^n$ имеем $\|(df_x)^{-1}\| \underset{(94)}{=} \lim\limits_{k\to\infty}\|(df_{kx})^{-1}\| \leqslant \sup\limits_{k\in N}\|(df_{kx})^{-1}\| \underset{(93)}{\leqslant} \|\|(df_1)^{-1}\|\|+\sigma+1$, откуда

$$\|\|(df)^{-1}\|\| \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n}\|(df_x)^{-1}\| \leqslant \|\|(df_1)^{-1}\|\|+\sigma+1 \underset{(93)}{<} +\infty\,. \tag{95}$$

Из формул (91), (95) следует неравенство

$$\max\left\{\|\|df\|\|, \|\|(df)^{-1}\|\|\right\}<+\infty\,. \tag{96}$$

Подведем итог п. т). В этом пункте доказано, что *отображение* $f:V^n\to V^n$, *определенное формулой (8), удовлетворяет неравенству (96),* совпадающему с неравенством (1) [1].

у) Утверждение. *Отображение* $f:V^n\to V^n$, *определенное формулой (8), является биекцией* V^n *на* fV^n.

Доказательство. Предположим противное, т. е. предположим, что существуют две точки $x_1\in V^n,\ x_2\in V^n$ такие, что $x_1\neq x_2$,

$$fx_1=fx_2\,. \tag{97}$$

Всякое $g\in S$ есть диффеоморфизм V^n на V^n (определение множества S приведено в [1], п. 2)); следовательно, для всякого $g\in S$ имеет место равенство

$$g^{-1}V^n=V^n \tag{98}$$

и для всяких $g\in S,\ x\in V^n$ имеет место равенство

$$d(g^{-1})_x=(dg_{g^{-1}x})^{-1}\,. \tag{99}$$

Для всякого $g\in S$ имеем

$$\left\| d(g^{-1}) \right\| \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n} \left\| d(g^{-1})_x \right\| \underset{(99)}{=} \sup_{x\in V^n} \left\| d(g_{g^{-1}x})^{-1} \right\| = \sup_{z\in g^{-1}V^n} \left\| (dg_z)^1 \right\| \underset{(98)}{=}$$

$$\underset{(98)}{=} \sup_{z\in V^n} \left\| (dg_z)^{-1} \right\| \underset{(1.3)}{=} \left\| (dg)^{-1} \right\| . \qquad (100)$$

Имеем

$$\mathcal{D} \underset{def}{=} \sup_{k\in N} \left\| d(f_k^{-1}) \right\| \underset{(100)}{=} \sup_{k\in N} \left\| (df_k)^{-1} \right\| \overset{(1.3)}{\underset{(93)}{<}} +\infty . \qquad (101)$$

Возьмем $m \in N$ такое, что выполнены неравенства

$$\rho(f_m x_1, fx_1) < (8\mathcal{D})^{-1} \rho(x_1, x_2), \qquad (102)$$

$$\rho(f_m x_2, fx_2) < (8\mathcal{D})^{-1} \rho(x_1, x_2) \qquad (103)$$

(такое $m \in N$ существует, так как $x_1 \neq x_2$ и соотношение (8) имеет место при всяком $x \in V^n$). Далее,

$$f_m x_1 \neq f_m x_2, \qquad (104)$$

так как $x_1 \neq x_2$ и отображение f_k взаимно-однозначно отображает V^n на V^n (при всяком $k \in N$), так как $f_k \in S$ при всяком $k \in N$.

Возьмем кривую (путь) $u \in G(f_m x_1, f_m x_2)$ такую, что

$$s(u) < 2\rho(f_m x_1, f_m x_2); \qquad (105)$$

такая кривая (путь) существует, так как

$$0 \underset{(104)}{<} \rho(f_m x_1, f_m x_2) \underset{def}{=} \inf_{u\in G(f_m x_1, f_m x_2)} s(u).$$

Положим

$$\omega_t \underset{def}{=} f_m^{-1} u_t (t \in [0,1]). \qquad (106)$$

Отображение $f_m^{-1}: V^n \to V^n$ принадлежит классу C^1, так как $f_m \in S$; следовательно, из того, что u – кусочно-гладкая кривая (путь), вытекает, что формула (106) определяет кусочно-гладкую кривую (путь) ω; так как $u_0 = f_m x_2$, то $\omega_0 = f_m^{-1} u_0 = f_m^{-1} f_m x_2 = x_2$; так как $u_1 = f_m x_1$, то $\omega_1 = f_m^{-1} u_1 = f_m^{-1} f_m x_1 = x_1$.

