УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. I

ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть (E, p, B) — векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$ и базой B (B — полное метрическое пространство, расстояние в котором обозначается через $d_B(\cdot, \cdot)$). На (E, p, B) фиксируем некоторую риманову метрику.

2. Пусть $\mathbf{G}$ есть группа $\mathbf{R}$ или группа $\mathbf{Z}$ и пусть $\wp \in$ Hom ($\mathbf{G}$, Aut (E, p, B)), где через Hom ($\mathbf{G}$, Aut (E, p, B)) обозначается множество гомоморфизмов группы $\mathbf{G}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения (E, p, B), обозначаемую через Aut (E, p, B). Напомним, что для всякого $t\in\mathbf{G}$ образ $\wp t$ точки t при гомоморфизме $\wp$ есть пара (X^t, χ^t), где X^t — гомеоморфизм E на E, χ^t — гомеоморфизм B на B, причем а) $pX^t=\chi^t p$; б) при всяком $b\in B$ сужение $X^t[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X^t есть линейное отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$; в) при всяких $t\in\mathbf{G}$, $s\in\mathbf{G}$ имеют место равенства $X^{t+s}=X^tX^s$, $\chi^{t+s}=\chi^t\chi^s$ (вместо X^1 пишем X, вместо χ^1 — χ).

Наложим на гомоморфизм $\wp$ условие*), состоящее в следующем:

существует функция**) $a(\cdot) : B\to\mathbf{R}^+$, удовлетворяющая при всяких $b\in B$, $t\in\mathbf{G}$ равенству

$$a(\chi^t b)=a(b), \tag{1}$$

и такая, что при всяких b(±B, /GG имеет место неравенство

$$\left\|X^t[b]\right\| \le \exp(|t|a(b)) \tag{2}$$

(норма линейного отображения слоя на слой определяется стандартным образом через нормы в слоях, индуцированные фиксированной выше римановой метрикой векторного расслоения (E, p, B)).

Так как $(X^t[b])^{-1}=X^{-t}[\chi^t b]$ $(b\in B,\ t\in\mathbf{G})$, то наложенное условие перейдет в эквивалентное, если вместо «при всяких $b\in B$, $t\in\mathbf{G}$ имеет место неравенство (2)» написать «при всяких***) $b\in B$, $t\in\mathbf{G}_*^+$ имеет место неравенство

$$\max\left\{\left\|X^t[b]\right\|, \left\|\left(X^t[b]\right)^{-1}\right\|\right\} \le \exp(ta(b))\text{»} \tag{2'}$$

3. Для всякого****) $\theta\in\mathbf{G}^*$ определим гомоморфизм $\wp\in$ Hom ($\mathbf{Z}$, Aut (E, p, B)) формулой

$$\wp_\theta s = \wp(s\theta) = \left(X^{s\theta}, \chi^{s\theta}\right) \qquad (s\in\mathbf{Z}) \tag{3}$$

Так как по условию при всяких $b\in B$, $t\in\mathbf{G}$ выполнено неравенство $\left\|X^t[b]\right\| \le \exp(|t|\cdot a(b))$, то при всяких $b\in B$, $s\in\mathbf{Z}$ выполнено неравенство $\left\|X^{s\theta}[b]\right\| \le \exp(|s|\cdot|\theta|a(b))$, т. е. гомоморфизм $\wp_\theta$ удовлетворяет условию п. 2 (см. фразу, содержащую формулы (1), (2)) с функцией $a_\theta(\cdot) : B\to\mathbf{R}^+$ (вместо $a(\cdot) : B\to\mathbf{R}^+$), определенной формулой

---

*) Это условие всюду в статье предполагается выполненным и не напоминается в формулировках предложений и лемм.

**) Через $\mathbf{R}^+$ обозначается множество всех неотрицательных вещественных чисел, через $\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел: $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$, через $\mathbf{Z}^+$ — множество всех неотрицательных целых чисел: $Z^+ = \{0, 1, \ldots\}$.

***) $\mathbf{G}_*^+ = \begin{cases} \mathbf{R}_*^+, & \text{\textit{если} } \mathbf{G}=\mathbf{R}, \\ \mathbf{N}, & \text{\textit{если} } \mathbf{G}=\mathbf{Z} \end{cases}$ ($\mathbf{R}_*^+$ — множество всех положительных (т. е. строго больших нуля) вещественных чисел).

****) $\mathbf{G}_* = \mathbf{G}\setminus\{0\}$.

$$a_\theta(b) \underset{\text{def}}{=} |\theta| a(b) \qquad (b \in B).$$

4. Показатель Ляпунова $\lambda_k(\wp, b)$ гомоморфизма $\wp \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ определяется при всяких $b \in B$, $k \in \{1, ..., \mathrm{p}\}$ формулой

$$\lambda_k(\wp, b) \underset{\text{def}}{=} \min_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k+1}} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |X^t \xi| \tag{4}$$

здесь $Gi(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие i-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$, через $\mathbf{R}_*^i$ обозначается множество всех ненулевых векторов векторного пространства $\mathbf{R}^i$, в выражении $t \to +\infty$ имеется в виду, что $t \in \mathbf{G}$ (напомним, что $\mathbf{G} = \mathbf{R}$ либо $\mathbf{G} = \mathbf{Z}$), $|\cdot|$ — норма, индуцированная фиксированной выше римановой метрикой векторного расслоения.

Доказательство корректности приведенного определения (доказательство утверждения о том, что в формуле (3) можно писать max, а не sup и min, а не inf, т. е. что соответствующие sup и inf достигаются) приведено в [1]. Там же доказано, что $|\lambda_k(\wp, b)| \le a(b)$ при всяких $b \in B$, $k \in \{1, ..., n\}$.

§ 1[*)]. Центральный показатель $\Omega_k(\wp, b)$ гомоморфизма $\wp \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ определяется при всяких $b \in B$, $k \in \{1, ..., n\}$ формулой

$$\Omega_k(\wp, b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \inf_{\tau \in \mathbf{G}_*^+} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \right\| \tag{5}$$

Смысл некоторых используемых в формуле (5) обозначений разъяснен выше после формулы (4); дополнительно поясним следующее: через X_C^τ обозначается сужение на множество C отображения X^τ; вместо $X^\tau_{p^{-1}(b)}$ пишем также (это отмечено выше) $X^\tau\,[b]$; так как $X^t[b]$: $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$ — линейное отображение, то $X^t\mathbf{R}^{n-k+1}$ — векторное подпространство слоя $p^{-1}(\chi^t b)$; норма линейного отображения $X^\tau_{\mathbf{R}^i}$ определяется, стандартным образом:

$$\left\| X^\tau_{\mathbf{R}^i} \right\| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\xi \in \mathbf{R}_*^i} \left(|X^\tau \xi| \cdot |\xi|^{-1} \right).$$

Вместо $\Omega_1(\wp, b)$ пишем также $\Omega(\wp, b)$.

