УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. VI

1. Пусть на полном метрическом пространстве $\mathfrak{B}$, расстояние в котором обозначается через $d_{\mathfrak{B}}(\cdot,\ \cdot)$, задана динамическая система f^t (т. е. непрерывное действие группы $\mathbf{R}$). Фиксируем в пространстве $\mathbf{R}^n$ скалярное произведение $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$.

Рассмотрим непрерывное отображение $A(\cdot):\mathfrak{B}:\mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n)$ удовлетворяющее условию

$$\sup_{x\in\mathfrak{B}}\| A(x)\|<+\infty$$

Множество $\mathfrak{J}$ всех таких отображений $A(\cdot)$ (вместо $A(\cdot)$ пишем также A) наделим структурой метрического пространства, определив расстояние формулой

$$d_{\mathfrak{J}}(A_1,\ A_2)\underset{\mathrm{def}}{=}\sup_{x\in\mathfrak{B}}\| A_1(x)-A_2(x)\|.$$

Так определенное метрическое пространство $(\mathfrak{J},\ d_{\mathfrak{J}})$, как известно, полно.

2. При всяких $A\in\mathfrak{J}$, $x\in\mathfrak{B}$ рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathfrak{x}}=A(f^tx)\mathfrak{x}\quad(\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n).\tag{1}$$

Обозначим через $\lambda_1((A,\ x))\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n((A,\ x))$ *показатели Ляпунова* этой системы. Напомним их определение (см. [1], а также [2, 3]).

Среди всех базисов $\{\mathfrak{x}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{x}_n\}$ векторного пространства $\mathbf{R}^n$ возьмем такой, для которого сумма*)

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{\lim}\frac{1}{t}\ln|\mathfrak{x}(t,\ 0;\ x,\ A)\mathfrak{x}_i|$$

принимает наименьшее значение. Существование таких базисов, названных Ляпуновым *нормальными,* доказано Ляпуновым [1, п. 8]. Изменив, если нужно, нумерацию векторов нормального базиса $\{\mathfrak{x}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{x}_n\}$, чтобы сделать ее такой, что

$$\lambda(A,\ x,\ \mathfrak{x}_1)\geqslant\ldots\geqslant\lambda(A,\ x,\ \mathfrak{x}_n),$$

где

$$\lambda(A,\ x,\ \mathfrak{x})\underset{\mathrm{def}}{=}\begin{cases}\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\dfrac{1}{t}\ln|\mathfrak{X}(t,\ 0;\ x,\ A)\mathfrak{x}|\ \text{ при }\ \mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n_*\underset{\mathrm{def}}{=}\mathbf{R}^n\setminus\{0\},\\ -\infty\ \text{ при }\ \mathfrak{x}=0,\end{cases}\tag{2}$$

полагаем по определению [1, п. 10]

$$\lambda_k((A,\ x))\underset{\mathrm{def}}{=}\lambda(A,\ x,\ \mathfrak{x}_k)\quad(k\in\{1,\ \ldots,\ n\}).\tag{3}$$

3. *Центральный показатель* $\Omega_k((A,\ x))$ системы (1) определяется при всяких $A\in\mathfrak{J}$,

---

*) $\mathfrak{X}(\tau,\ \tau;\ x,\ A)$ — оператор Коши системы $\dot{\mathfrak{x}}=A(f^tx)\mathfrak{x}$ (т. е. отображение, которое значению всякого решения этой системы в точке $t=\theta$ ставит в соответствие значение этого же решения в точке $t=\tau$); $|\mathfrak{h}|\underset{\mathrm{def}}{=}\langle\mathfrak{h},\ \mathfrak{h}\rangle^{\frac{1}{2}}$ для ⩰всякого $\mathfrak{h}\in\mathbf{R}^n$.

