УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. IV

ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть $(E,\ p,\ B)$ — векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$ и базой B (B — полное метрическое пространство, расстояние в котором обозначается через $d_k(\cdot,\ \cdot)$). На $(E,\ p,\ B)$ фиксируем некоторую риманову метрику.

2. Пусть $\mathbf{G}$ есть группа $\mathbf{R}$ или группа $\mathbf{Z}$ и пусть $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$, где через $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ обозначается множество гомоморфизмов группы $\mathbf{G}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, обозначаемую через $\mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B)$. Напомним, что образом $\mathfrak{H}t$ точки $t \in \mathbf{G}$ при гомоморфизме $\mathfrak{H}$ является пара $(X^t,\ \chi^t)$, где X^t — гомеоморфизм E на E, χ^t — гомеоморфизм B на B, причем:

а) $pX^t = \chi^t p$ при всяком $t \in \mathbf{G}$;

б) при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ сужение $X^t[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X^t есть линейное отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$;

в) $X^{t+s} = X^t X^s$, $\chi^{t+s} = \chi^t \chi^s$ при всяких $t \in \mathbf{G}$, $s \in \mathbf{G}$. Вместо X^1 будем писать X, вместо χ^1 — χ.

Потребуем от гомоморфизма $\mathfrak{H}$, чтобы для некоторой функции $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$, удовлетворяющей при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ равенству

$$a(\chi^t b) = a(b), \tag{1}$$

при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ выполнялось неравенство

$$\| X^t[b] \| \leqslant \exp(|\, t\, |\, a(b)). \tag{2}$$

Так как $(X^t[b])^{-1} = X^{-t}[\chi^t b]$ ($b \in B$, $t \in \mathbf{G}$), то наложенное условие перейдет в эквивалентное, если вместо «при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ выполнялось неравенство (2)» написать: «при всяких*) $b \in B$, $t \in \mathbf{G}_*^+$ выполнялось неравенство

$$\max\{\| X^t[b] \|,\ \| (X^t[b])^{-1} \|\} \leqslant \exp(ta(b))\text{ ».} \tag{2′}$$

3. Для всякого*) $\theta \in \mathbf{G}_*$ определяется гомоморфизм $\mathfrak{H}_\theta \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ формулой

$$\mathfrak{H}_\theta s = \mathfrak{H}(s\theta) = (X^{s\theta},\ \chi^{s\theta}) \quad (s \in \mathbf{Z}). \tag{3}$$

Так как по условию при всяком $t \in \mathbf{G}$ выполнено неравенство $\| X^t[b] \| \leqslant \exp(|\, t\, |\, a(b))$, то при всяком $s \in \mathbf{Z}$ выполнено неравенство $\| X^{s\theta}[b] \| \leqslant \exp(|\, s\, | \cdot |\, \theta\, |\, a(b))$, т. е. гомоморфизм $\mathfrak{H}_\theta$ удовлетворяет условию п. 2 (см. фразу, содержащую формулы (1), (2)) с функцией $a_\theta(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ (вместо $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$), определенной формулой $a_\theta(b) \underset{\mathrm{def}}{=} |\, \theta\, |\, a(b)$ ($b \in B$).

---

*) $\mathbf{G}_*^+ = \mathbf{R}_*^+$, если $\mathbf{G} = \mathbf{R}$, $\mathbf{G}_*^+ = \mathbf{N}$, если $\mathbf{G} = \mathbf{Z}$; $\mathbf{R}_*^+(\mathbf{N})$ — множество всех вещественных (целых) чисел > 0; $\mathbf{G}^+$ — множество всех неотрицательных элементов $\mathbf{G}$.

*) $\mathbf{G}_* = \mathbf{G} \setminus \{0\}$.

4. *Показатель Ляпунова* $\lambda_k(\mathfrak{H}, b)$ *гомоморфизма* $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}(E, p, B))$ определяется при всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ формулой

$$\lambda_k(\mathfrak{H}, b) \underset{\text{def}}{=} \min_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k+1}} \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln |X^t \xi|; \tag{4}$$

здесь $G_i(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие i-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$, через $\mathbf{R}_*^i$, обозначается множество всех ненулевых векторов векторного пространства $\mathbf{R}^i$, в выражении $t \to +\infty$ имеется в виду, что $t \in \mathbf{G}$ (напомним, что $\mathbf{G} = \mathbf{R}$ либо $\mathbf{G} = \mathbf{Z}$), — норма, $|\cdot|$ индуцированная фиксированной выше римановой метрикой векторного расслоения (E, p, B).

В [1] доказана корректность приведенного определения. Там же доказано неравенство $|\lambda_k(\mathfrak{H}, b)| \leqslant a(b)$ при всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$.

5. *Центральный показатель* $\Omega_k(\mathfrak{H}, b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}(E, p, B))$ определяется при всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ формулой

$$\Omega_k(\mathfrak{H}, b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \inf_{\tau \in \mathbf{G}_*^+} \varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \|. \tag{5}$$

Смысл некоторых обозначений разъяснен выше после формулы (4): здесь дополнительно поясним, что через X_C^τ обозначается сужение на множество C отображения X^τ. Вместо $X^\tau_{p^{-1}(b)}$ пишем также (это отмечено выше) $X^\tau[b]$. Так как $X^t[b]: p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$ — линейное отображение, то $X^t \mathbf{R}^{n-k+1}$ — векторное подпространство слоя $p^{-1}(\chi^t b)$. Норма линейного отображения $X^\tau_{\mathbf{R}^i}$ определяется стандартным образом:

$$\| X^\tau_{\mathbf{R}^i} \| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\xi \in \mathbf{R}_*^i} (|X^\tau \xi| |\xi|^{-1}).$$

Вместо $\Omega_1(\mathfrak{H}, b)$ пишем также $\Omega(\mathfrak{H}, b)$.

В [2, предложение 7] доказано, что $\Omega_k(\mathfrak{H}, b)$ не изменится, если $\inf\limits_{\tau \in \mathbf{G}_*^+}$ в формуле (5) заменить на $\inf\limits_{\tau \in \theta\mathbf{N}}$, где $\theta \in \mathbf{G}_*^+$ — любое фиксированное: например, верна формула

$$\Omega_k(\mathfrak{H}, b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \|. \tag{5$'$}$$

6. Положив для всякого $\xi \in E$

$$\lambda(\mathfrak{H}, \xi) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} \varlimsup\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{t} \ln |X^t \xi| \ \text{ при } \ |\xi| \neq 0, \\ -\infty \ \text{ при } \ |\xi| = 0 \end{cases} \tag{6}$$

(в выражении $t \to +\infty$ имеется в виду, что $t \in \mathbf{G}$), рассмотрим при всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ множество

$$E_{n-k+1}(\mathfrak{H}, b) \underset{\text{def}}{=} \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H}, \xi) \leqslant \lambda_k(\mathfrak{H}, b)\}. \tag{7}$$

В [1, § 1] доказано, что $E_{n-k+1}(\mathfrak{H}, b)$ — векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$.

Для всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ определяется число

$$\Omega^{(k)}(\mathfrak{H}, b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\tau \in \mathbf{G}_*^+} \varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^\tau_{X^{j\tau} E_{n-k+1}(\mathfrak{H}, b)} \|. \tag{8}$$

В [2, предложение 6] доказано, что $\Omega^{(k)}(\mathfrak{H}, b)$ не изменится, если $\inf\limits_{\tau \in \mathbf{G}_*^+}$ в формуле (8) заменить на $\inf\limits_{\tau \in \theta\mathbf{N}}$, где $\theta \in \mathbf{G}_*^+$ — любое фиксированное: например, верна формула ($\theta = 1$)

$$\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\tau\in\mathbf{N}} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)} \|. \tag{9}$$

7. Гомоморфизм*) $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ называется *насыщенным***) если для всякой точки $b\in B$ такой, что $\chi^{\theta} b \neq b$ при всяком, $\theta \in \mathbf{G}_*$ для всякой окрестности $W(b)$ точки b (в пространстве B), для всякого базиса $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ векторного пространства и $p^{-1}(b)$ всяких окрестностей $U(\xi_i)$ точек ξ_i ($i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$) (в пространстве E) найдется $\delta\in\mathbf{R}^+_*$ такое, что для всякого $t\in\mathbf{N}$ и всяких невырожденных***) линейных операторов

$$Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1}b) \to p^{-1}(\chi^m b) \quad (m\in\{1,\ \ldots,\ t\}), \tag{10}$$

удовлетворяющих при всяком $m\in\{1,\ \ldots,\ t\}$ неравенству

$$\| Y_m (X[\chi^{m-1}b])^{-1} - I \| + \| X[\chi^{m-1}b] Y_m^{-1} - I \| < \delta, \tag{11}$$

найдется точка

$$b' \in W(b) \tag{12}$$

и для всякого $m\in\{1,\ \ldots,\ t\}$ найдется изоморфизм слоев (как евклидовых пространств)

$$\psi_m : p^{-1}(\chi^m b') \to p^{-1}(\chi^m b), \tag{13}$$

причем выполнены следующие требования:

i) $\psi_0^{-1}\xi_i \in U(\xi_i)$ при всяком $i\in\{1,\ \ldots,\ n\}$; (14)

ii) при всяком $m\in\{1,\ \ldots,\ t\}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\chi^{m-1}b') & \xrightarrow[X[\chi^{m-1}b']]{} & p^{-1}(\chi^m b') \\ \downarrow \psi_{m-1} & & \downarrow \psi_m \\ p^{-1}(\chi^{m-1}b') & \xrightarrow[Y_m]{} & p^{-1}(\chi^m b) \end{array} \tag{15}$$

коммутативна.

