Доклады Академии наук СССР
1966. Том 171, № 2

УДК 517.941.92 *МАТЕМАТИКА*

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

СТРУКТУРА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МАТРИЦ *R*-СИСТЕМ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 27 I 1966)

Для систем с периодическими коэффициентами структура фундаментальных матриц описывается теоремой Флоке (см., например, ([1]), стр. 90, теорема 5.1). Обобщение теоремы Флоке на системы с квазипериодическими коэффициентами было сделано А. Е. Гельманом (см. ([7, 8])) (случай $n=2$) и Л. Я. Адриановой (см. ([2])) (случай произвольного *n)*. Системы с почти периодическими коэффициентами при некоторых специальных предположениях изучены Лилло (см. ([9])) и Б. Ф. Быловым (см. ([3-6])).

В настоящей работе доказывается теорема, обобщающая теорему Флоке на *R*-системы с почти периодическими коэффициентами (равномерно почти периодическими, см. ([10])). Для доказательства используется методика работы ([13]), причем первая часть настоящей работы посвящена развитию этой методики, и относится к произвольным *R*-системам. Используются также упомянутые выше результаты и способы рассуждений Б. Ф. Былова.

Определение *R*-системы. 1. Пусть функция $q(t)$ удовлетворяет условию Липшица. Для каждого $\varepsilon>0$ построим по индукции T_i $(i=1,2,...)$ так: $T_0=1$, $T_i=\sup$ длин отрезков, не содержащих отрезков $[\tau_1,\tau_2]$ таких, что $\tau_2-\tau_1\geqslant T_{i-1}$ и

$$\frac{q(\tau_2)-q(\tau_1)}{\tau_2-\tau_1}\leqslant \overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}}\frac{q(t)-q(\tau)}{t-\tau}-\varepsilon .$$

Скажем, что: а) $q(t)\in R_1$, *если либо некоторое* $T_i=+\infty$, *либо* $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{T_{i-1}}{T_i}=+\infty$ *(*$\varepsilon>0$ *любое);*

б) $q(t)\in\widetilde{R}$, *если* $q(t)\in R_1$, $-q(t)\in R_1$.

2. $A(t)\in R$, если выполнено следующее. Пусть $U^{(k)}(t)$ $(k=1,2,...)$ — произвольные перроновские преобразования, приводящие систему $\dot{x}=A(t)x$ к треугольному виду $\dot{u}=B^{(k)}(t)u$, и пусть $t_k\to+\infty$ — произвольная последовательность такие, что существует равномерный на отрезках предел

$$q_i(t)=\lim_{k\to\infty}\int_{t_k}^{t_k+t}b_{ii}^{(k)}(\tau)d\tau (b_{ii}^{(k)}(\tau) \text{— } i\text{-й диагональный элемент } B^{(k)}(t).$$

$q_i(t)\in\widetilde{R}$

Лемма 1. Пусть дана последовательность функций $q_k(t)\equiv q(t)\in\widetilde{R}$ $(t\geqslant t_0)$ *таких, что*

$$|q_k(t)-q_k(\tau)|\leqslant a(t-\tau)\quad (k=1,2,...;t\geqslant\tau\geqslant t_0).$$

Пусть

$$\lambda=\lim_{k\to\infty}\frac{q_k(t_k)-q_k(\tau_k)}{t_k-\tau_k}$$

для некоторой последовательности отрезков $[\tau_k,t_k], t_k-\tau_k\underset{k\to\infty}{\to}+\infty$.

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $\theta_i \geqslant t_0$ и последовательность индексов k_i $(i = 1, 2, ...)$ такие, что

$$r_i(t) = q_{k_i}(\theta_i + t) - q_{k_i}(\theta_i) \underset{i\to\infty}{\to} q(t)$$

равномерно на каждом отрезке при $t \geqslant 0$, причем для функции $q(t)$ имеет место

$$q(t) - q(\tau) \geqslant (\lambda - \varepsilon)(t - \tau) - d_\varepsilon$$

для любых $t \geqslant \tau \geqslant 0$ и некоторого $d_\varepsilon \geqslant 0$ (d_ε — функция от ε).

Приведем основную идею доказательства. Пусть это не так. Тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и некоторого k можно найти отрезок L прямой, на котором функция $q_k(t)$ имеет среднее приращение $> \lambda - \varepsilon_0 / 2$; но на этом отрезке найдутся непересекающиеся интервалы, объединение которых имеет относительную (на L) меру, близкую к 1, причем на каждом из интервалов $q_k(t)$ имеет среднее приращение $< \lambda - \varepsilon_0$. Это приводит к противоречию, которое доказывает лемму.