$x \in \mathfrak{B}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ формулой (ср. [2], § 8, 13):

$$\Omega_k((A, x)) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(\mathbf{R}^n)} \inf_{\tau \in \mathbf{R}_*^+} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| \mathfrak{X}((j+1)\tau, j\tau; A, x)_{\mathfrak{X}(j\tau, 0; A, x)\mathbf{R}^{n-k+1}} \|, \tag{4}$$

где $\mathfrak{X}(\sigma, \theta; x, A)$ — оператор Коши системы (1), через $\mathfrak{X}_L$ обозначается сужение отображения $\mathfrak{X}$ на множество L. Норма линейного отображения $\mathfrak{X}_{R^i}$ определяется стандартным образом:

$$\| \mathfrak{X}_{R^i} \| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\mathfrak{h} \in \mathbf{R}_*^i} (| \mathfrak{X}\mathfrak{h} | \cdot | \mathfrak{h} |^{-1}),$$

где $| \mathfrak{z} | \underset{\text{def}}{=} \langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z} \rangle^{1/2}$ для всякого $\mathfrak{z} \in \mathbf{R}^n$. Через $G_i(\mathbf{R}^n)$ обозначается множество i-мерных векторных подпространств пространства $\mathbf{R}^n$, через $\mathbf{R}_*^+$ — множество всех положительных вещественных чисел.

Вместо Ω_1 пишут также Ω.

Центральный показатель $\Omega^{(k)}((A, x))$ системы (1) определяется при всяких $A \in \mathfrak{J}$, $x \in \mathfrak{B}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ формулой (ср. [2], § 8, 13):

$$\Omega^{(k)}((A, x)) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\tau \in \mathbf{R}_*^+} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| \mathfrak{X}((j+1)\tau, j\tau; A, x)_{\mathfrak{X}(j\tau, 0; A, x) E_{n-k+1}(A, x)} \|, \tag{4'}$$

где векторное подпространство $E_{n-k+1}(A, x)$ пространства $\mathbf{R}^n$ определено формулой

$$E_{n-k+1}(A, x) \underset{\text{def}}{=} \{\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n : \lambda(A, x, \mathfrak{x}) \leqslant \lambda_k((A, x))\}. \tag{4''}$$

4. П р е д л о ж е н и е. *Для всяких* $A \in \mathfrak{J}$, $x \in \mathfrak{B}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *имеют место неравенства* $\lambda_k((A, x)) \leqslant \Omega_k((A, x)) \leqslant \Omega^{(k)}((A, x))$.

Доказательство этого предложения см. ниже в п. 9.

5. Т е о р е м а[**]. *В пространстве* $\mathfrak{J} \times \mathfrak{B}$ *имеется всюду плотное множество* C *типа* G_δ *Gδ, обладающее свойствами:*

а) при всяких $(A, x) \in C$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *функция* $\Omega_k(\cdot) : \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \to \mathbf{R}$ *полунепрерывна сверху в точке* (A, x);

б) при всяких $(A, x) \in C$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *имеет место равенство* $\lambda_k((A, x)) = \Omega_k((A, x)) = \Omega^{(k)}((A, x))$;

в) при всяких $(A, x) \in C$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *имеет место альтернатива: либо* $\lambda_{n-k}((A, x)) = \lambda_{n-k+1}((A, x))$, *либо подпространство* $L^k(A, x)$ *векторного пространства* $L(A, x)$ *всех решений системы (1), состоящее из решений*[*]*, показатели Ляпунова которых* $\leqslant \lambda_{n-k+1}((A, x))$, *экспоненциально отделено от всякого своего алгебраического дополнения (в векторном пространстве* $L(A, x)$*), т. е. для всякого*

[**] Через $\mathfrak{J} \times \mathfrak{B}$ обозначается произведение $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{B}$ как топологических пространств (топология на $\mathfrak{J}$ индуцирована расстоянием $d_{\mathfrak{J}}(\cdot, \cdot)$, на $\mathfrak{B}$ — расстоянием $d_{\mathfrak{B}}(\cdot, \cdot)$).

[*] Показатель Ляпунова нулевого решения по определению равен $-\infty$.

алгебраического дополнения L^{n-k} *подпространства* $L^k(A,\ x)$ *(в векторном пространстве* $L(A,\ x)$*) существуют вещественные числа* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *такие, что для всяких решений* $\mathfrak{x}(\cdot) \in L^{n-k}$, $\mathfrak{y}(\cdot) \in L^k(A,\ x)$ *для всяких вещественных чисел* $t \geqslant s \geqslant 0$ *имеет место неравенство*

$$|\mathfrak{x}(t)| \cdot |\mathfrak{h}(s)| \geqslant \alpha |\mathfrak{x}(s)| \cdot |\mathfrak{h}(t)| \exp(\beta(t-s)).$$

Доказательство теоремы см. ниже в п. 10.