Таким образом, доказано, что из того, что $u \in G(f_m x_1, f_m x_2)$, следует, что $\omega \in G(x_1, x_2)$.

Имеем

$$\rho(x_1, x_2) \underset{def}{=} \inf_{v\in G(x_1,x_2)} s(v) \leqslant s(\omega) \underset{def}{=} \int_0^1 \left[\delta(\omega_t, \omega_t)\right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(106)}{=}$$

$$\underset{(106)}{=} \int_0^1 \left[\delta(d(f_m^{-1})_{u_t} u_t,\ d(f_m^{-1})_{u_t} u_t\right]^{\frac{1}{2}} dt \leqslant \int_0^1 \left\| d(f_m^{-1})_{u_t} \right\| \cdot \left[\delta(u_t,\ u_t\right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(1.2)}{\leqslant}$$

$$\underset{(1.2)}{\leqslant} \left\| d(f_m^{-1}) \right\| \int_0^1 \left[\delta(u_t,\ u_t\right]^{\frac{1}{2}} dt = \left\| d(f_m^{-1}) \right\| s(u) \underset{(101)}{\leqslant} \mathcal{D} s(u) \underset{(105)}{\leqslant}$$

$$\underset{(105)}{\leqslant} 2\mathcal{D}\rho(f_m x_1, f_m x_2) \underset{(97)}{\leqslant} 2\mathcal{D}\left[\rho(f_m x_1, fx_1) + \rho(f_m x_2, fx_2)\right] \overset{(102)}{\underset{(103)}{<}} \frac{1}{2}\rho(x_1, x_2).$$

Получено противоречие. Утверждение, сформулированное в начале пункта, доказано.

ф) В этом пункте будет доказано, что *отображение* $f: V^n \to V^n$, *определенное формулой* (*8*), *отображает* V^n *на все* V^n, *т.е. что*

$$fV^n = V^n. \qquad (107)$$

В предыдущих пунктах доказано, что это отображение $f: V^n \to V^n$ принадлежит классу C^1 (см. последнюю фразу п. с)), удовлетворяет неравенству (96) (см. последнюю фразу п. т)) и является биекцией V^n на fV^n (см. п. у)). Поэтому равенство (107) вытекает из следующего утверждения.

У т в е р ж д е н и е. *Пусть отображение* $g: V^n \to V^n$ *принадлежит классу* C^1, *является биекцией* V^n *на* gV^n, *его производная* dg_x *в каждой точке* $x \in V^n$ *не вырождена и удовлетворяет неравенству*

$$\max\left\{\left\|\left|dg\right|\right\|, \left\|\left|(dg)^{-1}\right|\right\|\right\} < +\infty . \tag{108}$$

Тогда $gV^n = V^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как отображение $g: V^n \to V^n$ принадлежит классу C^1, является биекцией V^n на gV^n и во всякой точке $x \in V^n$ его производная dg_x не вырождена, то по теореме об обратном отображении (частный случай теоремы о неявной функции) множество gV^n открыто в V^n и обратное отображение $g^{-1}: gV^n \to V^n$ принадлежит классу C^1.

Предположим, что $gV^n \neq V^n$. Тогда существует точка $z_1 \in V^n \setminus gV^n$. Возьмем произвольную точку $x_1 \in V^n$. Возьмем произвольное $u \in G(z_1, gx_1)$. Рассмотрим множество

$$M \underset{\text{def}}{=} E\left\{t \in [0,1] : u_t \in gV^n\right\}. \tag{109}$$

Так как отображение $u: [0,1] \to V^n$ непрерывно, а множество gV^n открыто в V^n, то множество M открыто в [0, 1]. Так как $u_0 = gx_1 \in gV^n$, то $0 \in M$. Так как $u_1 = z_1 \in V^n \setminus gV^n$, то $1 \in M$, откуда следует, что $[0,1] \setminus M \neq \varnothing$.