§ 1

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ — *насыщенный гомоморфизм. Тогда в пространстве* B *найдется всюду плотное множество* C *типа* G_δ *такое, что для всякого* $b\in C$ *имеют место равенства*

$$\lambda_k(\mathfrak{H},\ b) = \Omega_k(\mathfrak{H},\ b) = \Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ b). \tag{16}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим функции $\mu_k^{(m)}(\cdot) : B \to R$ ($m\in\mathbf{N},\ k\in\{1,\ldots,n\}$), определенные в [6]. Воспроизведем их определение:

$$\mu_k^{(m)}(b) \underset{\text{def}}{=} \lim_{q\to\infty} \mu_k^{(m,q)}(b), \tag{17}$$

$$\mu_k^{(m,q)}(b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \max_{t\in\{0,\ldots,q\}} \frac{1}{m+t} \ln \left\| X^{m+t}_{\mathbf{R}^k} \right\|. \tag{18}$$

---

*) Вместо «гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{G},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ здесь пишем иногда «автоморфизм $(X,\chi) : (E,\ p,\ B) \to (E,\ p,\ B)$ (удовлетворяющий условию, сформулированному в первой фразе п. 4 введения статьи [3])» или «семейство морфизмов $(X(m),\ \chi(m)) : (E,\ p,\ B) \to (E,\ p,\ B)$, удовлетворяющее требованиям а) — в) § 3 [4]».

**) Это есть определение насыщенного семейства морфизмов $(X(m), \chi(m)) : (E, p, B) \to (E, p, B)$ (см. § 3 [4]), понимаемое с уточнением, сформулированным в п. 5 введения статьи [5].

***) То есть имеющих нулевые ядра.

В [6] доказана корректность этого определения, т. е. доказано (лемма 1 иследующая за ее доказательством фраза в статье [6]), что при всяких $b \in B$, $k \in \{1, ..., n\}$, $m \in \mathbf{N}$ существует $\lim\limits_{q \to \infty} \mu_k^{(m,q)}(b)$.

Для всяких $m \in \mathbf{N}$, $k \in \{1, ..., n\}$ обозначим через $C_k^{(m)}$ множество точек непрерывности функции $\mu_k^{(m)}(\cdot) : B \to \mathbf{R}$. В [6] доказано (см. доказательство теоремы 3 в [6]), что

$$C \underset{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{k \in \{1,...,n\} \\ m \in \mathbf{N}}} C_k^{(m)} \tag{19}$$

есть множество типа G_δ, всюду плотное *в* B.

2. Обозначим через P множество*) периодических точек семейства отображений $\chi^t : B \to B$, т. е. положим по определению, что точка b пространства B принадлежит множеству P в том и только в том случае, если найдется $\theta \in \mathbf{G}_*$, для которого $\chi^\theta b = b$. Для всякого $b \in P$ найдется $\tau \in \mathbf{G}_*^+$ такое, что $\chi^\tau b = b$ (в самом деле, если $\theta \in \mathbf{G}_* \setminus \mathbf{G}_*^+$, $\chi^\theta b = b$, то $\tau \underset{\text{def}}{=} -\theta \in \mathbf{G}_*^+$, $\chi^{-\theta} b = \chi^{-\theta}(\chi^\theta b) = b$, т. е. $\chi^\tau b = b$.

В силу предложения [7] для всякого $b \in P$ *имеют место равенства*

$$\lambda_1(\mathfrak{H}, b) = \Omega_1(\mathfrak{H}, b) = \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}, b). \tag{20}$$

3. Предположим, что найдется**) $b_0 \in C$ такое, что

$$\lambda_1(\mathfrak{H}, b_0) \neq \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}, b_0). \tag{21}$$

Тогда в силу фразы, содержащей формулу (20), имеем

$$b_0 = C \setminus P. \tag{22}$$

Так как в силу предложений 2, 5 [2] имеет место неравенство $\lambda_1(\mathfrak{H}, b_0) \leq \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}, b_0)$, то из (21) следует строгое неравенство

$$\lambda_1(\mathfrak{H}, b_0) < \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}, b_0). \tag{23}$$

а) В силу леммы 3 [1] имеет место равенство

$$\lambda_1(\mathfrak{H}, b_0) < \lambda_1(\mathfrak{H}_1, b_0). \tag{24}$$

В силу предложения 6 [2] имеет место равенство

$$\Omega^{(1)}(\mathfrak{H}, b_0) = \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}_1, b_0). \tag{25}$$

Из (23) — (25) следует строгое неравенство

$$\lambda_1(\mathfrak{H}_1, b_0) < \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}_1, b_0). \tag{26}$$

В силу леммы 2 [1] (см. замечание, приведенное в [1] после доказательства леммы 2) число $\lambda_1(\mathfrak{H}_1, b_0)$ совпадает с числом, $\lambda_1(b_0)$ определенным по семейству морфизмов

$$(X(m), \chi(m)) \underset{\text{def}}{=} \mathfrak{H}m \underset{(3)}{=} \mathfrak{H}_1 m \quad (m \in \mathbf{N})$$

векторного расслоения (E, p, B) в [6, с. 1408]. Следовательно, в силу леммы 5 [6] имеет место равенство

$$\lambda_1(\mathfrak{H}_1, b_0) = \mu_n(b_0), \tag{27}$$

где

$$\mu_n(b_0) = \lim_{m \to \infty} \mu_n^{(m)}(b_0) \tag{28}$$

(см. в [6] формулу (6) и предшествующий ей текст, где доказано, что (предел в формуле (28) существует). Из (26) следует, что

---

*) Множество P, как и множества C, $C_k^{(m)}$ и функции $\mu_k^{(m)}$, $\mu_k^{(m,q)}$ определенные в п. 1, зависит от гомоморфизма $\mathfrak{H}$, но для краткости эта зависимость не отражена в обозначениях.

**) Множество C определено формулой (19).

$$\rho_0 \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{3}(\Omega^{(1)}(\mathfrak{H}_1, b_0) - \lambda_1(\mathfrak{H}_1, b_0)) > 0. \tag{29}$$

Зафиксируем какое-нибудь $m_0 \in \mathbf{N}$, для которого

$$\mu_n^{(m_0)}(b_0) < \mu_n b_0 + \rho_0; \tag{30}$$

существование такого $m_0 \in \mathbf{N}$ вытекает из формулы (28), так как $\rho_0 \underset{(29)}{>} 0$. Из (27) (30) следует неравенство

$$\mu_n^{(m_0)}(b_0) < \lambda_1(\mathfrak{H}_1, b_0) + \rho_0. \tag{31}$$

Функция $\mu_k^{(m)}(\cdot): B \to \mathbf{R}$ непрерывна в точке b_0, поскольку $b_0 \in C$, а во всякой точке множества C всякая функция $\mu_k^{(m)}(\cdot): B \to \mathbf{R}$ ($m \in \mathbf{N}, k \in \{1, ..., n\}$) непрерывна (см. определение множества C в п. 1); поэтому найдется окрестность $W(b_0)$ точки b_0 (в пространстве B) такая, что для всякого $b \in W(b_0)$ имеет место неравенство

$$\mu_n^{(m_0)}(b) < \mu_n^{(m_0)}(b_0) + \rho_0. \tag{32}$$

Для всякого $b \in W(b_0)$ имеем $\mu_n^{(m_0)}(b) \underset{(32)}{<} \mu_n^{(m_0)}(b_0) + \rho_0 \underset{(31)}{<} \lambda_1(\mathfrak{H}_1, b_0) + 2\rho_0 \underset{(29)}{=} \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}_1, b_0) - \rho_0$.