6. В этом пункте напоминаются построения § 1 [4]. а) Положим

$$E \underset{\text{def}}{=} (\mathfrak{J} \times \mathfrak{B}) \times \mathbf{R}^n,\ B \underset{\text{def}}{=} \mathfrak{J} \times \mathfrak{B},\ p \underset{\text{def}}{=} pr_1, \tag{5}$$

где pr_1 — проекция произведения $(\mathfrak{J} \times \mathfrak{B}) \times \mathbf{R}^n$ на первый сомножитель, т. е. на $\mathfrak{J} \times \mathfrak{B} = B$. Расстояния в B и в E определяются формулами:

$$d_B((A_1,\ x_1),\ (A_2,\ x_2)) \underset{\text{def}}{=} d_{\mathfrak{J}}(A_1,\ A_2) + d_{\mathfrak{B}}(x_1,\ x_2) \tag{5$'$}$$

(для всяких $A_1 \in \mathfrak{J}$, $A_2 \in \mathfrak{J}$, $x_1 \in \mathfrak{B}$, $x_2 \in \mathfrak{B}$),

$$d_E((b_1,\ x_1),\ (b_2,\ x_2)) \underset{\text{def}}{=} d_E(b_1,\ b_2) + |\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2|$$

(для всяких $b_1 \in B$, $b_2 \in B$, $\mathfrak{x}_1 \in \mathbf{R}^n$, $\mathfrak{x}_2 \in \mathbf{R}^n$).

б) Расслоение $(E,\ p,\ B)$, определенное формулой (5), естественным образом наделяется структурой (тривиального) векторного расслоения со слоем $\mathbf{R}^n$ (подробно это объяснено в п. 1 § 1 [4]).

в) На так определенном векторном расслоении $(E,\ p,\ B)$ зададим риманову метрику β, положив для всяких $b \in B$, $\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathfrak{y} \in \mathbf{R}^n$ по определению

$$\beta((b,\ \mathfrak{x}),\ (b,\ \mathfrak{h})) \underset{\text{def}}{=} \langle \mathfrak{x},\ \mathfrak{h} \rangle, \tag{6}$$

где $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$ — скалярное произведение в (евклидова $\mathbf{R}^n$ структура в $\mathbf{R}^n$ была зафиксирована в начале п. 1).

г) При всяком $t \in \mathbf{R}^n$ положим

$$\mathfrak{H}t = (X^t,\ \chi^t), \tag{7}$$

где отображение $X^t : E \to E$ определено формулой

$$X^t(A,\ x,\ \mathfrak{x}) \underset{\text{def}}{=} (A,\ f^t x,\ \mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}) \tag{8}$$

(при всяких $A \in \mathfrak{J}$, $x \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n$), а отображение $\chi^t : B \to B$ определено формулой

$$\chi^t(A,\ x) \underset{\text{def}}{=} (A,\ f^t x) \tag{9}$$

(при всяких $A \in \mathfrak{J}$, $x \in \mathfrak{B}$).

Так как f^t — непрерывное действие группы $\mathbf{R}$ на $\mathfrak{B}$ и при всяких $\theta \in \mathbf{R}$, $\tau \in \mathbf{R}$, $\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n$ отображение $E \to \mathbf{R}^n$, ставящее всякой точке $(A,\ x,\ \mathfrak{x}) \in E$ в соответствие вектор $\mathfrak{X}(\theta,\ \tau;\ A,\ x)\mathfrak{x}$, непрерывно (вследствие теоремы о непрерывкой зависимости решения дифференциального уравнения от начального значения и правой части уравнения), то при всяком $t \in \mathbf{R}$ отображение $X^t : E \to E$, определенное формулой (8), непрерывно. При всяком $t \in \mathbf{R}$ отображение $\chi^t : B \to B$, определенное формулой (9), непрерывно вследствие того, что f^t — непрерывное действие группы $\mathbf{R}$ на $\mathfrak{B}$. Из формул (8), (9) следует, что при всяком $t \in \mathbf{R}$ сужение $X^t[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X^t линейно. Для отображений $X^t : E \to E$, $\chi^t : B \to B$, определенных формулами (8), (9), в п. 1 § 1 [4] доказаны равенства (для всяких $t \in \mathbf{R}$, $s \in \mathbf{R}$):

$$X^{t+s} = X^t X^s,\ \chi^{t+s} = \chi^t \chi^s,\ X^0 = 1_E,\ \chi^0 = 1_B.$$

Таким образом, при всяком $t \in \mathbf{R}$ пара $(X^t,\ \chi^t)$ есть автоморфизм векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ и формула (7) определяет гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$, где через $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{R},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ обозначено множество гомоморфизмов группы $\mathbf{R}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, обозначаемую через $\mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B)$.