Положим

$$t^* \underset{\text{def}}{=} \inf([0,1] \setminus M). \tag{110}$$

Так как $0 \in M$, а множество M открыто в [0, 1], то M есть окрестность нуля в [0, 1]; следовательно,

$$t^* > 0. \tag{111}$$

Далее,

$$[0, t^*) \underset{(111)}{\overset{(110)}{\subset}} M \tag{112}$$

и

$$t^* \in [0,1] \setminus M. \tag{113}$$

Доказательство. Так как M открыто в $[0,1]$, то $[0,1] \setminus M$ замкнуто в $[0,1]$, следовательно, $t^* \underset{(110)}{\in} [0,1] \setminus M$, что и требовалось доказать.

Возьмем произвольные

$$\theta_1 \in (0, t^*), \ \theta_2 \in (0, t^*) \tag{114}$$

и рассмотрим кусочно-гладкую кривую (путь) $v(\theta_1, \theta_2)$, определенную формулой

$$v(\theta_1, \theta_2) = u_{t\theta_2 + (1-t)\theta_1} (t \in [0,1]); \tag{115}$$

эта кривая (путь) лежит в gV^n в силу формул (109), (112), (114), (115). Так как отображение $g^{-1}: gV^n \to V^n$ принадлежит классу C^1, то кривая (путь) $\omega(\theta_1, \theta_2)$, определенная формулой

$$\omega_t(\theta_1, \theta_2) \underset{\text{def}}{=} g^{-1} v_t(\theta_1, \theta_2) \quad (t \in [0,1]), \tag{116}$$

кусочно-гладкая. Имеем

$$s(\omega(\theta_1, \theta_2)) \underset{\text{def}}{=} \int_0^1 \left[\delta\left(\dot{\omega}_t(\theta_1, \theta_2), \dot{\omega}_t(\theta_1, \theta_2)\right)\right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(116)}{=}$$

$$\underset{(116)}{=} \int_0^1 \left[\delta\left(d(g^{-1})_{v_t(\theta_1,\theta_2)} \dot{v}_t(\theta_1, \theta_2), d(g^{-1})_{v_t(\theta_1,\theta_2)} \dot{v}_t(\theta_1, \theta_2)\right)\right]^{\frac{1}{2}} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left\|d(g^{-1})_{v_t(\theta_1,\theta_2)}\right\| \cdot \left[\delta\left(v_t(\theta_1, \theta_2), \dot{v}_t(\theta_1, \theta_2)\right)\right]^{\frac{1}{2}} dt \leqslant$$

$$\leqslant \left\|d(g^{-1})\right\| \cdot \int_0^1 \left[\delta\left(\dot v_t(\theta_1,\theta_2),\dot v_t(\theta_1,\theta_2)\right)\right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(100)}{=} \left\|(dg)^{-1}\right\| s\left(v(\theta_1,\theta_2)\right). \qquad (117)$$

Возьмем какую-нибудь возрастающую последовательность $\{t_m\}_{m\in N}$ точек интервала $\left(0,t^*\right)$, стремящуюся к t^*. Тогда

$$s\left(v(t_k,t_m)\right) \xrightarrow[\min\langle k,m\rangle\to\infty]{(115)} 0. \qquad (118)$$

Из соотношения (118) в силу формулы (117) следует соотношение

$$s(\omega(t_k,t_m)) \xrightarrow[\min\langle k,m\rangle\to\infty]{} 0. \qquad (119)$$

При всяких $k\in N$, $m\in N$ имеем:

$$\omega_0(t_k,t_m) \underset{(116)}{=} g^{-1}v_0(t_k,t_m) \underset{(115)}{=} g^{-1}u_{t_k},$$

$$\omega_1(t_k,t_m) \underset{(116)}{=} g^{-1}v_1(t_k,t_m) \underset{(115)}{=} g^{-1}u_{t_m},$$

следовательно, $\omega(t_k,t_m)\in G(g^{-1}u_{t_m},g^{-1}u_{t_k})$ *и*

$$\rho(g^{-1}u_{t_m},g^{-1}u_{t_k}) \underset{def}{=} \inf_{\omega\in G(g^{-1}u_{t_m},g^{-1}u_{t_k})} s(\omega) \leqslant s(\omega(t_k,t_m)). \qquad (120)$$

Из формул (119), (120) следует, что последовательность $\left\{g^{-1}u_{t_k}\right\}_{k\in N}$ фундаментальна в метрическом пространстве (V^n,ρ). Так как метрическое пространство (V^n,ρ) по условию (см. [1], п. 1) полно, то существует предел

$$\overline{x} \underset{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} g^{-1}u_{t_k} \in V^n. \qquad (121)$$

Поскольку отображение $g:V^n\to V^n$ непрерывно, то

$$g\overline{x} \underset{(121)}{=} \lim_{k\to\infty} gg^{-1}u_{t_k} = \lim_{k\to\infty} u_{t_k} = u_{t^*}; \qquad (122)$$

последнее равенство цепочки (122) следует из непрерывности отображения $u:[0,1]\to V^n$, так как $t_k \underset{k\to\infty}{\to} t^* \underset{(113)}{\in} [0,1]$.