Предложение 1. *Для всякого $b \in B$ имеет место цепочка неравенств* $a(b) \ge \Omega_1(\wp, b) \ge ... \ge \Omega_n(\wp, b) \ge -a(b)$.

Доказательство 1. Пусть даны произвольные $b \in B$, $k \in \{1, ..., n\}$.

А. При всяких $\mathbf{R}^{n-k+1} \in \mathbf{G}_{n-k+1}(p^{-1}(b))$, $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $j \in \mathbf{Z}^+$ имеем $\left\| X^\tau_{X^{j\tau}R^{n-k+1}} \right\| \le \left\| X^\tau \left[\chi^{j\tau} b \right] \right\| \underset{(2)}{\le} \exp\left(\tau a\left(\chi^{j\tau} b \right) \right) \underset{(1)}{=} \exp(\tau a(b))$.

Следовательно, при всяких $\mathbf{R}^{n-k+1} \in \mathbf{G}_{n-k+1}(p^{-1}(b))$, $\tau \in \mathbf{G}_*^+$, $m \in \mathbf{N}$ имеет место неравенство $\frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^\tau_{X^{j\tau}R^{n-k+1}} \right\| \le a(b)$. Поэтому при всяких $\mathbf{R}^{n-k+1} \in \mathbf{G}_{n-k+1}(p^{-1}(b))$, $\tau \in \mathbf{G}_*^+$ выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^\tau_{X^{j\tau}R_{n-k+1}(\wp, b)} \right\| \le a(b).$$

Отсюда в силу формулы (5) следует неравенство

---

*) Определения, леммы и предложения § 1—3 являются модификациями определений и результатов Р. Э. Винограда (см. [2], § 7, 8, 13, 15).

$$\Omega_k(\wp,b)\le a(b). \tag{6}$$

Б. При всяких $\mathbf{R}^{n-k+1}\in\mathbf{G}_{n-k+1}(p^{-1}(b))$, $\tau\in\mathbf{G}_*^+$, $j\in\mathbf{Z}^+$ имеем

$$\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|\ge\left\|\left(X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right)^{-1}\right\|^{-1}\ge\left\|\left(X^{\tau}\left[\chi^{j\tau}b\right]\right)^{-1}\right\|^{-1}\underset{(2')}{\ge}\exp\left(-\tau a\left(\chi^{j\tau}b\right)\right)\underset{(1)}{=}\exp\left(-\tau a(b)\right)$$

(первое неравенство в этой цепочке — следствие неравенства $\|L_1\|\cdot\|L_2\|\ge\|L_1L_2\|$ верного для всяких линейных операторов $L_1 : B_1\to B_2$, $L_2 : B_2\to B_1$, где B_1 и B_2 — нормированные пространства). Следовательно, при всяких $\mathbf{R}^{n-k+1}\in\mathbf{G}_{n-k+1}(p^{-1}(b))$, $\tau\in\mathbf{G}_*^+$, $m\in\mathbf{N}$ имеет место неравенство $\dfrac{1}{m\tau}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}}\right\|\ge -a(b)$. Поэтому при всяких $\mathbf{R}^{n-k+1}\in\mathbf{G}_{n-k+1}(p^{-1}(b))$, $\tau\in\mathbf{G}_*^+$ выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|\ge -a(b).$$

Отсюда в силу формулы (5) следует неравенство

$$\Omega_k(\wp,b)\ge -a(b). \tag{7}$$

Объединив доказанные для всяких $b\in B$, $k\in\{1, ..., n\}$ неравенства (6) и (7), получаем, что для всяких $b\in B$, $k\in\{1, ..., n\}$ имеет место цепочка неравенств

$$a(b)\ge\Omega_k(\wp,b)\ge -a(b). \tag{8}$$

2. Пусть даны произвольные $b\in B$, $k\in\{1, ..., n-1\}$. При всяком $\mathbf{R}^{n-k+1}\in\mathbf{G}_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ при всяком $\mathbf{R}^{n-k}\in\mathbf{G}_{n-k}(p^{-1}(b))$ таком, что $\mathbf{R}^{n-k}\subset\mathbf{R}^{n-k+1}$, при всяких $\tau\in\mathbf{G}_*^+$, $j\in\mathbf{Z}^+$ имеем $\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k}}\right\|\le\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|$.

Следовательно, при всяком $\mathbf{R}^{n-k+1}\in\mathbf{G}_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ при всяком $\mathbf{R}^{n-k}\in\mathbf{G}_{n-k}(p^{-1}(b))$ таком, что $\mathbf{R}^{n-k}\subset\mathbf{R}^{n-k+1}$ при всяких $\tau\in\mathbf{G}_*^+$, $m\in\mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k}}\right\|\le\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|.$$

Поэтому при всяком $\mathbf{R}^{n-k+1}\in\mathbf{G}_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ при всяком $\mathbf{R}^{n-k}\in\mathbf{G}_{n-k}(p^{-1}(b))$ таком, что $\mathbf{R}^{n-k}\subset\mathbf{R}^{n-k+1}$, при всяком $\tau\in\mathbf{G}_*^+$ выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k}}\right\|\le\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|.$$

Следовательно, при всяком $\mathbf{R}^{n-k+1}\in\mathbf{G}_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ при всяком $\mathbf{R}^{n-k}\in\mathbf{G}_{n-k}(p^{-1}(b))$ таком, что $\mathbf{R}^{n-k}\subset\mathbf{R}^{n-k+1}$, имеет место неравенство

$$\inf_{\tau\in G_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k}}\right\|\le\inf_{\tau\in G_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|.$$

Следовательно, при всяком $\mathbf{R}^{n-k+1}\in\mathbf{G}_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ имеет место неравенство

$$\inf_{R^{n-k}\in G_{n-k}\left(p^{-1}(b)\right)}\inf_{\tau\in G_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k}}\right\|\le\inf_{\tau\in G_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|$$