д) Определим функцию $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ формулой

$$a((A,\ x)) \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{y \in \mathfrak{B}} \| A(y) \| \tag{10}$$

(для всяких $A \in \mathfrak{J}$, $x \in \mathfrak{B}$). В п. 1 § 1 [4] доказано, что для этой функции и гомоморфизма $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$, определенного формулами (7) — (9), имеют место равенство

$$a(\chi^t b) = a(b) \tag{11}$$

(для всяких $t \in \mathbf{R}$, $b \in B$) и неравенство

$$\max\{\| X^t[b] \|,\ \| X^{-t}[b] \|\} \leqslant \exp(ta(b)) \tag{12}$$

(для всяких $t \in \mathbf{R}^+$, $b \in B$). Норма $\|\cdot\|$ линейного отображения слоя на слой векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ определена стандартным образом через нормы в слоях, индуцированные римановой метрикой $\beta(\cdot,\ \cdot)$ этого векторного расслоения, определенной формулой (6).

Таким образом, гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$, определенный формулами (7) — (9), и функция $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$, определенная формулой (10), удовлетворяют условиям п. 2 введения [5].

е) Для гомоморфизма $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$, определенного формулами (7) — (9), рассмотрим (при всяких $b \in B$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$) показатель Ляпунова (см. в [5] формулу (2) и соглашение об обозначениях перед леммой 2):

$$\lambda_k(\mathfrak{H},\ b) \underset{\mathrm{def}}{=} \min_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b_0))} \max_{\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k+1}} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln | X^t \xi |, \tag{13}$$

где $C_i(p^{-1}(b))$ — множество i-мерных векторных подпространств $p^{-1}(b)$, $|\eta| \underset{\mathrm{def}}{=} (\beta(\eta,\ \eta))^{1/2}$ для всякого $\eta \in E$. В § 1 [5] доказана корректность этого определения (т. е. доказано, что в формуле (13) можно писать $\max$, а не $\sup$ и $\min$, а не $\inf$). Согласно лемме 1 [5],

$$\lambda_k(\mathfrak{H},\ b) = \lambda_k^*(\mathfrak{H},\ b) \tag{14}$$

для всяких $b \in B$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, где $\lambda_k^*(\mathfrak{H},\ b)$ определены следующим образом ([5], определение 2).

Среди всех базисов $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ возьмем такой, для которого сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln | X^t \xi_i |$$

принимает наименьшее значение (существование таких базисов, называемых нормальными, доказано в § 1 [6]); изменив, если нужно, нумерацию векторов $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ нормального базиса, чтобы сделать ее такой, что $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(\mathfrak{H},\ \xi_n)$, где

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \underset{\mathrm{def}}{=} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln | X^t \xi | \tag{15}$$

для всякого $\xi \in p_*^{-1}(b) \underset{\mathrm{def}}{=} p^{-1}(b) \setminus \{0_b\}$ (0_b — нуль векторного пространства $p^{-1}(b)$), положим

$$\lambda_k^*(\mathfrak{H},\ b) \underset{\mathrm{def}}{=} \lambda(\mathfrak{H},\ \xi_k) \quad (k \in \{1,\ \ldots,\ n\}). \tag{16}$$

ж) Рассмотрим семейство автоморфизмов

$$(X(m),\ \chi(m)) \underset{\text{def}}{=} (X^m,\ \chi^m) \quad (m\in\mathbf{N})$$

векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$.

В силу лемм 2, 3 [5] (в которых положим $\tau=1$) при всяких $b\in B$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ показатель Ляпунова этого семейства, определенный в [6], на с. 1408, равен

$$\lambda_k(\mathfrak{H},\ b) \underset{(14)}{=} \lambda_k^*(\mathfrak{H},\ \xi_k)$$

з) Центральный показатель $\Omega_k(\mathfrak{H},\ b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H}\in \operatorname{Hom}(\mathbf{R},\ \operatorname{Aut}(E,\ p,\ B))$ определяется при всяких $b\in B$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ формулой ([7] формула (5)):

$$\Omega_k(\mathfrak{H},\ b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b_1))}\ \inf_{\tau\in\mathbf{R}_*^+}\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}}\|, \tag{17}$$

где X_L^τ — сужение на множество L отображения X^τ, а норма $\|X_L^\tau\|$ для всяких $t\in\mathbf{R}$, $b\in B$ для всякого векторного подпространства L слоя $p^{-1}(b)$ определяется стандартным образом через нормы в слоях, индуцированные римановой метрикой $\beta(\cdot,\ \cdot)$, определенной формулой (8), а именно:

$$\|X_L^\tau\| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\xi\in L_*}(|X^\tau\xi|\cdot|\xi|^{-1}),$$

где $L_*=L\setminus(0_b)$, $|\eta| \underset{\text{def}}{=} (\beta(\eta,\ \eta))^{1/2}$ для всякого $\eta\in E$.