Имеем $u_{t^*} \overset{(109)}{\underset{(113)}{\notin}} gV^n$, что противоречит формуле (122).

Утверждение доказано. Тем самым в этом пункте закончено доказательство того, что *отображение* $f:V^n\to V^n$, *определенное формулой (8), принадлежит множеству* S, определенному в п. 2 [1].

x) Фиксируем произвольное $y\in V^n$. Для всякого $k\in N$ возьмем кривую (путь) $v[y,k]\in G\left(f_k y, fy\right)$ такую, что

$$s(v[y,k]) < \rho(f_k y, fy) + \frac{1}{k} \qquad (123)$$

(такая кривая (путь) существует, так как $\rho(f_k y, fy) \underset{\text{def}}{=} \inf_{u\in G(f_k y, fy)} s(u)$).

Поскольку $\rho(f_k y, fy) \overset{(8)}{\underset{k\to\infty}{\to}} 0$, то из неравенства (123) следует, что

$$s\left(v[y,k]\right) \underset{k\to\infty}{\to} 0. \qquad (124)$$

Воспользуемся объектами, определенными в п. г): $W(y)$, h_y, $W(fy)$, h_{fy}, W, W_1, $\widehat{f}_k$, $\widehat{f}$. Из соотношения (124) следует, что существует натуральное $l[y]\geqslant l_1$ такое, что для всякого натурального $k\geqslant l[y]$ кривая (путь) $v[y,k]\in G(f_k y, fy)$ лежит в W (напомним, что W есть окрестность точки fy). Поэтому при всяком натуральном $k\geqslant l[y]$ формула

$$\hat{v}_t[y,k] \underset{def}{=} h_{fy} v_t[y,k] \quad \left(t\in[0,1]\right) \qquad (125)$$

определяет кусочно-гладкую кривую (путь) $\hat{v}[y,k]$, лежащую в $\widehat{W}$ (см. формулу (32) и следующий за ней абзац). При этом для всякого натурального $k \geqslant l[y]$ имеет место равенство $s(\hat{v}[y,k] \underset{(71)}{=} s(v[y,k])$, следовательно, из соотношения (124) вытекает соотношение

$$s\left(\hat{v}[y,k]\right) \underset{k\to\infty}{\to} 0. \tag{126}$$

Используемые в следующих фразах обозначения $\widehat{\varphi}_{\hat{v}}$ и $\|\cdot\|_c$ разъяснены соответственно в начале п. з) и в Формуле (42).

Из соотношения (126) в силу формулы (67) следуют соотношения:

$$\left\|\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]} - 1_{R^n}\right\|_c \underset{k\to\infty}{\to} 0, \tag{127}$$

$$\left\|(\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]})^{-1} - 1_{R^n}\right\|_c \underset{k\to\infty}{\to} 0 \tag{128}$$

(напомним, что $\left(\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]}\right)^{-1} = \widehat{\varphi}_{-\hat{v}[y,k]}$, где $-\hat{v}_t[y,k] \underset{def}{=} \hat{v}_{1-t}[y,k] \quad (t \in [0,1])$).

В пункте с) доказано, $\hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y} \underset{k\to\infty}{\to} \hat{d}(\widehat{f})_{h_y y}$, т. е.

$$\left\|\hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y} - \hat{d}(\widehat{f})_{h_y y}\right\|_c \underset{k\to\infty}{\to} 0. \tag{129}$$

Из формулы (94) в силу (23), (24), (41) следует формула

$$\left\|(\hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y})^{-1} - (\hat{d}(\widehat{f})_{h_y y})^{-1}\right\|_c \overset{(129)}{\underset{k\to\infty}{\to}} 0. \tag{130}$$