С помощью леммы 1 доказывается следующая

Лемм а 2. *Пусть вектор-функции*

$$q_k(t) = \left\{ q_k^{(1)}(t), ..., q_k^{(n)}(t) \right\} \quad (k = 1, 2, ...)$$

таковы, что

$$\left\| q_k(t) - q_k(\tau) \right\| \leqslant a(t - \tau) \quad (k = 1, 2, ...; t \geqslant \tau \geqslant t_0).$$

Пусть $\tau_k \geqslant t_0$ $(k = 1, 2, ...)$ и

$$q(t) = \left\{ q^{(1)}(t), ..., q^{(n)}(t) \right\} = \lim_{k\to\infty} \left[q_k(\tau_k + t) - q_k(\tau_k) \right]$$

(предел равномерный на каждом отрезке при $t \geqslant 0$). Пусть для любых $\tau_k q^{(i)}(t) \in \widetilde{R}$.

Обозначим

$$\lambda = \overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}} \frac{q^{(1)}(t) - q^{(1)}(\tau)}{t - \tau}.$$

Тогда для всякого $\eta > 0$ найдутся числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ $(|\lambda_1 - \lambda| < \eta)$, числа $\theta_j \geqslant t_0$ и индексы k_j $(j = 1, 2, ...)$ такие, что существует

$$r(t) = \lim_{j\to\infty} \left[q_{k_j}(\theta_j + t) - q_{k_j}(\theta_j) \right]$$

(*предел равномерный на каждом отрезке при $t \geqslant 0$), причем для всякого $i = 1, 2, ..., n$*

$$(\lambda_i - \varepsilon)(t - \tau) - d_\varepsilon \leqslant r^{(i)}(t) - r^{(i)}(\tau) \leqslant (\lambda_i + \varepsilon)(t - \tau) + d_\varepsilon$$

для всякого $\varepsilon > 0$, некоторого $d_\varepsilon \geqslant 0$ (d_ε — функция от ε) и всех $t \geqslant \tau \geqslant 0$.

Мы рассматриваем системы

$$\dot{x} = A(t)x \text{ в } E^n; \quad \left(\|A(t)\| \leqslant a;\ t \geq t_0 \right); \quad A(t) \in R; \tag{I}$$

$$\dot{y} = A(t)y + \varphi(y, t); \quad \|\varphi(y, t)\| \leqslant g(t)\|y\| \tag{II}$$

($A(t)$ и $\varphi(y, t)$, непрерывны по t и по y).

Определение 1. Максимальным показателем вектор-функции $x(t)$ назовем

$$\overline{\lambda} = \overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}} \frac{1}{t - \tau} \ln \frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|}.$$

Минимальным показателем $x(t)$ назовем

$$\underline{\lambda} = \underline{\lim_{t-\tau\to+\infty}} \frac{1}{t - \tau} \ln \frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|}$$

Определение 2. Число λ назовем грубым показателем системы (I), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t); \quad g_1(t) < \delta; \quad \int^{+\infty} g_2(\tau)d\tau < \infty$$

следует, что система (II) имеет обобщенное (т. е. обычное или сдвиг обычного или предельное — см. ([11])) решение, характеристический показатель которого $\mu \in (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$. Множество грубых показателей системы (I) назовем *грубым действительным спектром* Λ_s системы (I). (Этим определением удобно заменить определение соответствующего понятия, данное в ([13])).

Теорема 1. Для всякого обобщенного решения $x(t)$ системы (I) $\overline{\lambda} \in \Lambda_s$ и $\lambda \in \Lambda_s$ $(A(t) \in R)$.

Доказательство получается комбинацией двух результатов: теоремы 2 заметки ([13]) и леммы 2 настоящей заметки.

Перейдем теперь к случаю, когда $A(t)$ — почти периодическая матрица при $-\infty < t < +\infty$.

Теорема 2. Пусть $A(t)$ — почти периодическая матрица $(A(t) \in R)$.

Тогда существует перроновское преобразование $x = U(t)u$, приводящее систему (I) к треугольному виду

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} b_{11}(t), & \dots & b_{1n}(t) \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & & b_{mn}(t) \end{pmatrix} u, \tag{1}$$

причем диагональные коэффициенты $b_{ii}(t)$ «интегрально близки» к некоторым константам λ_i:

$$(\lambda_i - \varepsilon)(t - \tau) - d_\varepsilon \leqslant \int_\tau^t b_{ii}(\xi)d\xi \leqslant (\lambda_i + \varepsilon)(t - \tau) + d_\varepsilon, \tag{2}$$

$i = 1, 2, ..., n$ (для всякого $\varepsilon > 0$, некоторого $d_\varepsilon > 0$ (d_e — функция от ε) и всех $t \geqslant \tau$).