Центральный показатель $\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H}\in \operatorname{Hom}(\mathbf{R},\ \operatorname{Aut}(E,\ p,\ B))$ определяется при всяких $b\in B$, формулой $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ ([7] формула (16)):

$$\Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\ b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\tau\in\mathbf{R}_*^+}\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \frac{1}{m\tau}\sum_{j=0}^{m-1}\ln\|X^\tau_{X^{j\tau}E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)}\|, \tag{17$'$}$$

в которой

$$E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b) \underset{\text{def}}{=} \{\xi\in p^{-1}(b):\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)\leqslant\lambda_k(\mathfrak{H},\ b)\}, \tag{17$''$}$$

где показатель Ляпунова $\lambda(\mathfrak{H},\ \xi)$ при всяком $\xi\in E$ определен формулой:

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\dfrac{1}{t}\ln|X^t\xi| & \text{при } |\xi|\neq 0,\\ -\infty \ \text{ при } |\xi|=0, \end{cases}$$

согласующейся с формулой (15) (в § 1 [5] доказано, что $E_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$ — векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$).

7. Лемма 1. *При всяких* $A\in\mathfrak{J}$, $x\in\mathfrak{B}$, $k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ *имеет место равенство* $\lambda_k((A,\ x))=\lambda_k(\mathfrak{H},\ (A,\ x))$*, левая часть которого определена в п. 2, правая — в п. 6е).*

Доказательство. 1) Пусть даны произвольные $A\in\mathfrak{J}$, $x\in\mathfrak{B}$. Тогда

$$b \underset{\text{def}}{=} (A,\ x)\in\mathfrak{J}\times\mathfrak{B} \underset{(5)}{=} B. \tag{18}$$

2) Всякое $\xi\in p^{-1}(b)$ имеет, согласно формуле (5), вид $\xi\in(b,\ \mathfrak{x})$, где $\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n$; наоборот (также согласно формулам (5)), для всякого $\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n$ имеем $(b,\ \mathfrak{x})\in p^{-1}(b)$.

3) В силу определения структуры векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ (см. [4], § 1, п. 1) отображение $\mathrm{pr}_{2,\,b}$ (сужение на слой $p^{-1}(b)$ проекции pr_2 произведения $B\times\mathbf{R}^n$ на второй сомножитель) есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство $\mathbf{R}^n$.

4) Для всякого $\mathfrak{x}\in\mathbf{R}_*^n$ имеем

$$\lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x}) \underset{(2)}{=} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln|\,\boldsymbol{\mathfrak{X}}(t,\ 0;\ x,\ A)\mathfrak{x}\,| =$$
$$= \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln(\big\langle(\boldsymbol{\mathfrak{X}}(t,\ 0;\ x,\ A)\mathfrak{x},\ \boldsymbol{\mathfrak{X}}(t,\ 0;\ x,\ A)\mathfrak{x})\big\rangle^{\frac{1}{2}}). \tag{19}$$

Для всякого $\xi \in p_*^{-1}(b)$ имеем: $\xi \in (b,\ \mathfrak{r})$, где

$$\mathfrak{r} = \mathrm{pr}_{2,\,b}\xi \in \mathbf{R}_*^n, \tag{20}$$

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \underset{(15)}{=} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln|\,X^t\xi\,| = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln((\beta(X^t\xi,\ X^t\xi)^{1/2}, \tag{21}$$

$$X^t\xi \underset{(20)}{=} X^t(b,\ \mathfrak{x}) \underset{(18)}{=} X^t(A,\ x,\ \mathfrak{x}) \underset{(8)}{=} (A,\ f^t x;\ \boldsymbol{\mathfrak{X}}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}) \tag{22}$$