Отсюда следует неравенство

$$\inf_{R^{n-k}\in G_{n-k}\left(p^{-1}(b)\right)}\inf_{\tau\in G_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k}}\right\| \le \inf_{R^{n-k+1}\in G_{n-k+1}\left(p^{-1}(b)\right)}\inf_{\tau\in G_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|. \quad (9)$$

В силу формулы (5) правая часть неравенства (9) равна $\Omega_k(\wp,\ b)$, а левая часть неравенства (9) равна $\Omega_{k+1}(\wp,\ b)$. Поэтому неравенство (9) можно переписать в виде

$$\Omega_{k+1}(\wp,\ b) \le \Omega_k(\wp,\ b) \quad (10)$$

Объединением формулы (8), доказанной при всяких $b\in B,\ k\in\{1,\ ...,\ n\}$, с неравенством (10), доказанным при всяких $b\in B,\ k\in\{1,\ ...,\ n—1\}$, заканчивается доказательство предложения 1. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. *Для всяких* $b\in B,\ k\in\{1,\ ...,\ n\}$ *имеет место неравенство* $\lambda_k(\wp,\ b) \le \Omega_k(\wp,\ b)$.

Доказательство. Пусть даны произвольные $b\in B,\ k\in\{1,\ ...,\ n\}$. В силу леммы 3 [1] при всяком $\tau\in\mathbf{G}_*^+$ имеет место равенство

$$\lambda_k\left(\wp,b\right)=\tau^{-1}\lambda_k\left(\wp,b\right)\underset{(4)}{=}\tau^{-1}\min_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}\left(p^{-1}(b)\right)}\max_{\xi\in\mathbf{R}_*^{n-k+1}}\overline{\lim_{\substack{m\to+\infty\\(m\in N)}}}\frac{1}{m}\ln\left|X^{m\tau}\xi\right| \quad .(11)$$

При всяких $\mathbf{R}^{n-k+1}\in\mathbf{G}_{n-k+1}(p^{-1}(b))$, $\tau\in\mathbf{G}_*^+$ при всяких $\xi\in\mathbf{R}_*^{n-k+1}$, $m\in N$ имеем

$$\left|X^{m\tau}\xi\right|=\left|X^{\tau}_{X^{(m-1)\tau}R^{n-k+1}}\ldots X^{\tau}_{R^{n-k+1}}\xi\right|\le\left\|X^{\tau}_{X^{(m-1)\tau}R^{n-k+1}}\right\|\ldots\left\|X^{\tau}_{R^{n-k+1}}\right\|\left|\xi\right|,$$

откуда $\frac{1}{m}\ln\left|X^{m\tau}\xi\right|\le\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|+\frac{1}{m}\ln\left|\xi\right|$. Отсюда следует, что при всяких $\mathbf{R}^{n-k+1}\in\mathbf{G}_{n-k+1}(p^{-1}(b))$, $\tau\in\mathbf{G}_*^+$ при всяком $\xi\in\mathbf{R}_*^{n-k+1}$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{\substack{m\to+\infty\\(m\in N)}}}\frac{1}{m}\ln\left|X^{m\tau}\xi\right|\le\overline{\lim_{\substack{m\to+\infty\\(m\in N)}}}\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|+\overline{\lim_{\substack{m\to+\infty\\(m\in N)}}}\frac{1}{m}\ln\left|\xi\right|=\overline{\lim_{\substack{m\to+\infty\\(m\in N)}}}\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|.$$

Поэтому при всяких $\mathbf{R}^{n-k+1}\in\mathbf{G}_{n-k+1}(p^{-1}(b))$, $\tau\in\mathbf{G}_*^+$ выполнено неравенство

$$\max_{\xi\in\mathbf{R}_*^{n-k+1}}\overline{\lim_{\substack{m\to+\infty\\(m\in N)}}}\frac{1}{m}\ln\left|X^{mt}\xi\right|\le\overline{\lim_{\substack{m\to+\infty\\(m\in N)}}}\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|. \quad (12)$$

Следовательно, при всяком $\tau\in\mathbf{G}_*^+$ имеем

$$\lambda_k\left(\wp,b\right)\underset{(12)}{\overset{(11)}{\le}}\tau^{-1}\inf_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}\left(p^{-1}(b)\right)}\overline{\lim_{\substack{m\to+\infty\\(m\in N)}}}\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|$$

Отсюда следует неравенство

$$\lambda_k\left(\wp,b\right)\le\inf_{\tau\in\mathbf{G}_*^+}\inf_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}\left(p^{-1}(b)\right)}\overline{\lim_{\substack{m\to+\infty\\(m\in N)}}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|\underset{(5)}{=}\Omega_k\left(\wp,b\right).$$

Предложение 2 доказано.

§ **2**. Продолжим рассмотрение гомоморфизма $\wp\in\mathrm{Hom}\ (\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\ (E,\ p,\ B))$, удовлетворяющего условию п. 2 введения (см. фразу, содержащую формулы (1), (2)).

Напомним некоторые обозначения из § 1 [1]. Положив для всякого $\xi\in E$

$$\lambda(\wp,\xi)\underset{\text{def}}{=}\begin{cases}\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\dfrac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right| \text{ при } |\xi|\neq 0,\\ -\infty \text{ при } |\xi|=0\end{cases} \tag{13}$$

(в выражении $t\to+\infty$ имеется в виду, что $t\in\mathbf{G}$, рассмотрим при всяких $b\in B$, $k\in\{1, ..., n\}$ множество

$$E_{n-k+1}(\wp,b)\underset{\text{def}}{=}\left\{\xi\in p^{-1}(b):\lambda(\wp,\xi)\leq\lambda_k(\wp,b)\right\}; \tag{14}$$

в [1, § 1][*)] доказано, что $E_{n-k+1}(\wp, b)$ — векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$.