Подведем итог этого подпункта. В нем доказано, что *существуют* $\rho_0 \in \mathbf{R}_*^+$, $m_0 \in \mathbf{N}$ *и окрестность* W (b_0) */точки* b_0 (*в пространстве* B) *такие, что для всякого* $b \in W(b_0)$ *выполнено неравенство*

$$\mu_n^{(m_0)}(b) < \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}_1, b_0) - \rho_0. \tag{33}$$

Фиксируем $\rho_0 \in \mathbf{R}_*^+$, $m_0 \in \mathbf{N}$ и окрестность $W(b_0)$ точки b_0, обладающие сформулированным в предыдущей фразе свойством.

б) Так как $b_0 \in P$ (множество P определено в п. 2), а $\mathfrak{H} = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}(E, p, B))$ по условию — насыщенный гомоморфизм, то в силу определения насыщенного гомоморфизма, приведенного в п. 7 введения, для окрестности W (b_0) точки b_0, зафиксированной в конце подпункта *а*) *найдется вещественное число* $\delta_0 > 0$ *такое, что для всякого* $t \in \mathbf{N}$ *и всяких невырожденных линейных операторов* $Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1} b_0) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$ ($m \in \{1, ..., t\}$), *удовлетворяющих при всяком* $m \in \{1, ..., t\}$ *неравенству*

$$\left\| Y_m (X[\chi^{m-1} b_0])^{-1} - I \right\| + \left\| X(X[\chi^{m-1} b_0]) Y_m^{-1} - I \right\| < \delta_0, \tag{34}$$

найдутся точка $b \in W(b_0)$ *и изоморфизмы слоев* (*как евклидовых пространств*) $\psi_m : p^{-1}(\chi^m b) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$ ($m \in \{1, ..., t\}$) *такие, что при всяком* $m \in \{1, ..., t\}$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\chi^{m-1} b) & \xrightarrow[X[\chi^{m-1} b]]{} & p^{-1}(\chi^m b) \\ \downarrow \psi_{m-1} & & \downarrow \psi_m \\ p^{-1}(\chi^{m-1} b_0) & \xrightarrow[Y^m]{} & p^{-1}(\chi^m b_0) \end{array} \tag{35}$$

коммутативна.

Фиксируем число $\delta_0 \in (0, \pi)$, обладающее сформулированным в предыдущей фразе свойством.

в) Фиксируем какое-нибудь натуральное $m_1 > m_0$, удовлетворяющее неравенству

$$\exp\left(\frac{\rho_0}{2} m_1\right) \geq \left(\sin \frac{\delta_0}{2}\right)^{-2} \tag{36}$$

(такое m_1 существует, так как $\sin \frac{\delta_0}{2} \neq 0$ (поскольку $\delta_0 \in (0, \pi)$)).

Фиксируем какое-нибудь натуральное $l_0 > 1$, удовлетворяющее неравенству

$$\rho_0 l_0 > 8a(b_0). \tag{37}$$

Положим

$$s_0 \underset{\text{def}}{=} l_0 m_1. \tag{38}$$

г) При всяком $b \in B$ имеем

$$\Omega^{(1)}(\mathfrak{H}_1, b) \underset{(8)}{=} \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{mt} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau}_{X^{j\tau} E_n(\mathfrak{H}_1, b)} \right\|. \tag{39}$$

Так как при всяком $b \in B$ имеют место равенства $E_n(\mathfrak{H}_1, b) \underset{(7)}{=} \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H}_1, b)\} \overset{(4)}{\underset{(6)}{=}} p^{-1}(b)$, то $X^m E_n(\mathfrak{H}_1, b) = X^m p^{-1}(b) = p^{-1}(\chi^m b)$ при всяких $m \in \mathbf{Z}$, $b \in B$.

Поэтому, вспомнив, что $X^{\tau}_{p^{-1}(b)}$ и $X^{\tau}[b]$ суть разные обозначения одного и того же объекта, можем переписать формулу (39) в виде

$$\Omega^{(1)}(\mathfrak{H}_1, b) = \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{mt} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| X^{\tau}[\chi^{j\tau} b] \right\|. \tag{40}$$

Так как $s_0 \underset{(38)}{\in} \mathbf{N}$, то

$$\Omega^{(1)}(\mathfrak{H}_1, b_0) \underset{(40)}{\le} \varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{ms_0} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left\| X^{s_0}[\chi^{js_0} b_0] \right\|,$$

откуда следует, что *существует натуральное число* $t_0 > 1$ *такое, что*

$$\frac{1}{t_0 s_0} \sum_{i=0}^{t_0-1} \ln \left\| X^{s_0}[\chi^{js_0} b_0] \right\| > \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}_1, b_0) - \frac{1}{4}\rho_0. \tag{41}$$

Фиксируем какое-нибудь натуральное $t_0 > 1$, удовлетворяющее неравенству (41).

д) Положим

$$Y_m \underset{\text{def}}{=} X[\chi^{m-1} b_0] \text{ при всяком } m \in \{1, ..., s_0 - 1\}. \tag{42}$$

е) При всяком $m \in \mathbf{N}$ фиксируем какой-нибудь ненулевой вектор $\xi^{(m)} \in p_*^{-1}(\chi^{(m-1)s_0} b_0)$, удовлетворяющий уравнению

$$\left| X^{s_0} \xi^{(m)} \right| - \left\| X^{s_0}[\chi^{(m-1)s_0} b_0] \right\| \cdot \left| \xi^{(m)} \right|. \tag{43}$$

Определим по индукции невырожденные линейные операторы $Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1} b_0) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$ для всех $m \in \{1, ..., t_0 s_0 - 1\}$ следующим образом.

При всех $m \in \{1, ..., s_0 - 1\}$ эти операторы определены в подпункте д) (это — начало индукции).

Допустим, что эти невырожденные линейные операторы определены при всех $m \in \{1, ..., rs_0 - 1\}$, где $r \in \{1, ..., t_0 - 1\}$. Определим тогда невырожденные линейные операторы Y_m при всех $m \in \{rs_0, ..., (r+1)s_0 - 1\}$ (таким образом, построение операторов Y_m ведется индукцией по r) следующим образом. Имеем

$$\xi_{r+1} \underset{\text{def}}{=} XY_{rs_0-1} \dots Y_1 \xi^{(1)} \in p_*^{-1}(\chi^{rs_0} b_0). \tag{44}$$

Если для всякого $s \in \{1, ..., l_0 - 1\}$ имеет место неравенство

$$\left| X^{sm_1} \xi_{r+1} \right| \cdot \left| X^{(s-1)} \xi_{r+1} \right|^{-1} > \left| X^{sm_1} \xi^{(r+1)} \right| \cdot \left| X^{(s-1)m_1} \xi^{(r+1)} \right|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 m_1 \right),$$

то положим

$$Y_m \underset{\text{def}}{=} X[\chi^{m-1} b_0] \tag{45}$$

при всяком $m \in \{rs_0, ..., (r+1)s_0 - 1\}$. Если найдется $s \in \{1, ..., l_0 - 1\}$, для которого имеет место неравенство

$$\left|X^{sm_1}\xi_{r+1}\right| \cdot \left|X^{(s-1)m_1}\xi_{r+1}\right|^{-1} > \left|X^{sm_1}\xi^{(r+1)}\right| \cdot \left|X^{(s-1)m_1}\xi^{(r+1)}\right|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 m_1\right), \tag{46}$$

то, обозначив через $\bar{s}$ наименьшее из таких s (т. е. наименьшее из чисел $s \in \{1, ..., l_0 - 1\}$, удовлетворяющих неравенству (46)), определим операторы Y_m $m \in \{rs_0, ..., (r+1)s_0 - 1\}$ следующим образом.

α) Если s>1, то положим

$$Y_m \underset{\mathrm{def}}{=} X[\chi^{m-1}b_0] \tag{47}$$

при всяком $m \in \{rs_0, ..., rs_0 + (s-1)m_1 - 1\}$. Если $\bar{s} = 1$, то сразу переходим к подпункту β).