(допуская распространенную вольность речи, не делаем различия между символом $((A,\ x),\ \mathfrak{r})$ и символом $(A,\ x;\ \mathfrak{x})$),

$$\beta(X^t\xi,\ X^t\xi) \underset{(22)}{=} \beta((A,\ f^t x,\ \boldsymbol{\mathfrak{X}}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}),\ (A,\ f^t x,\ \boldsymbol{\mathfrak{X}}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x})) \underset{(6)}{=}$$
$$\underset{(6)}{=} \big\langle(\boldsymbol{\mathfrak{X}}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x},\ \boldsymbol{\mathfrak{X}}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x})\big\rangle, \tag{23}$$

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \overset{(21)}{\underset{(23)}{=}} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln(\big\langle\boldsymbol{\mathfrak{X}}(t,\ 0;\ x,\ A)\mathfrak{x},\ \boldsymbol{\mathfrak{X}}(t,\ 0;\ x,\ A)\mathfrak{x}\big\rangle^{\frac{1}{2}}) =$$
$$\underset{(19)}{=} \lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x}). \tag{24}$$

5) Вследствие формул (20), (24) изоморфизм $\mathrm{pr}_{2,\,b}$ векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство $\mathbf{R}^n$ (см. п. 3) доказательства) обладает свойством

$$\lambda(A,\ x;\ \mathrm{pr}_{2,\,b}\xi) = \lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \tag{25}$$

для всякого $\xi \in p_*^{-1}(b)$.

Отсюда следует, что если $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ — нормальный базис векторного пространства $p^{-1}(b)$ (см. п. 6е)), то — $\{\mathrm{pr}_{2,\,b}\xi_1,\ \ldots,\ \mathrm{pr}_{2,\,b}\xi_n\}$ нормальный базис векторного пространства $\mathbf{R}^n$ (см. п. 2), причем

$$\lambda(A,\ x;\ \mathrm{pr}_{2,\,b}\xi_k) = \lambda(\mathfrak{H},\ \xi_k) \quad (k \in \{1,\ \ldots,\ n\}). \tag{26}$$

6) Пусть $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ — нормальный базис векторного пространства $p^{-1}(b)$, занумерованный в порядке невозрастания показателей Ляпунова:

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(\mathfrak{H},\ \xi_n). \tag{27}$$

Положив $\mathfrak{r}_k \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{pr}_{2,\,b}\xi_k$ ($k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$), получаем в силу доказанного в п. 5) доказательства, что $\{\mathfrak{r}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{r}_n\}$ — нормальный базис векторного пространства $\mathbf{R}^n$, причем

$$\lambda(A,\ x;\ \mathfrak{r}_k) \underset{(26)}{=} \lambda(\mathfrak{H},\ \xi_k) \ (k \in \{1,\ \ldots,\ n\}). \tag{28}$$

В силу формулы (27) отсюда следует, что $\lambda(A,\ x;\ \mathfrak{r}_1) \geqslant \ldots \geqslant \lambda(A,\ x;\ \mathfrak{r}_n)$. Имеем тогда

$$\lambda_k((A,\ x)) \underset{(3)}{=} \lambda(A,\ x;\ \mathfrak{r}_k) \underset{(28)}{=} \lambda(\mathfrak{H},\ \xi_k) = \lambda_k^*(\mathfrak{H},\ b) \underset{(14)}{=} \lambda_k(\mathfrak{H},\ b) \underset{(18)}{=} \lambda_k(\mathfrak{H},\ (A,\ x))$$
$$(k \in \{1,\ \ldots,\ n\})$$

(третье равенство этой цепочки следует из определения показателей $\lambda_k^*(\mathfrak{H},\ b)$ (см. фразу, содержащую формулу (16)) вследствие того, что $\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\}$ — нормальный базис векторного пространства $p^{-1}(b)$, занумерованный (см. формулу (27)) в порядке невозрастания показателей). Лемма 1 доказана.

8. Лемма 2. *При всяких* $A \in \mathfrak{J}$, $x \in \mathfrak{B}$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ *имеет место равенство* $\Omega_k((A,\ x)) = \Omega_k(\mathfrak{H},\ (A,\ x))$, *левая часть которого определена формулой (4), а правая —*

формулой (17), в которой $\mathfrak{H}$ *— гомоморфизм* $\mathbf{R} \to \operatorname{Aut}(E, p, B)$, *определенный формулами (7) — (9).*

Доказательство. Пусть даны произвольные $A \in \mathfrak{J}$, $x \in \mathfrak{B}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$.