Если для некоторого $b\in B$ и некоторого $k\in\{2, ..., n\}$ имеет место неравенство $\lambda_{k-1}(\wp,b)\neq\lambda_k(\wp,b)$, то $\dim E_{n-k+1}(\wp,b)=n-k+1$ (см.[1], предложение 8), и тогда $E_{n-k+1}(\wp,b)$ обозначается через $\mathbf{R}_0^{n-i+1}(\wp\ ,b)$:

$$\mathbf{R}_0^{n-i+1}(\wp\ ,b)\underset{\text{def}}{=}E_{n-k+1}(\wp,b),\text{ если } \lambda_{k-1}(\wp,b)\neq\lambda_k(\wp,b). \tag{15}$$

Для всяких $b\in B$, $k\in\{1, ..., n\}$ определяется число

$$\Omega^{(k)}(\wp,b)\underset{\text{def}}{=}\inf_{\tau\in\mathbf{G}_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)}\right\|. \tag{16}$$

Напомним, что $E_{n-k+1}(\wp,b)$ определено формулой (14) и что через $X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)}$ обозначается сужение отображения X^τ: $E\to E$ на множество $X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)$. Так как $E_{n-k+1}(\wp,b)$ — векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$, то $X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)$ — векторное подпространство слоя $p^{-1}(\chi^{j\tau}b)$, а $X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)}$ — линейное отображение $X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)\to X^{(j+1)\tau}\times E_{n-k+1}(\wp,b)$, норма которого определяется стандартным образом:

$$\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)}\right\|\underset{\text{def}}{=}\sup_{\substack{\xi\in X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)\\ |\xi|=1}}\left|X^\tau\xi\right|$$

Предложение 3. *Для всякого $b\in B$ имеет место равенство* $\Omega^{(1)}(\wp, b) = \Omega_1(\wp, b)$.

Доказательство. Пусть дано произвольное $b\in B$.

1. Так как *dim* $p^{-1}(b)$ = *n,* то грассманово многообразие $G_n(p^{-1}(b))$ состоит из единственной точки $\mathbf{R}^n=p^{-1}(b)$. Так как (X^t, χ^t) при всяком $t\in\mathbf{G}$ — автоморфизм векторного расслоения (E, p, B), то при всяких $t\in\mathbf{G}$, $b\in B$ имеет место равенство $X^t p^{-1}(b)=p^{-1}(\chi^t b)$, из которого при всяком $t\in\mathbf{G}$ следуют равенства

$$X^{\tau}_{X^t p^{-1}(b)}=X^{\tau}_{p^{-1}(\aleph^t b)}=X^{\tau}\left[\chi^t b\right]. \tag{17}$$

Поэтому формула (5) при $k = 1$ переписывается в виде

$$\Omega_1(\wp,b)=\inf_{\tau\in\mathbf{G}_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}\left[\chi^{j\tau}b\right]\right\|, \tag{18}$$

а формула (4) при k=1 переписывается в виде

$$\lambda_1(\wp,b)=\max_{\xi\in p_*^{-1}(b)}\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right|\underset{(13)}{=}\max_{\xi\in p_*^{-1}(b)}\lambda(\wp,\xi). \tag{19}$$

2. Имеем

---

*) В [1] вместо обозначения $\{\xi\in p^{-1}(b):\ldots\}$ применено обозначение $E\{\xi\in p^{-1}(b):\ldots\}$.

$$E_n(\wp,b) \underset{(14)}{=} \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\wp,\xi) \le \lambda_1(\wp,b)\} \underset{(19)}{=} p^{-1}(b), \tag{20}$$

$$\Omega^{(1)}(\wp,b) \underset{(16)}{=} \inf_{\tau\in \mathbf{G}_*^+} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1} \ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_n(\wp,b)}\right\| \underset{(20)}{\overset{(17)}{=}} \inf_{\tau\in \mathbf{G}_*^+} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1} \ln\left\|X^{j\tau}b\right\| \underset{(18)}{=} \Omega_1(\wp,b).$$

Предложение 3 доказано.

Предложение 4. *Для всякого $b\in B$ имеет место цепочка неравенств* $\Omega^{(1)}(\wp,b) \ge \ldots \ge \Omega^{(n)}(\wp,b)$.

Доказательство. Из определения 2 и леммы 1 статьи [1] следует, что для всякого $b\in B$ имеет место цепочка неравенств

$$\lambda_1(\wp,b) \ge \ldots \ge \lambda_n(\wp,b), \tag{21}$$

из которой в силу формулы (14) следует цепочка включений

$$E_n(\wp,b) \supset \ldots \supset E_1(\wp,b). \tag{22}$$

Пусть даны произвольные $b\in B$, $k\in\{1, \ldots, n—1\}$.

При всяких $\tau\in \mathbf{G}_*^+$, $j\in \mathbf{Z}^+$ имеем $\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)}\right\| \underset{(22)}{\ge} \left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k}(\wp,b)}\right\|$.

Следовательно, при всяких $\tau\in \mathbf{G}_*^+$, $m\in\mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1} \ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)}\right\| \ge \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1} \ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k}(\wp,b)}\right\|.$$

Поэтому при всяком $\tau\in \mathbf{G}_*^+$ выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1} \ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)}\right\| \ge \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1} \ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k}(\wp,b)}\right\|.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\inf_{\tau\in G_*^+} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1} \ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)}\right\| \ge \inf_{\tau\in G_*^+} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1} \ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k}(\wp,b)}\right\|. \tag{23}$$

В силу формулы (16) левая часть неравенства (23) равна $\Omega^{(k)}(\wp,b)$, а правая часть неравенства (23) равна $\Omega^{(k+1)}(\wp,b)$. Предложение 4 доказано.

Предложение 5. *Для всяких $b\in B$, $k\in\{1, \ldots, n\}$ имеет место неравенство* $\Omega^{(k)}(\wp,b) \ge \Omega_k(\wp,b)$.

Доказательство. Пусть даны произвольные $b\in B$, $k\in\{1, \ldots, n\}$. Положим $l \underset{\text{def}}{=} \min\{s\in\{1,\ldots,k\} : \lambda_s(\wp,b) = \lambda_k(\wp,b)\}$. Тогда $E_{n-l+1}(\wp,b) \underset{(14)}{=} E_{n-k+1}(\wp,b)$ и, следовательно (в силу формулы (16)),.

$$\Omega^{(l)}(\wp,b) = \Omega^{(k)}(\wp,b). \tag{24}$$

Если окажется, что $l = 1$, то

$$\Omega^{(k)}(\wp,b) \underset{(24)}{=} \Omega^{(l)}(\wp,b) = \Omega^{(1)}(\wp,b) = \Omega_1(\wp,b) \ge \Omega_k(\wp,b) \tag{25}$$

(неравенство в этой цепочке следует из предложения 1, а последнее из равенств — из предложения 3), и тогда предложение доказано.

