4. В. М. Миллионщиков «Об одном типичном свойстве условной экспоненциальной устойчивости».

Пусть $\sum$ — множество диффеоморфизмов $f$ евклидова пространства $E^n$ на себя, имеющих равномерно непрерывную производную такую, что

$$\sup_{x\in E^n}\max\left\{\left\|df_x\right\|,\left\|\left(df_x\right)^{-1}\right\|\right\}<+\infty.$$

Для $j\in\sum$ через $\sum_j$ обозначим множество тех, $f\in\sum$, для которых

$$\sup_{x\in E^n}\left|fx-jx\right|<+\infty;$$

в множестве $\sum_j$ задается расстояние

$$P(f,g)=\sup_{x\in E^n}\left(\left|fx-gx\right|+\left\|d(f-g)_x\right\|\right).$$

Теорема. *При всяком* $j\in\sum$ *в пространстве* $\sum_j\times E^n$ *имеется всюду плотное множество* $D$ *типа* $G_\delta$ *такое, что для всякого* $(f,x)\in D$ *множество*

$$\left\{y\in E^n:\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left|f^m y-f^m x\right|<0\right\}$$

*(полагаем* $\ln 0=-\infty$*) содержит погруженное в* $E^n$ *гладкое многообразие* $V^-$; *касательная плоскость к* $V^-$ *в точке* $x$ *есть*

$$\left\{y\in E^n:\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left|d(f^m)_x(y-x)\right|<0\right\}.$$

В. М. Миллионщиков «Некоторые нерешенные задачи теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений».

На конференции иностранных выпускников механико-математического факультета МГУ, проходившей в июне 1982 г., была сформулирована нерешенная задача (УМН, 1982, 37:6, с. 282).

Устойчиво ли нулевое решение уравнения

$$\ddot{x} + (\sin t + \cos\sqrt{2}t)x = 0\,?$$

По поводу этого же уравнения можно сформулировать следующие задачи.

1) Приводима ли система

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -(\sin t + \cos\sqrt{2}t)x, \end{cases} \tag{1}$$

соответствующая этому уравнению?

2) Найти показатели Ляпунова системы (1).

3) Найти особый (генеральный) показатель системы (1). Напомним, что особый генеральный) показатель $\Omega_0$ определяется формулой

$$\Omega^0 = \overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}} \frac{1}{t-\tau} \ln \|U(t,\tau)\|,$$

где $U(t,\tau)$ — оператор Коши (эволюционный оператор) системы (1).