β) Положим

$$Y_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} \underset{\mathrm{def}}{=} Z_r^{(1)} X[\chi^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1-1}b_0], \tag{48}$$

где $Z_r^{(1)} : p^{-1}[\chi^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}b_0] \to p^{-1}[\chi^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1}b_0]$ — линейный оператор, определенный следующими условиями.

i) Если вектор ξ_{r+1} коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$, то $Z_r^{(1)}$ — единичный оператор; если вектор ξ_{r+1} не коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$, то сужение оператора $Z_r^{(1)}$ на плоскость, порожденную двумя векторами $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$, $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}$, есть поворот этой плоскости на угол $\frac{1}{2}\delta_0$ в направлении от вектора $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$ к вектору, $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}$ если угол между этими векторами $> \frac{1}{2}\delta_0$ (слова «поворот в направлении от вектора ξ к вектору η» означают в данном контексте, что в разложении образа вектора ξ по базису $|\xi, \eta|$ коэффициент при векторе η положителен) и есть поворот этой плоскости, переводящий вектор $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$ в вектор $\left|X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}\right| \times \left|X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}\right|^{-1} X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}$, если угол между этими векторами $\leqslant \frac{1}{2}\delta_0$.

ii) Если вектор ξ_{r+1} не коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$, то сужение линейного оператора $Z_r^{(1)}$ на ортогональное дополнение к плоскости, порожденной векторами $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$, $X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}$, есть единичный оператор.

γ) Положим

$$Y_m \underset{\mathrm{def}}{=} X[\chi^{m-1}b_0] \tag{49}$$

при всяком $m \in \{rs_0 + (s-1)m_1 - 1, ..., rs_0 + sm_1 - 1\}$ (напомним, что по определению $m_1 > 1$).

δ) Положим

$$Y_{rs_1+\bar{s}m_1} \underset{\mathrm{def}}{=} Z_r^{(2)} X[\chi^{rs_0+\bar{s}m_1-1}b_0], \tag{50}$$

где $Z_r^{(2)} : p^{-1}(\chi^{rs_0+\bar{s}m_1}b_0) \to p^{-1}(\chi^{rs_0+\bar{s}m_1}b_0)$ — линейный оператор, определенный следующими условиями: если два вектора

$$XY_{rs_0+\bar{s}m_1-1} \dots Y_{rs_0}\xi_{r+1},\ X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)} \tag{51}$$

коллинеарны, то $Z_r^{(2)}$ есть единичный оператор; если эти два вектора не коллинеарны, то сужение оператора $Z_r^{(2)}$ на ортогональное дополнение к плоскости, порожденной этими двумя векторами, есть единичный оператор, а сужение оператора $Z_r^{(2)}$ на эту плоскость есть поворот этой плоскости, переводящий первый из векторов (51) в вектор $\sigma_r X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}$, где $\sigma_r \in \mathbf{R}_*^+$.

В каждом из этих двух случаев имеем

$$Y_{rs_0+\bar{s}m_1}\dots Y_1\xi^{(1)} = Y_{rs_0+\bar{\bar{s}}m_1}\dots Y_{rs_0}Y_{rs_0-1}Y_1\xi^{(1)} \underset{(44)}{=}$$
$$\underset{(44)}{=} Y_{rs_0+\bar{s}m_1}\dots Y_{rs_0}X^{-1}\xi_{r+1} \underset{(50)}{=} Z_r^{(2)}XY_{rs_0+\bar{s}m_1-1}\dots Y_{rs_0}X^{-1}\xi_{r+1} = \qquad (52)$$
$$= \sigma_r X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}, \quad \sigma_r \in \mathbf{R}_*.$$

ε) Положим

$$Y_m \underset{\text{def}}{=} X[\chi^{m-1}b_0] \qquad (53)$$

при всяком $m \in \{rs_0+\bar{s}m_1+1, \dots, (r+1)s_0-1\}$ (напомним, что $\bar{s} \leqslant l_0-1$, кроме того, $s_0 \underset{(38)}{=} l_0m_1$, $m_1>1$, следовательно, $(r+1)s_0-1 > rs_0+\bar{s}m_1$).

Начало индукции и шаг индукции по $r \in \{1, \dots, t_0-1\}$ полностью описаны.

Тем самым по индукции определены невырожденные линейные операторы $Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1}b_0) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$ для всех $m \in \{1, \dots, t_0s_0-1\}$.

ж) Наконец, положим

$$Y_{t_0s_0} \underset{\text{def}}{=} X[\chi^{t_0s_0-1}b_0]. \qquad (54)$$

з) Пусть $r \in \{1, \dots, t_0-1\}$ таково, что множество индексов $s \in \{1, \dots, l_0-1\}$, удовлетворяющих неравенству (46), непусто. Оператор $Z_r^{(1)}$, определенный фразой, содержащей формулу (48), удовлетворяет неравенству

$$\left\|Z_r^{(1)}-I\right\| + \left\|\left(Z_r^{(1)}\right)^{-1}-I\right\| < \delta_0. \qquad (55)$$

В самом деле, если U — поворот евклидовой плоскости на угол $\gamma(\gamma>0)$; плоскость сейчас рассматривается без ориентации), то для всякого вектора ζ, лежащего на единичной окружности (т. е. такого, что $|\zeta|=1$), имеем: $|(U-I)\zeta| = |U\zeta-\zeta|$ меньше длины кратчайшей дуги единичной окружности, соединяющей точки ζ и $U\zeta$, а эта длина $\leq\gamma$; следовательно,

$$\|U-I\| < \gamma; \qquad (56)$$

это же относится и к U^{-1}, так как U^{-1} — тоже поворот плоскости на такой же угол; поэтому

$$\left\|U^{-1}-I\right\| < \gamma. \qquad (57)$$

Если линейный оператор $Z: E^n \to E^n$ (через E^n обозначаем n-мерное евклидово пространство) определен условиями: его сужение на некоторую двумерную плоскость $E^2 \subset E^n$ есть поворот U этой плоскости на угол γ, а сужение его на ортогональное дополнение E^{n-2} к этой плоскости есть единичный оператор, то для всякого вектора $\xi \in E^n$ имеем $\xi = \eta+\zeta$ (где $\eta \in E^2$, $\zeta \in E^{n-2}$), $Z\xi = Z\eta + Z\xi = U\eta+\zeta$, $(Z-I)\xi = Z\xi-\xi = U\eta+\zeta-(\eta+\xi) = (U-I)\eta$,

$$|(Z-I)\xi| = |(U-I)\eta| \leqslant \|U-I\|\cdot|\eta| \leqslant \|U-I\|\cdot|\xi| \qquad (58)$$

(последнее неравенство следует из неравенства $|\eta| \leqslant |\xi|$, вытекающего из того, что $|\xi|^2 = |\eta|^2+|\zeta|^2$; из доказанного для всякого $\xi \in E^n$ неравенства (58) следует неравенство $\|Z-I\| \leqslant \|U-I\| \underset{(56)}{<} \gamma$.

Заменив в предыдущей фразе Z на Z^{-1}, а U на U^{-1}, получаем неравенство $\|Z^{-1}-I\| \le \|U^{-1}-I\| \underset{(57)}{<} \gamma$. Сложив эти два неравенства, получаем $\|Z-I\|+\|Z^{-1}-I\|<2\gamma$ (в случае, если угол поворота $\gamma \ne 0$). Если же Z — единичный оператор, то левая частьh последнего неравенства равна нулю.

Следовательно, во всех случаях доказано неравенство (55). В силу формулы (48) неравенство (55) переписывается в виде

$$\|Y_m(X[\chi^{n-1}b_0])^{-1}-I\|+\|X[\chi^{n-1}b_0]Y_m^{-1}-I\|<\delta_0, \tag{59}$$

где $m=rs_0+(\overline{s}-1)m_1$.

и) Пусть $r\in\{1,...,t_0-1\}$ таково, что множество индексов $s\in\{1,...,l_0-1\}$, удовлетворяющих неравенству (46), непусто.