Пусть оказалось, что $l > 1$. Тогда $\lambda_{l-1}(\wp,b) \ne \lambda_l^{(k)}(\wp,b)$; следовательно, $\dim E_{n-l+1}(\wp,b) = n-l+1$ (см. выше фразу, содержащую формулу (15)), и потому

$$E_{n-l+1}(\wp, b) \in G_{n-l+1}(p^{-1}(b)). \tag{26}$$

Из формул (5), (16), (26) следует неравенство

$$\Omega^{(l)}(\wp,b) \ge \Omega_l(\wp,b). \tag{27}$$

Итак, если оказалось, что $l \neq 1$, то имеем $\Omega^{(k)}(\wp,b) \underset{(24)}{=} \Omega^{(l)}(\wp,b) \underset{(27)}{\geq} \Omega_l(\wp,b) \geq \Omega_k(\wp,b)$ (последнее неравенство следует из предложения 1, так как $l \leq k$).

Объединением последней фразы с фразой, содержащей формулу (25), заканчивается доказательство предложения 5.

§ 3. Продолжим рассмотрение гомоморфизма $\wp \in \mathrm{Hom}$ (**G**, Aut (*E, p, B*)), удовлетворяющего условию п. 2 введения (см. фразу, содержащую формулы (1), (2)).

Лемма 1. *Для всяких* $b \in B$, $q \in \{1, \ldots, n\}$ *для всякого* $\mathbf{R}^q \in G_q(p^{-1}(b))$ *предел* $\lim\limits_{\substack{\tau\to+\infty\\(\tau\in G)}} \varlimsup\limits_{m\to+\infty} \frac{1}{m\tau}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q}\right\|$ *существует и равен* $\inf\limits_{\tau\in\mathbf{G}^+_*} \varlimsup\limits_{m\to+\infty} \frac{1}{m\tau}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^q}\right\|$

Доказательство. Пусть даны произвольные $b \in B$, $q \in \{1, \ldots, n\}$. Пусть дано произвольное $\mathbf{R}^q \in G_q(p^{-1}(b))$. Фиксируем произвольное $\varepsilon \in \mathbf{R}^+_*$.

1. Возьмем $\tau_\varepsilon \in \mathbf{G}^+_*$ такое, что

$$\varlimsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m\tau_\varepsilon}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}\mathbf{R}^q}\right\| < \inf_{\tau\in\mathbf{G}^+_*}\varlimsup_{m\to+\infty} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^q}\right\| + \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{28}$$

2. Возьмем $\theta_\varepsilon \in \mathbf{G}^+_*$ такое, что

$$2\tau_\varepsilon a(b)\theta_\varepsilon^{-1} < \frac{1}{2}\varepsilon, \qquad \theta_\varepsilon > \tau_\varepsilon. \tag{29}$$

3. Фиксируем какое-нибудь $\theta \in \mathbf{G}$, удовлетворяющее неравенству

$$\theta > \theta_\varepsilon \tag{30}$$

а) Для всякого $s \in \mathbf{Z}^+$ обозначим через j_s целую часть числа $\tau_\varepsilon^{-1}s\theta$:

$$j_s \underset{def}{=} \left[\tau_\varepsilon^{-1}s\theta\right]. \tag{31}$$

Для всякого $s \in \mathbf{Z}^+$ имеем[1]

$$X^{\theta}_{X^{s\theta}R^q} = X^{(s+1)\theta - j_{s+1}\tau_\varepsilon}_{X^{j}_{s+1}\tau_\varepsilon R^q} X^{\tau_\varepsilon}_{X^{(j_{s+1}-1)}\tau_\varepsilon R^q} \ldots X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j_s}\tau_\varepsilon R^q} X^{j_s\tau_\varepsilon - s\theta}_{X^{s\theta}R^q}, \tag{32}$$

$$\left\|X^{\theta}_{X^{s\theta}R^q}\right\| \underset{(32)}{\leq} \left\|X^{j_s\tau_\varepsilon - s\theta}_{X^{s\theta}R^q}\right\| \cdot \left\|X^{(s+1)\theta - j_{s+1}\tau_\varepsilon}_{X^{j}_{s+1}\tau_\varepsilon R^q}\right\| \cdot \prod_{j=j_s}^{j_{s+1}-1}\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j_s}\tau_\varepsilon R^q}\right\| \underset{(2)}{\leq} \exp\left(\left|j_s\tau_\varepsilon - s\theta\right| a\left(\chi^{s\theta}b\right)\right)$$

$$\exp\left(\left((s+1)\theta - j_{s+1}\tau_\varepsilon\right)a\left(\chi^{j_{s+1}\tau_\varepsilon}b\right)\right)\prod_{j=j_s}^{j_{s+1}-1}\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j}\tau_\varepsilon R^q}\right\| \underset{(31)}{\leq} \exp\left(\tau_\varepsilon a\left(\chi^{s\theta}b\right)\right)\times\exp\left(\tau_\varepsilon a\left(\chi^{j_{s+1}\tau_\varepsilon}b\right)\right)\prod_{j=j_s}^{j_{s+1}-1}\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j}\tau_\varepsilon R^q}\right\| \underset{(1)}{=}$$

$$\underset{(1)}{=} \exp\left(2\tau_\varepsilon a(b)\right)\prod_{j=j_s}^{j_{s+1}-1}\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j}\tau_\varepsilon R^q}\right\|.$$

б) Для всякого $m \in \mathbf{N}$, пользуясь последней формулой, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{m\theta}\sum_{s=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\theta}_{X^{s\theta}R^q}\right\| &\leq \frac{1}{m\theta}\sum_{s=0}^{m-1}\left(2\tau_\varepsilon a(b) + \sum_{j=j_s}^{j_{s+1}-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}R^q}\right\|\right) = \frac{2\tau_\varepsilon a(b)}{\theta} + \frac{1}{m\theta}\sum_{s=0}^{m-1}\sum_{j=j_s}^{j_{s+1}-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}R^q}\right\| = \\ &= \frac{2\tau_\varepsilon a(b)}{\theta} + \frac{1}{m\theta}\sum_{j=0}^{j_m-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}R^q}\right\| = \frac{2\tau_\varepsilon a(b)}{\theta} + \frac{j_m\tau_\varepsilon}{m\theta}\frac{1}{j_m\tau_\varepsilon}\sum_{j=0}^{j_m-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}R^q}\right\|. \end{aligned} \tag{33}$$

в) Следовательно,

---

[1] В записи произведения операторов $L_1 \ldots L_k$ допускается (довольно обычная) вольность речи: если k—l, то $L_1 \ldots L_k = L_1$.