Наметим доказательство. Приведем систему (I) перроновским преобразованием $U_1(t)$ к треугольному виду. Можно показать, что из равномерной на прямой непрерывности $A(t)$ вытекает, что $U_1(t)$ равномерно непрерывна на прямой. Пользуясь этим и леммой 2, получим, что найдется предельная система

$$\dot{x} = A^*(t)x, \quad \text{где } A^*(t) = \lim_{t_k \to +\infty} A(t_k + t),$$

которая перроновским преобразованием $\widetilde{U}_1(t)$ приводится к виду (1) —(2), причем $\widetilde{U}_1(t)$ равномерно непрерывна на прямой. Воспользовавшись тем, что $A(t) = \lim_{k \to +\infty} A^*(\theta_k + t)$ получаем, что сама система (I) перроновским преобразованием приводится к (1) — (2).

Теорема 3. Пусть система (I) имеет n различных характеристических показателей $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ($A(t) \in R$ — почти периодическая матрица).

Тогда всякая фундаментальная матрица $X(t)$ системы (I) имеет вид

$$X(t) = S(t)\exp\left[diag\left\{\int_0^t p_1(\tau)d\tau, ..., \int_0^t p_n(\tau)d\tau\right\}\right],$$

где $S(t)$ —ляпуновская почти периодическая матрица; функция $p_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ почти периодическая и имеет среднее, равное λ_i.

Доказательство. С помощью теоремы 2 методами работ ([12,13]) получаем, что выполнены условия теоремы Б. Ф. Былова (см. ([3]), теорема 2). С помощью этой теоремы получаем наше утверждение.

Обобщив рассуждения Б. Ф. Былова (см. ([3])), с помощью теоремы 2 получаем в общем случае (т. е. когда система (I) не обязана иметь n различных характеристических показателей) следующую теорему (обобщающую теорему Флоке).

Теорема 4. Пусть $A(t) \in R$ — почти периодическая матрица и пусть $x_1(t),\dots,x_n(t)$ — нормальная система решений системы (I), причем характеристический показатель решения $x_i(t)$ равен λ_i.

Тогда, существует ляпуновское почти периодическое преобразование $x = S(t)u$, приводящее систему (I) к клеточно-диагональному виду

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} B^{(1)}(t) & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 0 & \vdots & B^{(m)}(t) \end{pmatrix} u,$$

где каждая система

$$\dot{v}_k = B^{(k)}(t) v_k$$

такова, что логарифмическая производная нормы всякого ее решения «интегрально близка» к одной из констант λ_i (одной и той же для данного k).

Замечание 1. Из доказанных теорем вытекает, что для R-системы с почти периодическими коэффициентами $\Lambda_s = \Lambda^0$, где Λ^0 — совокупность характеристических показателей обычных решений системы.

Замечание 2. Доказанные теоремы дают способ вычисления характеристических показателей R-систем с почти периодическими коэффициентами, вполне аналогичный тому, который дает теорема Флоке для систем с периодическими коэффициентами.

Выражаю благодарность В. В. Немыцкому за внимание к настоящей работе и Б. Ф. Былову за обсуждение результатов.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 I 1966

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958. [2] Л. Я. Адрианова, Вестн. Ленинградок, унив., № 7, сер. матем., мех., астрон., в. 2, 14 (1962). [3] Б. Ф. Былов, Матем. сборн., **66 (108),** 2 (1965). [4] Б. Ф. Былов, ДАН, **103,** № 2, 181 (1955). [5] Б. Ф. Былов, Матем. сборн., 48 **(90),** 1, 117 (1959). [6] Б. Ф. Былов, Диссертация, МГУ, 1954. [7] А. Е. Гельман, ДАН, 116, № 4, 535 (1957). [8] А. Е. Гельман, Дифференциальные уравнения, **1,** № 3, 283 (1965). [9] J. C. Lillo, Proc. Am. Math. Soc., **12,** № 3, 400 (1961). [10] Б. М. Левитан, Почти периодические функции, М., 1953. [11] В. М. Миллионщиков, ДАН, 161, № 1 (1965). [12] В. М. Миллионщиков, ДАН, 162, № 2 (1965). [13] В. М. Миллионщиков, ДАН, 166, № 1 (1966).