Из определения оператора $Z_r^{(1)}$ вытекает, что если вектор ξ_{r+1} коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$, то $Z_r^{(1)}=I$, а если вектор ξ_{r+1} не коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$, то

$$Z_r^{(1)}X^{(s-1)m_1}\xi_{r+1}=\rho_1X^{(s-1)m_1}\xi_{r+1}+\rho_2X^{(s-1)m_1}\xi^{(r+1)}, \tag{60}$$

где $\rho_1\in\mathbf{R}$, $\rho_2\in\mathbf{R}_*^+$, причем если

$$\measuredangle(X^{(\overline{s}-1)m_1}\xi_{r+1},(X^{(\overline{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}\leqslant\frac{1}{2}\delta_0, \tag{61}$$

то $\rho_0=0$, а если

$$\measuredangle(X^{(\overline{s}-1)m_1}\xi_{r+1},(X^{(\overline{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}>\frac{1}{2}\delta_0, \tag{62}$$

то

$$\measuredangle(Z_r^{(1)}X^{(\overline{s}-1)m_1}\xi_{r+1},(X^{(\overline{s}-1)m_1}\xi_{r+1}=\frac{1}{2}\delta_0. \tag{63}$$

α. 1) Пусть два вектора ξ_{r+1}, $\xi^{(r+1)}$ не коллинеарны и пусть выполнено неравенство (62). Тогда из (60), (62), (63) следует, что $\rho_1>0$. Так как $\rho_1>0$, то

$$\measuredangle(Z_r^{(1)}X^{(\overline{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\rho_1(X^{(\overline{s}-1)m_1}\xi_{r+1})=\measuredangle(Z_r^{(1)}X^{(\overline{s}-1)m_1}\xi_{r+1},(X^{(\overline{s}-1)m_1}\xi_{r+1})\underset{(63)}{=}\frac{1}{2}\delta_0. \tag{64}$$

Выше уже использовалось (когда речь шла об углах и поворотах), что плоскость в слое $p^{-1}(\chi^{rs_0+(\overline{s}-1)m_1}b_0)$, порожденная двумя векторами $X^{(\overline{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$, $X^{(\overline{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}$, наделена евклидовой структурой, поскольку сам слой наделен евклидовой структурой. Теперь воспользуемся для этой плоскости теоремами евклидовой планиметрии. По теореме синусов, примененной к треугольнику с вершинами*) $0, Z_r^{(1)}X^{(\overline{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$, $\rho_1(X^{(\overline{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$ имеем

$$\begin{aligned}
|\rho_2X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}| &= [\sin\measuredangle(Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\rho_2(X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)})]^{-1}\times\\
&\times|\rho_1X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}|\sin\measuredangle(Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\rho_1(X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1})\ge\\
&\ge|\rho_1X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}|\sin\measuredangle(Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1},\rho_1(X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1})\underset{(64)}{=}\\
&\underset{(64)}{=}|\rho_1X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}|\sin\frac{\delta_0}{2}
\end{aligned} \tag{65}$$

(напомним, что $\sin\measuredangle(\xi,\eta)\ge0$ для всяких векторов ξ, η).

*) Говоря о вершинах треугольников, мы имеем в виду, что вектор интерпретируется как точка плоскости; можно интерпретировать вектор как направленный отрезок с. началом в точке 0, тогда вектор в первом смысле есть конец вектора во втором смысле

Плоскость в слое $p^{-1}(\chi^{rs_0+\bar{s}m_1}b_0)$, порожденная двумя векторами $X^{\bar{s}m_1}\xi_{r+1}$, $X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}$, тоже наделена евклидовой структурой, поскольку сам слой наделен евклидовой структурой. Для этой плоскости тоже можно воспользоваться теоремами евклидовой планиметрии. По теореме синусов, примененной к треугольнику с вершинами[**] 0, $X^{m_1}\rho_2 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}$, $X^{m_1}Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}$, имеем

$$\begin{gathered}\sin\measuredangle(X^{m_1}Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}, X^{m_1}\rho_1(X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}) \underset{(60)}{=} \\ \underset{(60)}{=}\left|X^{m_1}\rho_1 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}\right|\cdot\left|X^{m_1}\rho_2 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}\right|^{-1}\times \\ \times\left|X^{m_1}\rho_1 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}\right|\cdot\left|X^{m_1}\rho_2 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}\right|^{-1} = \\ =\left|\rho_1 X^{\bar{s}m_1}\xi_{r+1}\right|\cdot\left|\rho_2 X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}\right|^{-1}.\end{gathered} \tag{66}$$

Так как при $s=\bar{s}$ выполнено неравенство (46), то

$$\begin{gathered}\left|\rho_1 X^{\bar{s}m_1}\xi_{r+1}\right| \leqslant \left|\rho_1(X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}\right|\cdot\left|X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}\right|\cdot\left|X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}\right|^{-1}\exp\left(-\frac{\rho_0}{2}m_1\right)\underset{(65)}{\leqslant} \\ \underset{(65)}{\leqslant}\left(\sin\frac{\delta_0}{2}\right)^{-1}\left|\rho_2 X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}\right|\cdot\left|X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}\right|\times \\ \times\left|X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}\right|^{-1}\exp\left(-\frac{\rho_0}{2}m_1\right)= \\ =\left(\sin\frac{\delta_0}{2}\right)^{-1}\left|\rho_2 X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}\right|\exp\left(-\frac{\rho_0}{2}m_1\right)\underset{(66)}{\leqslant} \\ \underset{(66)}{\leqslant}\left|\rho_2 X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}\right|\sin\frac{\delta_0}{2}.\end{gathered} \tag{67}$$

Имеем

$$\begin{gathered}\sin\measuredangle(X^{m_1}Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}, X^{m_1}\rho_1(X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)}) \underset{(66)}{\leqslant} \\ \underset{(66)}{\leqslant}\left|\rho_1 X^{\bar{s}m_1}\xi_{r+1}\right|\cdot\left|\rho_2 X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}\right|^{-1}\underset{(67)}{\leqslant}\sin\frac{\delta_0}{2}.\end{gathered} \tag{68}$$

В рассмотренном треугольнике отношение стороны, противолежащей углу при вершине 0, к одной из двух других сторон треугольника (это отношение есть правая часть последнего равенства цепочки (66)) не превосходит числа $\sin\frac{\delta_0}{2}<1$ (вследствие формулы (67)). Следовательно, угол при вершине 0 не превосходит одного из двух других углов треугольника и потому является острым, т. е.

$$\measuredangle(X^{m_1}Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}, X^{m_1}\rho_2(X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)})<\frac{\pi}{2}.$$

В силу (68) синус этого острого угла не превосходит $\sin\frac{\delta_0}{2}$, следовательно, сам угол не превосходит $\frac{1}{2}\delta_0$;

$$\measuredangle(X^{m_1}Z_r^{(1)}X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi_{r+1}, X^{m_1}\rho_2(X^{(\bar{s}-1)m_1}\xi^{(r+1)})\le\frac{1}{2}\delta_0. \tag{69}$$

[**] См. предыдущую сноску.

α. 2) Если вектор ξ_{r+1} не коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$, а неравенство (62) не выполнено, то $\rho_1 = 0$ (см. начало подпункта и)) и, следовательно, $Z_r^{(1)} X^{(\bar{s}-1)m_1} \xi_{r+1} \underset{(60)}{=} \rho_2 X^{(\bar{s}-1)m_1} \xi^{(r+1)}$, откуда $X^{m_1} Z_r^{(1)} X^{(\bar{s}-1)m_1} \xi_{r+1} = X^{m_1} \rho_2 \times X^{(\bar{s}-1)m_1} \xi^{(r+1)}$, следовательно, неравенство (69) выполнено и в этом случае.

β) Если вектор коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$, то $Z_r^{(1)} = I$.

к) Пусть $t \in \{1, ..., t_0 - 1\}$ таково, что множество индексов $s \in \{1, ..., l_0 - 1\}$, удовлетворяющих неравенству (46), непусто. Имеем

$$XY_{rs_0 + \bar{s}m_1 - 1} ... Y_{rs_0} \underset{(47)-(49)}{=} X^{m_1} Z_r^{(1)} X^{(\bar{s}-1)m_1 + 1} \left[\chi^{rs_0 - 1} b_0\right],$$

поэтому первый из Еекторов (51), т. е. вектор $XY_{rs_0 + \bar{s}m_1 - 1} ... Y_{rs_0} X^{-1} \xi_{r+1}$, равен $X^{m_1} Z_r^{(1)} X^{(\bar{s}-1)m_1} \xi^{(r+1)}$.

α) Пусть вектор ξ_{r+1} не коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$. Тогда $\rho_2 > 0$ (см. начало подпункта и)), а так как $X^{m_1} \rho_2 X^{(\bar{s}-1)m_1} \xi^{(r+1)} = \rho_2 X^{\bar{s}m_1} \xi^{(r+1)}$, то угол между двумя векторами (51) равен

$$\measuredangle(X^{m_1} Z_r^{(1)} X^{(\bar{s}-1)m_1} \xi_{r+1}, X^{m_1} \rho_2 (X^{(\bar{s}-1)m_1} \xi^{(r+1)}) \underset{(69)}{\leqslant} \frac{1}{2} \delta_0.$$

Поэтому линейный оператор $Z_r^{(2)}$, определенный в подпункте δ) подпункта е), таков, что его сужение на некоторую плоскость есть поворот этой плоскости на угол $\leqslant \frac{1}{2} \delta_0$, а сужение на ортогональное дополнение к этой плоскости есть единичный оператор. В подпункте з) доказано, что отсюда следуют неравенства $\left\| Z_r^{(2)} - I \right\| \leqslant \frac{1}{2} \delta_0, \left\| \left(Z_r^{(2)}\right)^{-1} - I \right\| < \frac{1}{2} \delta_0$, из которых следует неравенство $\left\| Z_r^{(2)} - I \right\| + \left\| \left(Z_r^{(2)}\right)^{-1} - I \right\| < \frac{1}{2} \delta_0$, которое в силу формулы (50) переписывается в виде

$$\left\| Y_m (X[\chi^{m-1} b_0])^{-1} - I \right\| + \left\| X[\chi^{m-1} b_0] Y_m^{-1} - I \right\| < \delta_0, \tag{70}$$

где $m = rs + \bar{s}m_1$.