При всяком натуральном $k \geqslant l[y]$ имеет место равенство $\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]}\hat{d}(\widehat{f})_{h_y y} - \hat{d}(\widehat{f})_{h_y y} = = (\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]} - 1_{R^n})\hat{d}(\widehat{f})_{h_y y} + \hat{d}(\widehat{f})_{h_y y} - \hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y}$, откуда

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]}\hat{d}(\widehat{f})_{h_y y} - \hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y}\right\|_c &\leqslant \left\|\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]} - 1_{R^n}\right\|_c \times \\ &\times \left\|\hat{d}(\widehat{f})_{h_y y}\right\|_c + \left\|\hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y} - \hat{d}(\widehat{f})_{h_y y}\right\|_c.\end{aligned} \tag{131}$$

Из (127), (129), (131) следует формула

$$\left\|\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]}\hat{d}(\widehat{f})_{h_y y} - \hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y}\right\|_c \underset{k\to\infty}{\to} 0. \tag{132}$$

При всяком натуральном $k \geqslant l[y]$ имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned}(\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]}\hat{d}(\widehat{f})_{h_y y})^{-1} - (\hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y})^{-1} &= (\hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y})^{-1}(\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]})^{-1} - (\hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y})^{-1} = \\ (\hat{d}(\widehat{f})_{h_y y})^{-1}[\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]})^{-1} - 1_{R^n}] &+ (\hat{d}(\widehat{f})_{h_y y})^{-1} - (\hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y})^{-1}.\end{aligned} \tag{133}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\left\|(\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]}\hat{d}(\widehat{f})_{h_y y})^{-1} - (\hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y})^{-1}\right\|_c &\underset{(133)}{\leqslant} \left\|\hat{d}(\widehat{f})_{h_y y})^{-1}\right\|_c \times \\ \times \left\|(\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]} - 1_{R^n}\right\|_c + \left\|(\hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y})^{-1} - (\hat{d}(\widehat{f})_{h_y y})^{-1}\right\|_c &\overset{(128),(130)}{\underset{k\to\infty}{\to}} 0.\end{aligned} \tag{134}$$

Для всяких $z_1 \in \widehat{W}_1$, $z \in \widehat{W}$ *для всякого линейного отображения* $L: R^n \to R^n$ *имеет место неравенство*

$$\|L\|_{1,z_1}^{z} \leqslant \overline{d}(\overline{d}_1)^{-1}\|L\|_c, \tag{135}$$

вытекающее из формул (42) — (46) в силу неравенств (56), (68).

Из формулы (132) в силу неравенства (135) следует формула

$$\left\|\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]}\hat{d}(\widehat{f})_{h_y y} - \hat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y}\right\|_{1,h_y y}^{\widehat{f}_k h_y y} \underset{k\to\infty}{\to} 0, \tag{136}$$

так как при всяком натуральном $k \geqslant l[y] \geqslant l_1$ *имеем* $\widehat{f}_k h_y y \underset{(23)}{=} h_{fy} f_k y \underset{(17)}{\in} h_{fy} W \underset{(23)}{=} \widehat{W}$.

Для всяких $z_1 \in \widehat{W}_1$, $z \in \widehat{W}$ *для всякого линейного отображения* $L: R^n \to R^n$ *имеет место неравенство*

$$\left\|L\right\|_{z}^{1,z_1} \leqslant d_1 d^{-1} \left\|L\right\|_{c}, \tag{137}$$

вытекающее из (42), (43), (45) — (47) в силу неравенств (56), (68). Из формулы (134) в силу неравенства (137) следует формула

$$\left\|(\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]}\widehat{d}(\widehat{f})_{h_y y})^{-1} - (\widehat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y})^{-1}\right\|_{\widehat{f}_k h_y y}^{1,h_y y} \underset{k\to\infty}{\to} 0 \tag{138}$$

(пояснение то же, что и после формулы (136)).

При всяком натуральном $k \geqslant l[y] \geqslant l_1$ имеет место равенство

$$\left\|\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]}\widehat{d}(\widehat{f})_{h_y y} - \widehat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y}\right\|_{1,h_y y}^{\widehat{f}_k h_y y} = \left\|\varphi_{v[y,k]} df_y - df_{ky}\right\|, \tag{139}$$

доказательство которого получается из приведенного выше доказательства равенства (51), если заменить в равенстве (51) и в его выводе (т. е. в формулах (48) — (50)) f_m на f, u на $v[y,k]$, а после вывода равенства (51) положить в нем $x = y$.