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\theta}\sum_{s=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\theta}_{X^{s\theta}R^q}\right\| \underset{(33)}{\le} \frac{2\tau_\varepsilon a(b)}{\theta}+\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{j_m\tau_\varepsilon}\sum_{j=0}^{j_m-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}R^q}\right\| \le \frac{2\tau_\varepsilon a(b)}{\theta_\varepsilon}+\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{1}{r\tau_\varepsilon}\sum_{j=0}^{r-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}R^q}\right\| \quad (34)$$

(при написании первого неравенства этой цепочки использовано, что $\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{j_m\tau_\varepsilon}{m\theta}\underset{(31)}{=}1$; при написании второго неравенства этой цепочки использовано, что $j_m\underset{m\to+\infty}{\to}+\infty$ (в силу формулы (31)) и что $\theta>\theta_\varepsilon$ (в силу формулы (30)).

4. Для всякого $\theta\in\mathbf{G}$ такого, что $\theta>\theta_\varepsilon$, имеем: а) с одной стороны,

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\theta}\sum_{s=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\theta}_{X^{s\theta}R^q}\right\| \underset{(34)}{\le} \frac{2\tau_\varepsilon a(b)}{\theta_\varepsilon}+\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{1}{r\tau_\varepsilon}\sum_{j=0}^{r-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}R^q}\right\| \overset{(28)}{\underset{(29)}{<}} \inf_{\tau\in G_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q}\right\|+\varepsilon; \quad (35)$$

б) с другой стороны,

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\theta}\sum_{s=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\theta}_{X^{s\theta}R^q}\right\| \ge \inf_{\tau\in G_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q}\right\|. \quad (36)$$

Итак, доказано (см. формулы (35), (36)), что для всякого $\theta\in\mathbf{G}$ такого, что $\theta>\theta_\varepsilon$, имеет место включение

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\theta}\sum_{s=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\theta}_{X^{s\theta}R^q}\right\| - \inf_{\tau\in G_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q}\right\| \in [0,\varepsilon). \quad (37)$$

5. Подведем итог пп. 1—4. В них доказано, что для всяких $b\in B$, $q\in\{1, ..., n\}$ для всякого $\mathbf{R}^q\in\mathbf{G}_q(p^{-1}(b))$ для всякого $\varepsilon\in\mathbf{R}_*^+$ существует $\theta_\varepsilon\in\mathbf{G}_*^+$ такое, что для всякого $\theta\in\mathbf{G}$, удовлетворяющего неравенству $\theta>\theta_\varepsilon$, имеет место включение (37). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для всяких $b\in B$, $q\in\{1, ..., n\}$ предел*

$$\lim_{\tau\to+\infty}\inf_{R^q\in G_q(p^{-1}(b))}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q}\right\|$$

существует и равен $\Omega_{n-q+1}(\wp, b)$.

Доказательство. Пусть даны произвольные $b\in B$, $q\in\{1, ..., n\}$. Пусть дано произвольное $\varepsilon\in\mathbf{R}_*^+$.

1. Возьмем $\mathbf{R}^q_\varepsilon\in\mathbf{G}_q(p^{-1}(b))$ такое, что

$$\inf_{\tau\in G_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q_\varepsilon}\right\| < \inf_{R^q\in G_q(p^{-1}(b))}\inf_{\tau\in G_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q}\right\|+\frac{\varepsilon}{4}\underset{(5)}{=}\Omega_{n-q+1}(\wp,b)+\frac{\varepsilon}{4}. \quad (38)$$

Затем возьмем $\tau_\varepsilon\in\mathbf{G}_*^+$ такое, что

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau_\varepsilon}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}R^q_\varepsilon}\right\| < \inf_{\tau\in G_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q_\varepsilon}\right\|+\frac{\varepsilon}{4}\underset{(38)}{<}\Omega_{n-q+1}(\wp,b)+\frac{\varepsilon}{2}. \quad (39)$$

2. Дословно повторим п. 2 доказательства леммы 1.

3.Повторим п. 3 доказательства леммы 1, заменив повсюду $\mathbf{R}^q$ на $\mathbf{R}^q_\varepsilon$.

4. Для всякого $\theta\in\mathbf{G}$ такого, что $\theta>\theta_\varepsilon$, имеем: а) с одной стороны[*)],

$$\begin{gathered}\inf_{R^q\in G_q(p^{-1}(b))}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\theta}\sum_{s=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\theta}_{X^{s\theta}R^q}\right\| \le \overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\theta}\sum_{s=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\theta}_{X^{s\theta}R^q_\varepsilon}\right\| \underset{(34_\varepsilon)}{\le} \frac{2\tau_\varepsilon a(b)}{\theta_\varepsilon}+ \\ +\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{1}{r\tau_\varepsilon}\sum_{j=0}^{r-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}R^q_\varepsilon}\right\| \overset{(29)}{\underset{(39)}{<}} \Omega_{n-q+1}(\wp,b)+\varepsilon,\end{gathered} \quad (40)$$

б) с другой стороны,

[*)] (34_ε) означает формулу, полученную из формулы (34) заменой $\mathbf{R}^q$ (всюду, где этот символ встречается) на $\mathbf{R}^q_\varepsilon$.

$$\inf_{R^q\in G_q\left(p^{-1}(b)\right)}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\theta}\sum_{s=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\theta}_{X^{s\theta}R^q}\right\|\geq\inf_{\tau\in G^+_*}\inf_{R^q\in G_q\left(p^{-1}(b)\right)}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\times\sum_{s=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{s\tau}R^q}\right\|=$$

$$=\inf_{R^q\in G_q\left(p^{-1}(b)\right)}\inf_{\tau\in G^+_*}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\times\sum_{s=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{s\tau}R^q}\right\|\underset{(5)}{=}\Omega_{n-q+1}(\wp,b). \tag{41}$$

Итак, доказано (см. формулы (40), (41)), что для всякого $\theta\in\mathbf{G}$ такого, что $\theta>\theta_\varepsilon$, имеет место включение

$$\inf_{R^q\in G_q\left(p^{-1}(b)\right)}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\theta}\sum_{s=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\theta}_{X^{s\theta}R^q}\right\|-\Omega_{n-q+1}(\wp,b)\in[0,\varepsilon). \tag{42}$$

5. Подведем итог пп. 1—4. В них доказано, что для всяких $b\in B$, $q\in\{1, ..., n\}$ для всякого $\varepsilon\in\mathbf{R}^+_*$ существует $\theta_\varepsilon\in\mathbf{G}^+_*$ такое, что для всякого $\theta\in\mathbf{G}$, удовлетворяющего неравенству $\theta>\theta_\varepsilon$, имеет место включение (42). Лемма 2 доказана.