β) Пусть вектор ξ_{r+1} коллинеарен вектору $\xi^{(r+1)}$. Тогда $Z_r^{(1)} + I$ (см. подпункт β) подпункта е)), следовательно (см. подпункты β), у) подпункта е)), вектор $XY_{rs_0 + \bar{s}m_1 - 1} ... Y_{rs_0} X^{-1} \xi_{r+1}$ коллинеарен вектору $X^{\bar{s}m_1} \xi^{(r+1)}$, следовательно (см. подпункт β), γ) подпункта е)), $Z_r^{(2)} = I$, поэтому (см. формулу (50)) $Y_{rs_0 + \bar{s}m_1} = X[\chi^{rs_0 + \bar{s}m_1 - 1} b_0]$, следовательно, левая часть неравенства (70) при $m = rs + \bar{s}m_1$ равна нулю.

Итак, неравенство (70) доказано и в случае коллинеарности вектора ξ_{r+1} вектору $\xi^{(r+1)}$.

л) Для операторов $Y_m : p^{-1}(\chi^{m-1} b_0) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$, определенных в подпунктах д) — ж), при всяком $m \in \{1, ..., t_0 s_0\}$ выполнено неравенство (34). В самом деле, при всяком $m \in \{1, ..., t_0 s_0\}$ либо $Y_m = X[\chi^{m-1} b_0]$, и тогда левая часть неравенства (34) равна $0 < \delta_0$, либо $Y_m = Z_r^{(1)} X[\chi^{m-1} b_0]$, и тогда неравенство (34) доказано (см. формулу (59)), либо $Y_m = Z_r^{(2)} X[\chi^{m-1} b_0]$ и тогда неравенство (34) также доказано (см. формулу (70)).

м) В силу утверждений подпунктов б), л) найдутся точка

$$b \in W(b_0) \tag{71}$$

и изоморфизмы слоев (как евклидовых пространств)

$$\psi_m : p^{-1}(\chi^m b_1) \to p^{-1}(\chi^m b_0) \, (m \in \{1, ..., t_0 s_0\}) \, ($$

такие, что при всяком $m \in \{1, ..., t_0 s_0\}$ диаграмма

$$
\begin{array}{ccc}
p^{-1}(\chi^{m-1}b_1) & \xrightarrow[X[\chi^{m-1}b_1]]{} & p^{-1}(\chi^{m}b_1) \\
\downarrow \psi_{m-1} & & \downarrow \psi_m \\
p^{-1}(\chi^{m-1}b_0) & \xrightarrow[Y^m]{} & p^{-1}(\chi^{m}b_0)
\end{array} \tag{72}
$$

коммутативна. Фиксируем такие b_1 и ψ_m $m \in \{1, ..., t_0 s_0\}$. Из коммутативности при всяком $m \in \{1, ..., t_0 s_0\}$ диаграммы (72) следует коммутативность диаграммы

$$
\begin{array}{ccc}
p^{-1}(b_1) & \xrightarrow[X^{t_0 s_0}[b_1]]{} & p^{-1}(\chi^{t_0 s_0}b_1) \\
\downarrow \psi_{m-1} & & \downarrow \psi_{t_0 s_0} \\
p^{-1}(b_0) & \xrightarrow[Y_{t_0 s_0} \dots Y_1]{} & p^{-1}(\chi^{t_0 s_0}b_0)
\end{array} \tag{73}
$$

(напомним, что $X[\chi^{t_0 s_0 - 1}b] \ \dots \ X[\chi^0 b] = X^{t_0 s_0}[b]$ при всяком $b \in B$).

Так как ψ_0, $\psi_{t_0 s_0}$ — изоморфизмы евклидовых пространств, соединенных в диаграмме (73) стрелками, помеченными знаками ψ_0, $\psi_{t_0 s_0}$, то из коммутативности диаграммы (73) следует равенство

$$
\| X^{t_0 s_0}[b_1] \| = \| Y_{t_0 s_0} \ \dots \ Y_1 \|. \tag{74}
$$

н) Из определения операторов Y_m (см. подпункты д) — ж)), следует, что при всяком $m \in \{1, \ \dots, \ t_0 s_0\}$ имеет место равенство $Y_m = V_m X[\chi^{m-1}b_0]$, где $V_m : p^{-1}(\chi^m b_0) \to p^{-1}(\chi^m b_0)$ — некоторый ортогональный оператор (равный либо I, либо $Z_r^{(1)}$ при некотором r, либо $Z_r^{(2)}$ при некотором r).

Поэтому при всяких $m \in \{1, \ \dots, \ t_0 s_0\}$, $\xi \in p^{-1}(\chi^{m-1}b_0)$ имеют место равенства

$$
| Y_m \xi | = | X \xi |, \tag{75}
$$

$$
\| Y_m \| = \| X[\chi^{m-1}b_0] \|, \quad \| Y_m^{-1} \| = \| (X[\chi^{m-1}b_0])^{-1} \|. \tag{76}
$$

При всяком $m \in \{1, \ \dots, \ t_0 s_0\}$ имеем

$$
\max\{\| Y_m \|, \ \| Y_m^{-1} \| \underset{(76)}{\overset{(2')}{\leqslant}} \exp(a(\chi^{m-1}b_0)) \underset{(1)}{=} \exp(a(b_0)) \tag{77}
$$

(при применении формулы (2′) использовано равенство $X \underset{\text{def}}{=} X^1$ (см. п. 2 введения)).

о) Положим

$$
\eta_0 \underset{\text{def}}{=} \xi^{(1)}, \quad \eta_m \underset{\text{def}}{=} Y_m \eta_{m-1} \quad (m \in \{1, \ \dots, \ t_0 s_0\}). \tag{78}
$$

Имеем

$$
\eta_{s_0 - 1} \underset{(78)}{\overset{(42)}{=}} X^{s_0 - 1}\eta_0, \tag{79}
$$

$$
| \eta_{s_0} | \underset{(78)}{=} | Y_{s_0} \eta_{s_0 - 1} | \underset{(75)}{=} | X \eta_{s_0 - 1} | \underset{(79)}{=} | X^{s_0} \eta_0 |. \tag{80}
$$

Имеют место равенства

$$
| \eta_{s_0} | \cdot | \eta_0 |^{-1} \underset{(80)}{=} | X^{s_0} \eta_0 | \cdot | \eta_0 |^{-1} \underset{(78)}{=} | X^{s_0} \xi^{(1)} | \cdot | \xi^{(1)} |^{-1} \underset{(43)}{=} \| X^{s_0}[b_0] \| \tag{81}
$$

п) Определим множество $M \subset \{1, \ \dots, \ t_0 - 1\}$ следующим образом: $r \in \{1, \ \dots, \ t_0 - 1\}$ принадлежит множеству M в том и только в том случае, если для некоторого $s \in \{1, \ \dots, \ l_0 - 1\}$ имеет место неравенство (46). Пусть $r \in M$. Имеем

$$
\eta_{r s_0 + \bar{s} m_1} \underset{(78)}{\overset{(52)}{=}} \sigma_r X^{\bar{s} m_1} \xi^{(r+1)}, \quad \text{где} \quad \sigma_r \in \mathbf{R}_*. \tag{82}
$$

Далее,

$$\eta_{(r+1)s_0} \underset{(78)}{=} Y_{(r+1)s_0} \ \dots\ Y_{rs_0+\bar{s}m_1+1}\eta_{rs_0+\bar{s}m_1} \underset{(53)}{=} Y_{(r+1)s_0} X[\chi^{(r+1)s_0-2}b_0] \ \dots$$
$$\dots\ X[\chi^{rs_0+\bar{s}m_1}b_0]\eta_{rs_0+\bar{s}m_1} = Y_{(r+1)s_0} X^{s_0-\bar{s}m_1-1}\eta_{rs_0+\bar{s}m_1} \underset{(82)}{=} \tag{83}$$
$$\underset{(82)}{=} \sigma_r Y_{(r+1)s_0} X^{s_0-1}\xi^{(r+1)}.$$

Имеем

$$|\eta_{(r+1)s_0}| \underset{(83)}{=} |\sigma_r Y_{(r+1)s_0} X^{s_0-1}\xi^{(r+1)}| \underset{(75)}{=} |\sigma_r X^{s_0}\xi^{(r+1)}|. \tag{84}$$

Из (82), (84) следует равенство

$$|\eta_{(r+1)s_0}| \cdot |\eta_{rs_0+\bar{s}m_1}|^{-1} = |X^{s_0}\xi^{(r+1)}| \cdot |X^{\bar{s}m_1}\xi^{(r+1)}|^{-1}. \tag{85}$$

Итак, в этом подпункте доказано, что *для всякого* $r \in M$ *имеет место равенство* (*85*).