При всяком $k \geqslant l[y] \geqslant l_1$ имеет место равенство

$$\left\|(\widehat{\varphi}_{\hat{v}[y,k]}\widehat{d}(\widehat{f})_{h_y y})^{-1} - (\widehat{d}(\widehat{f}_k)_{h_y y})^{-1}\right\|_{\widehat{f}_k h_y y}^{1,h_y y} = \left\|(\varphi_{v[y,k]} df_y)^{-1} - (df_{ky})^{-1}\right\|, \tag{140}$$

доказательство которого аналогично приведенному выше доказательству равенства (51).

Из формул (136), (139) следует формула

$$\left\|\varphi_{v[y,k]} df_y - df_{ky}\right\| \underset{k\to\infty}{\to} 0. \tag{141}$$

Из формул (138), (140) следует формула

$$\left\|(\varphi_{v[y,k]} df_y)^{-1} - (df_{ky})^{-1}\right\| \underset{k\to\infty}{\to} 0. \tag{142}$$

Из формул (124), (141), (142) следует, что для всяких $y \in V^n$, $\varepsilon > 0$, $l \in N$ существуют натуральное число $m(\varepsilon, y) \geqslant l$ и кривая (путь) $v\{\varepsilon, y\} \in G(f_{m(\varepsilon,y)}y, fy)$ такие, что

$$s(v\{\varepsilon, y\}) + \left\|\varphi_{v\langle\varepsilon,y\rangle} df_y - d(f_{m(\varepsilon,y)})\right\| + \left\|(\varphi_{v\langle\varepsilon,y\rangle} df_y)^{-1} - \right.$$

$$\left. - (d(f_{m(\varepsilon,y)})_y)^{-1}\right\| < \frac{1}{4}\varepsilon. \tag{143}$$

ц) Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу соотношения (1) существует $l\{\varepsilon\} \in N$ такое, что для всяких $k \in N$, $m \in N$ таких, что $\min\{k, m\} \geqslant l\{\varepsilon\}$, имеет место неравенство

$$d_S(f_k, f_m) < \frac{1}{4}\varepsilon. \tag{144}$$

Для всякого $y \in V^n$ возьмем натуральное $m(\varepsilon, y) \geqslant l\{\varepsilon\}$ и кривую (путь) $v\{\varepsilon, y\} \in G(f_{m(\varepsilon,y)}y, fy)$ такие, что имеет место неравенство (143) (существование объектов с указанными здесь свойствами доказано в п. х)).

Так как $m(\varepsilon, y) \geq l\{\varepsilon\}$ для всякого $y \in V^n$, то для всякого $y \in V^n$ для всякого натурального $k \geq l\{\varepsilon\}$ в силу фразы, содержащей формулу (144), имеет место неравенство

$$d_S(f_k, f_{m(\varepsilon,y)}) < \frac{1}{4}\varepsilon. \tag{145}$$

Отсюда в силу определения расстояния $d_S(\cdot\,,\cdot)$ (см. формулу (5) [1]) вытекает следующее. Для всякого натурального $k \geq l\{\varepsilon\}$ для всякого $y \in V^n$ существует кривая (путь) $u\{y,k\} \in G(f_k y, f_{m(\varepsilon,y)}y)$ такая, что

$$\min\left\{s(u[y,k]), [1+\rho(y,x_0)]^{-1}\right\} + \left\|\varphi_{u[y,k]} d(f_{m(\varepsilon,y)})_y - df_{ky}\right\| +$$

$$+ \left\|(\varphi_{u[y,k]} d(f_{m(\varepsilon,y)})_y)^{-1} - (df_{ky})^{-1}\right\| < \frac{1}{4}\varepsilon. \tag{146}$$

Для всякого натурального $k \geqslant l\{\varepsilon\}$ для всякого $y \in V^n$ определим кривую(путь) $\omega[y,k]$ формулой

$$\omega_t\left[y,k\right] \underset{def}{=} \begin{cases} v_{2t}\left\{\varepsilon,y\right\} & \text{при } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right), \\ u_{2t-1}\left[y,k\right] & \text{при } t\in\left[\frac{1}{2},1\right]. \end{cases} \tag{147}$$

При всяком натуральном $k \geqslant l\{\varepsilon\}$ *при всяком* $y\in V^n$ *имеем* $\omega\left[y,k\right] \underset{(147)}{\in} G(f_k y, fy)$ *потому что* $v\{\varepsilon,y\}\in G(f_{m(\varepsilon,y)}y,fy), u\left[y,k\right]\in G(f_k y, f_{m(\varepsilon,y)}y)$.