Предложение 6. *Для всяких* $\theta\in\mathbf{G}^+_*$, $b\in B$, $k\in\{1, ..., n\}$ *имеет место равенство* $\Omega^{(k)}(\wp, b)=\theta\Omega^{(k)}(\wp, b)$.

Доказательство. Пусть даны произвольные $\theta\in\mathbf{G}^+_*$, $b\in B$, $k\in\{1, ..., n\}$. Для числа

$$\Omega^{(k)}(\wp,b)\underset{(16)}{=}\inf_{\tau\in\mathbf{G}^+_*}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)}\right\|$$

в силу леммы 1 имеет место равенство

$$\Omega^{(k)}(\wp,b)=\lim_{\substack{\tau\to+\infty\\(\tau\in G)}}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)}\right\|. \tag{43}$$

Для числа

$$\Omega^{(k)}(\wp_\theta,b)\overset{(3)}{\underset{(16)}{=}}\inf_{s\in N}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{ms}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{s\theta}_{X^{js\theta}E_{n-k+1}(\wp_\theta,b)}\right\|$$

в силу той же леммы 1, но только примененной к гомоморфизму $\wp\in\mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ вместо гомоморфизма $\wp\in\mathrm{Hom}\,(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$, выполнено равенство

$$\Omega^{(k)}(\wp_\theta,b)=\lim_{\substack{s\to+\infty\\(s\in Z)}}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{ms}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{s\theta}_{X^{js\theta}E_{n-k+1}(\wp_\theta,b)}\right\|. \tag{44}$$

Имеем

$$\Omega^{(k)}(\wp_\theta,b)\underset{(44)}{=}\theta\lim_{\substack{\tau\to+\infty\\(\tau\in\theta Z)}}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp_\theta,b)}\right\|=\theta\lim_{\substack{\tau\to+\infty\\(\tau\in\theta Z)}}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp\ ,b)}\right\| \tag{45}$$

(последнее равенство цепочки (45) следует из равенства $E_{n-k+1}(\wp_\theta,b)=E_{n-k+1}(\wp,b)$, имеющего место согласно лемме 5 [1]). Выражение, стоящее в правой части равенства (43) справа от знака $\lim\limits_{\substack{\tau\to+\infty\\(\tau\in G)}}$, совпадает с выражением, стоящим в правой части последнего равенства цепочки (45) справа от знаков $\theta\lim\limits_{\substack{\tau\to+\infty\\(\tau\in\theta Z)}}$; так как $\theta\mathbf{Z}\subset\mathbf{G}$ (поскольку $\theta\in\mathbf{G}$), то отсюда следует, что правая часть последнего равенства цепочки (45) равна произведению числа и на правую часть равенства (43). Отсюда в силу формул (43) и (45) следует равенство $\Omega^{(k)}(\wp_\theta, b) = \theta\Omega^{(k)}(\wp, b)$. Предложение 6 доказано.

Предложение 7. *При всяких* $\theta \in \mathbf{G}_*^+$, $b \in B$, $k \in \{1, ..., n\}$ *имеет место равенство* $\Omega_k(\wp_\theta, b) = \theta\Omega_k(\wp, b)$.

Доказательство. Пусть даны произвольные $\theta \in \mathbf{G}_*^+$, $b \in B$, $k \in \{1, ..., n\}$.

В силу леммы 2 имеет место равенство

$$\Omega_k(\wp, b) = \lim_{\substack{\tau \to +\infty \\ (\tau \in G)}} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \right\|. \tag{46}$$

В силу той же леммы 2 (но только примененной к гомоморфизму $\wp_\theta \in$ Hom ($\mathbf{Z}$, Aut (E, p, B)) вместо гомоморфизма $\wp \in$ Hom ($\mathbf{G}$, Aut (E, p, B))) выполнено равенство

$$\Omega_k(\wp_\theta, b) = \lim_{\substack{s \to +\infty \\ (s \in G)}} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{ms} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{s\theta}_{X^{js\theta}\mathbf{R}^{n-k+1}} \right\|. \tag{47}$$

Имеем

$$\Omega_k(\wp_\theta, b) \underset{(47)}{=} \lim_{\substack{\tau \to +\infty \\ (\tau \in \theta Z)}} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \right\|. \tag{48}$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (46) справа от знака $\lim\limits_{\tau \to +\infty}$, совпадает с выражением, стоящим в правой части равенства (48) справа от знаков $\theta \lim\limits_{\substack{\tau \to +\infty \\ (\tau \in \theta Z)}}$; так как $\theta\mathbf{Z} \subset \mathbf{G}$ (поскольку $\theta \in \mathbf{G}$), то отсюда следует, что правая часть равенства (48) равна произведению числа θ на правую часть равенства (46). Отсюда в силу равенств (46), (48) следует равенство $\Omega_k(\wp_\theta, b) = \theta\Omega_k(\wp, b)$. Предложение 7 доказано.

Лемма 3. *Для всяких* $b \in B$, $q \in \{1, ..., n\}$ *для всякого* $\mathbf{R}^q \in \mathbf{G}_q(p^{-1}(b))$ *имеет место равенство*

$$\inf_{\tau \in G_*^+} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q} \right\| = \inf_{\tau \in G_*^+} \sup_{m \in N} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q} \right\| \tag{49}$$

Доказательство. Пусть даны произвольные $b \in B$, $q \in \{1, ..., n\}$ и дано произвольное $\mathbf{R}^q \in \mathbf{G}_q(p^{-1}(b))$.