р) Пусть

$$r \in CM \underset{\text{def}}{=} \{1, \ \dots, \ t_0-1\} \setminus M \tag{86}$$

(множество M определено в начале подпункта п)). Тогда для всякого $s \in \{1, \ \dots, \ l_0-1\}$ имеет место неравенство (отрицание неравенства (46)):

$$|X^{sm_1}\xi_{r+1}| \cdot |X^{(s-1)m_1}\xi_{r+1}|^{-1} > |X^{sm_1}\xi^{(r+1)}| \cdot |X^{(s-1)m_1}\xi^{(r+1)}|^{-1} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 m_1\right). \tag{87}$$

Кроме того, тогда

$$\eta_{(r+1)s_0-m_1} \underset{(78)}{\overset{(44)}{=}} Y_{(r+1)s_0-m_1} \dots Y_{rs_0} X^{-1}\xi_{r+1} \underset{(45)}{=} X^{s_0-m_1}\xi_{r+1}, \tag{88}$$

$$\eta_{rs_0-1} \underset{(78)}{\overset{(44)}{=}} X^{-1}\xi_{r+1}. \tag{89}$$

Перемножив неравенства (87) по всем $s \in \{1, \ \dots, \ l_0-1\}$, воспользовавшись формулой $s_0 \underset{(38)}{=} l_0 m_1$ получаем неравенство: $|X^{s_0-m_1}\xi_{r+1}| \cdot |\xi_{r+1}|^{-1} >$ $> |X^{s_0-m_1}\xi^{(r+1)}| \cdot |\xi^{(r+1)}|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0(s_0-m_1)\right) \geqslant |X^{s_0-m_1}\xi^{(r+1)}| \cdot |\xi^{(r+1)}|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 s_0\right)$, которое с помощью формул (88), (89) переписывается в виде $|\eta_{(r+1)s_0-m_1}| \cdot |X\eta_{rs_0-1}|^{-1} > |X^{s_0-m_1}\xi^{(r+1)}| \cdot |\xi^{(r+1)}|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 s_0\right)$.

Это неравенство в свою очередь может быть переписано в виде

$$|\eta_{(r+1)s_0-m_1}| \cdot |\eta_{rs_0}|^{-1} > |X^{s_0-m_1}\xi^{(r+1)}| \cdot |\xi^{(r+1)}|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 s_0\right), \tag{90}$$

так как $|\eta_{rs_0}| \underset{(78)}{=} |Y_{rs_0}\eta_{rs_0-1}| \underset{(75)}{=} \cdot |X\eta_{rs_0-1}|$.

Итак, в этом пункте доказано, что *для всякого* $r \in CM$ *имеет место неравенство* (*90*).

с) Пусть $r \in M$. Рассмотрим сначала случай[*)] $\bar{s} > 1$. По определению числа $\bar{s}$ (см. подпункт е)) для всякого $s \in \{1, \ \dots, \ \bar{s}-1\}$ неравенство (46) не имеет места, т. е. для всякого $s \in \{1, \ \dots, \ \bar{s}-1\}$ выполнено неравенство

$$|X^{sm_1}\xi_{r+1}| \cdot |X^{(s-1)m_1}\xi_{r+1}|^{-1} > |X^{sm_1}\xi^{(r+1)}| \cdot |X^{(s-1)m_1}\xi^{(r+1)}|^{-1} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\rho_0 m_1\right). \tag{91}$$

Кроме того, тогда

[*)] Число $\bar{s}$ определенное в подпункте е) и фигурирующее здесь и в других местах текста, зависит, конечно, от r, хотя это и не отражено в его обозначении.

$$\eta_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1-1} \underset{(78)}{\overset{(44)}{=}} Y_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1-1} \ldots Y_{rs_0} X^{-1} \xi_{r+1} \underset{(47)}{=} X^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1-1} \xi_{r+1}, \tag{92}$$

$$\eta_{rs_0-1} \underset{(78)}{\overset{(44)}{=}} X^{-1} \xi_{r+1}. \tag{93}$$

Перемножив неравенства (91) по всем $s \in \{1, \ \ldots, \ \bar{s}-1\}$, получаем неравенство

$$| X^{(\bar{s}-1)m_1} \xi_{r+1} | \cdot | \xi_{r+1} |^{-1} > | X^{(\bar{s}-1)m_1} \xi^{(r+1)} | \cdot | \xi^{(r+1)} |^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \rho_0 m_1 (\bar{s}-1) \right),$$

из которого в силу формул (92), (93) и неравенства $m_1(\bar{s}-1) \leqslant m_1(l_0-2) \underset{(38)}{<} s_0$ следует $| X\eta_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1-1} | \cdot | X\eta_{rs_0-1} |^{-1} > | X^{(\bar{s}-1)m_1} \xi^{(r+1)} | \cdot | \xi^{(r+1)} | \exp\left(-\frac{1}{2} \rho_0 s_0 \right)$. Это неравенство в свою очередь может быть переписано в виде

$$| \eta_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} | \cdot | \eta_{rs_0} |^{-1} > | X^{(\bar{s}-1)m_1} \xi^{(r+1)} | \cdot | \xi^{(r+1)} |^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \rho_0 s_0 \right), \tag{94}$$

если применить при $m = rs_0 + (\bar{s}-1)m_1$ и при $m = rs_0$ $m = rs_0$ равенство $| \eta_m | \underset{(78)}{=} | Y_m \eta_{m-1} | \underset{(75)}{=} | X\eta_{m-1} |$.

Теперь рассмотрим случай $\bar{s} = 1$. В этом случае левая часть неравенства (94) равна 1, а правая равна $\exp\left(-\frac{1}{2} \rho_0 s_0 \right)$, поэтому неравенство (94) верно в случае $\bar{s} = 1$.

Итак, в этом подпункте доказано, что *для всякого* $r \in M$ *имеет место неравенство*

$$| \eta_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} | \cdot | \eta_{rs_0} |^{-1} > | X^{(\bar{s}-1)m_1} \xi^{(r+1)} | \cdot | \xi^{(r+1)} |^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \rho_0 s_0 \right). \tag{95}$$

т) Для всякого $r \in \{1, \ \ldots, \ t_0 - 1\}$ имеем

$$| \eta_{(r+1)s_0} | \cdot | \eta_{(r+1)s_0-m_1} |^{-1} \underset{(78)}{=} | \eta_{(r+1)s_0} | \cdot | Y^{-1}_{(r+1)s_0-m_1+1} \ \ldots \ Y^{-1}_{(r+1)s_0} \eta_{(r+1)s_0} |^{-1} \geqslant$$

$$\geqslant \| Y^{-1}_{(r+1)s_0-m_1+1} \ \ldots \ Y^{-1}_{(r+1)s_0} \|^{-1} \geqslant \prod_{j=0}^{m_1-1} \| Y^{-1}_{(r+1)s_0-j} \|^{-1} \underset{(77)}{\geqslant}$$

$$\underset{(77)}{\geqslant} \exp(-m_1 a(b_0)) \underset{(2)}{\overset{(1)}{\geqslant}} \| X^{m_1} [\chi^{(r+1)s_0-m_1} b_0] \| \exp(-2m_1 a(b_0)) \geqslant$$

$$\geqslant | X^{s_0} \xi^{(r+1)} | \cdot | X^{s_0-m_1} \xi^{(r+1)} |^{-1} \exp(-2m_1 a(b_0)).$$

Таким образом, для всякого $r \in \{1, \ \ldots, \ t_0 - 1\}$ доказано неравенство

$$| \eta_{(r+1)s_0} | \cdot | \eta_{(r+1)s_0-m_1} |^{-1} \geqslant | X^{s_0} \xi^{(r+1)} | \cdot | X^{s_0-m_1} \xi^{(r+1)} |^{-1} \exp(-2m_1 a(b_0)). \tag{96}$$