1) Имеем

$$b \underset{\text{def}}{=} (A, x) \in \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \underset{(5)}{=} B. \tag{29}$$

2) Справедливо

$$\Omega_k(\mathfrak{H}, b) \underset{(17)}{=} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \inf_{\tau \in \mathbf{R}_*^+} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| X^\tau_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \|. \tag{30}$$

3) Так как отображение $\mathrm{pr}_{2,\,b}$ (сужение на слой $p^{-1}(b)$ проекции pr_2 произведения $\mathfrak{B} \times \mathbf{R}^n$ на второй сомножитель) есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство $\mathbf{R}^n$ (это следует из определения структуры векторного расслоения для расслоения (E, p, B), см. [4] п. 1 § 1), то всякое $\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b_0))$ имеет вид

$$\mathbf{R}^{n-k+1} = (b, \widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}) \underset{(29)}{=} (A, x, \widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}), \tag{31}$$

где

$$\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1} \underset{\text{def}}{=} \mathrm{pr}_{2,\,b} \mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(\mathbf{R}^n). \tag{32}$$

Поэтому для всяких $\tau \in \mathbf{R}_*^+$, $j \in \tau\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b_0))$ имеем

$$X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1} \underset{(31)}{=} X^{j\tau}(A, x, \widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}) \underset{(8)}{=} (A, f^{j\tau}x, \mathfrak{X}(j\tau, 0; A, x)\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}). \tag{33}$$

Для всяких $\tau \in \mathbf{R}_*^+$, $j \in \tau\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b_0))$ для всякого $\xi \in (X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1})_*$ имеем в силу формулы (33)

$$\xi = (A, f^{j\tau}x, \mathfrak{x}), \ \mathfrak{x} \in \mathfrak{X}(j\tau, 0; A, x)\widehat{\mathbf{R}}_*^{n-k+1}, \tag{34}$$

и наоборот, для всякого $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}(j\tau, 0; A, x)\widehat{\mathbf{R}}_*^{n-k+1}$ имеем

$$\xi \underset{\text{def}}{=} (A, f^{j\tau}x, \mathfrak{x}) \underset{(5)}{\in} (X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1})_* \tag{35}$$

где $\mathbf{R}^{n-k+1} \underset{\text{def}}{=} (A, x, \widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1})$. Для тех же τ, j, $\mathbf{R}^{n-k+1}$ для всякого $\xi \in (X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1})_*$ имеем

$$X^\tau\xi \underset{(34)}{=} X^\tau(A, f^{j\tau}, \mathfrak{x}) \underset{(8)}{=} (A, f^{(j+1)\tau}x, \mathfrak{X}(\tau, 0; x, f^{j\tau})\mathfrak{x}). \tag{36}$$

4) Воспользовавшись тождеством $\mathfrak{X}(\tau, 0; A, f^{j\tau}) = \mathfrak{X}((j+1)\tau, j\tau; A, x)$, являющимся частным случаем известного (и легко доказываемого) тождества $\mathfrak{X}(\tau, 0; A, f^\sigma x) = \mathfrak{X}(\tau + \sigma, \theta + \sigma; A, x)$ ($\tau \in \mathbf{R}$, $\theta \in \mathbf{R}$, $\sigma \in \mathbf{R}$, $A \in \mathfrak{J}$, $x \in \mathfrak{B}$), которому удовлетворяет оператор Коши $\mathfrak{X}(\tau, \theta; x, A)$ системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$, перепишем формулу (36) в виде

$$X^\tau\xi = (A, f^{(j+1)\tau}x, \mathfrak{X}((j+1)\tau, j\tau; A, x)\mathfrak{x}).$$

Из этой формулы для всяких $\tau \in \mathbf{R}_*^+$, $j \in \tau\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b_0))$ для всякого $\xi \in (X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1})_*$ имеем

$$\begin{aligned} \beta(X^\tau\xi, X^\tau\xi) = \beta((A, f^{(j+1)\tau}x, \mathfrak{X}((j+1)\tau, j\tau; A, x)\mathfrak{x}), \\ (A, f^{(j+1)\tau}x, \mathfrak{X}((j+1)\tau, j\tau; A, x)\mathfrak{x}) \overset{(5)}{\underset{(6)}{=}} \\ \overset{(5)}{\underset{(6)}{=}} \langle \mathfrak{X}((j+1)\tau, j\tau; A, x)\mathfrak{x}, \mathfrak{X}((j+1)\tau, j\tau; A, x)\mathfrak{x} \rangle, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\beta(\xi,\ \xi) \underset{(34)}{=} \beta((A,\ f^{j\tau}x,\ \text{æ}),\ (A,\ f^{j\tau}x,\ \text{æ})) \overset{(5)}{\underset{(6)}{=}} \langle \text{æ},\ \text{æ} \rangle, \tag{38}$$