1. Для всякого $\tau \in \mathbf{G}_*^+$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q} \right\| \le \sup_{m \in N} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q} \right\|,$$

откуда следует неравенство

$$\inf_{\tau \in G_*^+} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q} \right\| \le \inf_{\tau \in G_*^+} \sup_{m \in N} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q} \right\| \tag{50}$$

2. Пусть дано произвольное $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$.

a) Возьмем $\tau_\varepsilon \in \mathbf{G}_*^+$ такое, что

$$\overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau_\varepsilon} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}R^q} \right\| < \inf_{\tau \in G_*^+} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q} \right\| + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{51}$$

Затем возьмем $m_\varepsilon = m(\varepsilon, \tau_\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что при всяком натуральном $m \ge m_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{m\tau_\varepsilon}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}R^q}\right\| < \overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau_\varepsilon}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}R^q}\right\| + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{52}$$

Имеем

$$\theta_\varepsilon \underset{\text{def}}{=} m_\varepsilon\tau_\varepsilon \in \mathbf{G}^+_*. \tag{53}$$

б) При всяком $j \in \mathbf{Z}^+$ имеем $X^{\theta_\varepsilon}_{X^{j\theta_\varepsilon}R^q} \underset{(53)}{=} X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\theta_\varepsilon+(m_\varepsilon-1)\tau_\varepsilon}R^q}\ldots X^{\tau}_{X^{j\theta_\varepsilon}R^q}$, откуда $\left\|X^{\theta_\varepsilon}_{X^{j\theta_\varepsilon}R^q}\right\| \le \prod_{s=0}^{m_\varepsilon-1}\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\theta_\varepsilon+s\tau_\varepsilon}R^q}\right\|$, откуда

$$\ln\left\|X^{\theta_\varepsilon}_{X^{j\theta_\varepsilon}R^q}\right\| \le \sum_{s=0}^{m_\varepsilon-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\theta_\varepsilon+s\tau_\varepsilon}R^q}\right\|. \tag{54}$$

При всяком $l \in$ **H** имеем

$$\frac{1}{l\theta_\varepsilon}\sum_{j=0}^{l-1}\ln\left\|X^{\theta_\varepsilon}_{X^{j\theta_\varepsilon}R^q}\right\| \overset{53}{\underset{(54)}{\le}} \frac{1}{lm_\varepsilon\tau_\varepsilon}\sum_{i=0}^{lm_\varepsilon-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{i\tau_\varepsilon}R^q}\right\|. \tag{55}$$

в) Имеем

$$\begin{gathered}\inf_{\tau\in G^+_*}\sup_{m\in N}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q}\right\| \underset{(53)}{\le} \sup_{l\in N}\frac{1}{l\theta_\varepsilon}\sum_{j=0}^{l-1}\ln\left\|X^{\theta_\varepsilon}_{X^{j\theta_\varepsilon}R^q}\right\| \underset{(55)}{\le} \sup_{l\in N}\frac{1}{lm_\varepsilon\tau_\varepsilon}\sum_{i=0}^{lm_\varepsilon-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}R^q}\right\| \le \\ \le \sup_{m-m_\varepsilon+1\in N}\frac{1}{m\tau_\varepsilon}\sum_{i=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}R^q}\right\| \underset{(52)}{\le} \overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau_\varepsilon}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau_\varepsilon}_{X^{j\tau_\varepsilon}R^q}\right\| + \frac{\varepsilon}{2} \underset{(51)}{\le} \inf_{\tau\in G^+_*}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q}\right\| + \varepsilon.\end{gathered} \tag{56}$$

3. Так как $\varepsilon \in \mathbf{R}^+_*$ было взято (в начале п. 2) произвольным, то из формулы (56) следует неравенство

$$\inf_{\tau\in G^+_*}\sup_{m\in N}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q}\right\| \le \inf_{\tau\in G^+_*}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^q}\right\|. \tag{57}$$

Из неравенств (50), (57) следует равенство (49). Лемма 3 доказана.

Предложение 8. *При всяких $b \in B$, $k \in \{1, ..., n\}$ имеет место равенство*

$$\Omega_k(\wp, b) = \inf_{R^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))}\inf_{\tau\in G^+_*}\sup_{m\in N}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|.$$

Доказательство. Пусть даны произвольные $b \in B$, $k \in \{1, ..., n\}$. В силу леммы 3 для всякого $R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ имеет место равенство (49) с $q = n - k + 1$. Взяв $\inf_{R^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))}$ от левой и от правой части равенства (49) с $q = n — k + 1$, получаем равенство

$$\inf_{R^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))}\inf_{\tau\in G^+_*}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\| = \inf_{R^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))}\inf_{\tau\in G^+_*}\sup_{m\in N}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}R^{n-k+1}}\right\|.$$

Левая часть этого равенства в силу формулы (5) равна $\Omega_k(\wp, b)$. Предложение доказано.

Предложение 9. *При всяких $b \in B$, $k \in \{1, ..., n\}$ имеет место равенство*

$$\Omega^{(k)}(\wp, b) = \inf_{\tau\in G^+_*}\sup_{m\in N}\frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\left\|X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\wp,b)}\right\|.$$

Доказательство. Пусть даны произвольные $b \in B$, $k \in \{1, .., n\}$. Положим

$$q \underset{\text{def}}{=} \dim E_{n-k+1}(\wp, b),\ \mathbf{R}^q \underset{\text{def}}{=} E_{n-k+1}(\wp, b), \tag{58}$$

тогда $\mathbf{R}^q \in G_q(p^{-1}(b))$. Имеем

$$\Omega^{(k)}(\wp, b) \underset{(16)}{=} \inf_{\tau \in G_*^+} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau}_{X^{j\tau} E_{n-k+1}(\wp, b)} \right\| \underset{(58)}{=} \inf_{\tau \in G_*^+} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau}_{X^{j\tau} R^q} \right\| \underset{(49)}{=}$$

$$\underset{(49)}{=} \inf_{\tau \in G_*^+} \sup_{m \in N} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau}_{X^{j\tau} R^q} \right\| \underset{(58)}{=} \inf_{\tau \in G_*^+} \sup_{m \in N} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau}_{X^{j\tau} E_{n-k+1}(\wp, b)} \right\|.$$

Предложение 9 доказано.

Литература

1. Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. X.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 12, с. 2132—2148.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.— М.: Наука, 1966.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 30 декабря 1982 г.