у) Для всякого $r \in M$ имеем

$$| \eta_{rs_0+\bar{s}m_1} | \cdot | \eta_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} |^{-1} \underset{(78)}{=} | \eta_{rs_0+\bar{s}m_1} | \cdot | Y^{-1}_{rs_0+(\bar{s}-1)+1} \ \ldots \ Y^{-1}_{rs_0+\bar{s}m_1} \eta_{rs_0+\bar{s}m_1} |^{-1} \geqslant$$

$$\geqslant \| Y^{-1}_{rs_0+(\bar{s}-1)+1} \ \ldots \ Y^{-1}_{rs_0+\bar{s}m_1} \|^{-1} \geqslant \prod_{j=1}^{m_1} \| Y^{-1}_{rs_0+(\bar{s}-1)++j} \|^{-1} \underset{(77)}{\geqslant}$$

$$\underset{(77)}{\geqslant} \exp(-m_1 a(b_0)) \underset{(2)}{\overset{(1)}{\geqslant}} \| X^{m_1} [\chi^{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} b_0] \| \exp(-2m_1 a(b_0)) \geqslant$$

$$\geqslant | X^{\bar{s}m_1} \xi^{(r+1)} | \cdot | X^{(\bar{s}-1)m_1} \xi^{(r+1)} |^{-1} \exp(-2m_1 a(b_0)).$$

Таким образом, *для всякого* $r \in M$ *имеет место неравенство*

$$| \eta_{rs_0+\bar{s}m_1} | \cdot | \eta_{rs_0+(\bar{s}-1)m_1} |^{-1} \geqslant | X^{\bar{s}m_1} \xi^{(r+1)} | \cdot | X^{(\bar{s}-1)m_1} \xi^{(r+1)} |^{-1} \exp(-2m_1 a(b_0)). \tag{97}$$

ф) Пусть $r \in M$. Перемножив равенство (85) и неравенства (97), (95), получаем

$$| \eta_{(r+1)s_0} | \cdot | \eta_{rs_0} |^{-1} \geqslant | X^{s_0} \xi^{(r+1)} | \cdot | \xi^{(r+1)} |^{-1} \exp\left(-2m_1 a(b_0) - \frac{1}{2} \rho_0 s_0 \right). \tag{98}$$

Пусть $r \in CM$. Перемножив неравенства (96) и (90), получаем

$$|\eta_{(r+1)s_0}| \cdot |\eta_{rs_0}|^{-1} \geqslant |X^{s_0}\xi^{(r+1)}| \cdot |\xi^{(r+1)}|^{-1} \exp\left(-2m_1 a(b_0) - \frac{1}{2}\rho_0 s_0\right). \tag{99}$$

Перемножив неравенства (98) по всем $r \in M$ и неравенства (99) по всем $r \in CM$, получаем (пользуясь формулой (86))

$$|\eta_{t_0 s_0}| \cdot |\eta_{s_0}|^{-1} \geqslant \left\{\exp\left(\left(-2m_1 a(b_0) - \frac{1}{2}\rho_0 s_0\right)(t_0 - 1)\right)\right\} \times$$

$$\times \prod_{r=0}^{t_0-1} (|X^{s_0}\xi^{(r+1)}| \cdot |\xi^{(r+1)}|^{-1}) \underset{(43)}{=} \left\{\exp\left(\left(-2m_1 a(b_0) - \frac{1}{2}\rho_0 s_0\right)(t_0 - 1)\right)\right\} \times$$

$$\times \prod_{r=0}^{t_0-1} \| X^{s_0}[\chi^{rs_0} b_0] \|,$$

откуда в силу формулы (81) следует неравенство

$$|\eta_{t_0 s_0}| \cdot |\eta_0|^{-1} \geqslant \left\{\exp\left(\left(-2m_1 a(b_0) - \frac{1}{2}\rho_0 s_0\right) t_0\right)\right\} \times \prod_{r=0}^{t_0-1} \| X^{s_0}[\chi^{rs_0} b_0] \|. \tag{100}$$

Имеем

$$|\eta_{t_0 s_0}| \cdot |\eta_0|^{-1} \underset{(78)}{=} |Y_{t_0 s_0} \ \ldots \ Y_1 \eta_0| \cdot |\eta_0|^{-1} \leqslant \| Y_{t_0 s_0} \ \ldots \ Y_1 \| \underset{(74)}{=} \| X^{t_0 s_0}[b_1] \|, \tag{101}$$

$$-2m_1 a(b_0) \underset{(38)}{\overset{(37)}{\leqslant}} \frac{1}{4}\rho_0 s_0. \tag{102}$$

Из (100) — (102) следует неравенство

$$\| X^{t_0 s_0}[b_1] \| \geqslant \left\{\exp\left(-\frac{3}{4}\rho_0 s_0 t_0\right)\right\} \prod_{r=0}^{t_0-1} \| X^{s_0}[\chi^{rs_0} b_0] \|, \tag{103}$$

Имеем

$$\begin{gathered} \frac{1}{t_0 s_0} \ln \| X^{t_0 s_0}[b_1] \| \underset{(103)}{\geqslant} -\frac{3}{4}\rho_0 + \frac{1}{t_0 s_0} \sum_{r=0}^{t_0-1} \ln \| X^{s_0}[\chi^{rs_0} b_0] \| \underset{(41)}{\geqslant} \\ \underset{(41)}{\geqslant} \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) - \rho_0. \end{gathered} \tag{104}$$

x) При всяком натуральном $m \leqslant t_0 s_0$ при всяком натуральном $q \geqslant t_0 s_0 - m$ имеем

$$\max_{t \in \{0,\ \ldots,\ q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X^{m+t}[b_1] \| \geqslant \frac{1}{t_0 s_0} \ln \| X^{t_0 s_0}[b_1] \|. \tag{105}$$

Так как $X^s[b] = X^s_{p^{-1}(b)}$ при всяких $s \in \mathbf{G}$, $b \in B$ (это — просто два разных обозначения одного и того же объекта), а грассманово многообразие $G_n(p^{-1}(b))$ состоит из одной точки $p^{-1}(b)$, то при всяком натуральном $m \leqslant t_0 s_0$ при всяком натуральном $q \geqslant t_0 s_0 - m$ имеет место формула

$$\begin{gathered} \mu_n^{(m,\ q)}(b_1) \underset{(18)}{=} \max_{t \in \{0,\ \ldots,\ q\}} \frac{1}{m+t} \ln \| X^{m+t}_{p^{-1}(b_1)} \| \underset{(105)}{\geqslant} \frac{1}{t_0 s_0} \ln \| X^{t_0 s_0}[b_1] \| \underset{(104)}{\geqslant} \\ \underset{(104)}{\geqslant} \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) - \rho_0. \end{gathered} \tag{106}$$

При всяком натуральном $m \leqslant t_0 s_0$ имеем

$$\mu_n^{(m_0)}(b_1) \underset{(17)}{=} \lim_{q \to \infty} \mu_n^{(m,\ q)}(b_1) \underset{(106)}{\geqslant} \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) - \rho_0.$$

В частности,

$$\mu_n^{(m_0)}(b_1) \geqslant \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) - \rho_0, \tag{107}$$

$$\mu_n^{(m_0)}(b_1) \geqslant \Omega^{(1)}(\mathfrak{H}_1,\ b_0) - \rho_0, \qquad (107)$$

так как $m_0 < t_0 s_0$ (неравенство $m_0 < t_0 s_0$ следует из формулы (38) и неравенства $m_1 > m_0$ (см. подпункт в)), так как). $l_0 \in \mathbf{N}$, $t_0 \in \mathbf{N}$.

Неравенство (107) в сочетании с формулой (71) противоречит утверждению, содержащему формулу (33).

Полученное противоречие выведено из предположения, что для некоторого $b_0 \in C$ имеет место неравенство (21). Следовательно, доказано, что для всякого $b \in C$ выполнено равенство

$$\lambda_1(\mathfrak{H},\ b) = \Omega^{(1)}(\mathfrak{H},\ b). \tag{108}$$

В силу предложений 2,5 [2] для всякого $b \in B$ имеют место неравенства

$$\lambda_1(\mathfrak{H},\ b) \leqslant \Omega_1(\mathfrak{H},\ b) \leqslant \Omega^{(1)}(\mathfrak{H},\ b). \tag{109}$$

Из (108), (109) следует, что для всякого $b \in C$ имеют место равенства $\lambda_1(\mathfrak{H},\ b) = \Omega_1(\mathfrak{H},\ b) = \Omega^{(1)}(\mathfrak{H},\ b)$. Теорема доказана.

Литература

1. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 12, с. 2132 — 2148.
2. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 8, с. 1344 — 1356.
3. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 2, с. 196 — 214.
4. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 3, с. 431 — 468.
5. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 8, с. 1394 — -1410.
6. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с 1408 — 1416.
7. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 11, с. 1866 — 1870.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 25 января 1983 г.