При всяком натуральном $k \geqslant l\{\varepsilon\}$ при всяком $y\in V^n$ имеет место равенство

$$s(\omega\left[y,k\right]) \underset{(147)}{=} s(v\{\varepsilon,y\}) + s(u\left[y,k\right]), \tag{148}$$

вытекающее из определения длины кривой (пути).

При всяком натуральном $k \geqslant l\{\varepsilon\}$ при всяком $y\in V^n$ имеем

$$\min\{s(\omega\left[y,k\right]),[1+\rho(y,x_0)]^{-1}\} \underset{(148)}{\leqslant} s(v\{\varepsilon,y\}) + \\ +\min\{s(u\left[y,k\right]),[1+\rho(y,x_0)]^{-1}\}, \tag{149}$$

$$\varphi_{\omega[y,k]} \underset{(147)}{=} \varphi_{u[y,k]}\varphi_{v\langle\varepsilon,y\rangle}, \tag{150}$$

$$\begin{aligned} &\left\|\varphi_{\omega[y,k]}df_y - df_{ky}\right\| \leqslant \left\|\varphi_{\omega[y,k]}df_y - \varphi_{u[y,k]}d(f_{m(\varepsilon,y)})_y\right\| + \\ &+\left\|\varphi_{u[y,k]}d(f_{m(\varepsilon,y)})_y - df_{ky}\right\| \underset{(150)}{=} \left\|\varphi_{u[y,k]}\left[\varphi_{v\langle\varepsilon,y\rangle}df_y - d(f_{m(\varepsilon,y)})_y\right]\right\| + \\ &+\left\|\varphi_{u[y,k]}d(f_{m(\varepsilon,y)})_y - df_{ky}\right\| = \left\|\varphi_{v\langle\varepsilon,y\rangle}df_y - d(f_{m(\varepsilon,y)})_y\right\| + \\ &+\left\|\varphi_{u[y,k]}d(f_{m(\varepsilon,y)})_y - df_{ky}\right\| \end{aligned} \tag{151}$$

(последнее равенство вытекает из того, что $\varphi_{u[y,k]}$ есть изоморфизм евклидовых пространств),

$$\begin{aligned} &\left\|(\varphi_{\omega[y,k]}df_y)^{-1} - (df_{ky})^{-1}\right\| \leqslant \left\|(\varphi_{\omega[y,k]}df_y)^{-1} - (\varphi_{u[y,k]}d(f_{m(\varepsilon,y)})_y)^{-1}\right\| + \\ &+\left\|(\varphi_{u[y,k]}d(f_{m(\varepsilon,y)})_y)^{-1} - (df_{ky})^{-1}\right\| \underset{(150)}{=} \left\|\left[(\varphi_{v\langle\varepsilon,y\rangle}df_y)^{-1} - (d(f_{m(\varepsilon,y)})_y)^{-1}\right](\varphi_{u[y,k]})^{-1}\right\| + \\ &+\left\|(\varphi_{u[y,k]}d(f_{m(\varepsilon,y)})_y)^{-1} - (df_{ky})^{-1}\right\| = \left\|(\varphi_{v\langle\varepsilon,y\rangle}df_y)^{-1} - (d(f_{m(\varepsilon,y)})_y)^{-1}\right\| + \\ &+\left\|(\varphi_{u[y,k]}d(f_{m(\varepsilon,y)})_y)^{-1} - (df_{ky})^{-1}\right\| \end{aligned} \tag{152}$$

(последнее равенство вытекает из того, что $\varphi_{u[y,k]}$ — изоморфизм евклидовых пространств).

При всяком натуральном $k \geq l\{\varepsilon\}$ при всяком $y\in V^n$ из формул (149), (151), (152) следует неравенство

$$\begin{aligned} &\min\left\{s(\omega\left[y,k\right],\left[1+\rho(y,x_0)\right]^{-1}\right\} + \left\|\varphi_{\omega[y,k]}df_y - df_{ky}\right\| + \\ &+\left\|(\varphi_{\omega[y,k]}df_y)^{-1} - (df_{ky})^{-1}\right\| \leqslant s(v\{\varepsilon,y\}) + \left\|\varphi_{v\langle\varepsilon,y\rangle}df_y - d(f_{m(\varepsilon,y)})_y\right\| + \\ &+\left\|(\varphi_{v\langle\varepsilon,y\rangle}df_y)^{-1} - (d(f_{m(\varepsilon,y)})_y)^{-1}\right\| + \min\left\{s(u\left[y,k\right],\left[1+\rho(y,x_0)\right]^{-1}\right\} + \\ &+\left\|\varphi_{u[y,k]}d(f_{m(\varepsilon,y)})_y - df_{ky}\right\| + \left\|(\varphi_{u[y,k]}d(f_{m(\varepsilon,y)})_y)^{-1} - (df_{ky})^{-1}\right\| \overset{(143)}{\underset{(146)}{<}} \frac{1}{2}\varepsilon \end{aligned} \tag{153}$$

Таким образом, доказано, что для всякого $\varepsilon>0$ существует $l\{\varepsilon\}\in N$ такое, что для всякого натурального $k \geq l\{\varepsilon\}$ для всякого $y\in V^n$ существует кривая (путь) $\omega\in G(f_k y, fy)$ такая, что $\min\left\{s(\omega),\left[1+\rho(y,x_0)\right]^{-1}\right\} + \left\|\varphi_\omega df_y - df_{ky}\right\| + \left\|(\varphi_\omega df_y - df_{ky})^{-1}\right\| \underset{(153)}{<} \frac{1}{2}\varepsilon$.

Следовательно, для всякого $\varepsilon>0$ существует $l\{\varepsilon\}\in N$ такое, что для всякого натурального $k \geqslant l\{\varepsilon\}$ для всякого $y\in V^n$ имеет место неравенство

$$\inf_{u\in G(f_k y, fy)}\left\{\min\left\{s(u),\left[1+\rho(y,x_0)\right]^{-1}\right\}+\left\|\varphi_u df_y - df_{ky}\right\|+\right.$$
$$\left.+\left\|(\varphi_u df_y)^{-1}-(df_{ky})^{-1}\right\|\right\}<\frac{1}{2}\varepsilon\,. \qquad (154)$$

Поэтому для всякого $\varepsilon>0$ существует $l\{\varepsilon\}\in N$ такое, что для всякого натурального $k\geq l\{\varepsilon\}$ расстояние $d_S(f_k,f)$, равное по определению (см. формулу (5) [1]) $\sup\limits_{y\in V^n}$ от левой части неравенства (154), не превосходит $\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon$. Это означает, что $d_S(f_k,f)\underset{k\to\infty}{\to}0$. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. При всяком $j\in S$ *метрическое пространство* (S_j,d_1)*, определенное в п. 5* [1], *полное.*

Доказательство. Пусть дано $j\in S$. Пусть $\{f_k\}_{k\in N}$ — фундаментальная последовательность в метрическом пространстве (S_j,d_1). Так как* $S_j\underset{(1.57)}{\subset}S$ и для всяких $g\in S_j, h\in S_j$ имеет место неравенство $d_S(g,h)\underset{(1.58)}{\leqslant}d_1(g,h)$, то последовательность $\{f_k\}_{k\in N}$ фундаментальна и в метрическом пространстве (S,d_S).

Повторим для этой последовательности пп. а) — х) доказательства предложения 1 без всяких изменений, а в п. ц) внесем следующие изменения:

1) всюду в п. ц) заменим d_S на d_1 (в частности, последняя фраза доказательства предложения 1 превратится в фразу «Это означает, что $d_1(f_k,f)\underset{k\to\infty}{\to}0$»);

2) всюду в п. ц) заменим $\min\left\{s(\cdot),\left[1+\rho(y,x_0)\right]^{-1}\right\}$ на $s(\cdot)$ (в частности, формула (149) превратится в формулу (148));

3) ссылку на соотношение (1) в п. ц) заменим ссылкой на соотношение $d_1(f_k,f_m)\underset{\min\langle k,m\rangle\to\infty}{\to}0$;

4) всюду в п. ц) ссылку на формулу (5) [1] заменим ссылкой на формулу (55) [1];

5) последнюю фразу п. ц) «Предложение 1 доказано» заменим фразой «Предложение 2 доказано».

Литература

1. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова VI. – Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 5, с. 804–821.

Московский государственный университет
Им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
23 февраля 1982 г.

* Напомним, что (1 .N) означает формулу (N) [1].