$$\| X^{\tau}_{X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1}} \| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\xi \in (X^{j\tau}\mathbf{R}^{n-k+1})_*} \{(\beta(X^{\tau}\xi,\ X^{\tau}\xi))^{\frac{1}{2}}\ (\beta(\xi,\ \xi))^{-\frac{1}{2}}\} \overset{(34),\ (35)}{\underset{(37),\ (38)}{=}}$$

$$\overset{(34),\ (35)}{\underset{(37),\ (38)}{=}} \sup_{\text{æ} \in (\mathfrak{X}(j\tau,\ 0;\ A,\ x)\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1})_*} \{\langle \mathfrak{X}((j+1)\tau,\ j\tau;\ A,\ x)\text{æ}, \mathfrak{X}((j+ \tag{39}$$

$$+1)\tau,\ j\tau;\ A,\ x)\text{æ}\rangle^{\frac{1}{2}} \langle \text{æ},\ \text{æ}\rangle^{\frac{1}{2}} = \| \mathfrak{X}((j+1)\tau,\ j\tau;\ A,\ x)_{\mathfrak{X}(j\tau,\ 0;\ A,\ x)\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}} \|,$$

где

$$\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1} \underset{(32)}{=} \mathrm{pr}_{2,\ b}\mathbf{R}^{n-k+1}. \tag{40}$$

5) Имеем

$$\Omega_k(\mathfrak{H},\ (A,\ x)) \underset{(29)}{=} \Omega_k(\mathfrak{H},\ b) \overset{(30)}{\underset{(39)}{=}} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \inf_{\tau \in \mathbf{R}^+_*} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| \mathfrak{X}((j+1)\tau,\ j\tau;\ A,\ x)_{\mathfrak{X}(j\tau,\ 0;\ A,\ x)\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}} \| \overset{(31)}{\underset{(32)}{=}}$$

$$\overset{(31)}{\underset{(32)}{=}} \inf_{\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(\mathbf{R}^n)} \inf_{\tau \in \mathbf{R}^+_*} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| \mathfrak{X}((j+1)\tau,\ j\tau;\ A,\ x)_{\mathfrak{X}(j\tau,\ 0;\ A,\ x)\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}} \| \underset{(4)}{=} \Omega_k((A,\ x)).$$

Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. *При всяких* $A \in \mathfrak{J}$, $x \in \mathfrak{B}$, $s \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ *имеет место равенство* $\Omega^{(s)}((A,\ x)) = \Omega^{(s)}(\mathfrak{H},\ (A,\ x))$, *левая часть которого определена формулой* (4′), *а правая — формулой* (17′), *в которой* $\mathfrak{H}$ — *гомоморфизм* $\mathbf{R} \to \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B)$, *определенный формулами (7) — (9).*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть даны произвольные $A \in \mathfrak{J}$, $x \in \mathfrak{B}$, $s \in \{1,\ \ldots,\ n\}$.

1) Имеем

$$b \underset{\text{def}}{=} (A,\ x) \in \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \underset{(5)}{=} B. \tag{41}$$

2) Из леммы 1 и формулы (25), полученной в процессе ее доказательства, следует равенство

$$\mathrm{pr}_{2,\ b}E_{n-s+1}(\mathfrak{H},\ b) = E_{n-s+1}(A,\ x), \tag{42}$$

левая часть которого определена формулой (17″) (гомоморфизм $\mathfrak{H}$ определен формулами (7) — (9)), а правая — формулой (4″); где $(A,\ x) \underset{(41)}{=} b$.

Так как $E_{n-s+1}(\mathfrak{H},\ b)$ — векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$ (см. [5], § 1), т. е. найдется $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ такое, что

$$\mathbf{R}^{n-k+1} \underset{\text{def}}{=} E_{n-s+1}(\mathfrak{H},\ b) \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b)), \tag{43}$$

то при всяких $\tau \in \mathbf{R}^+_*$, $j \in \tau\mathbf{Z}^+$ имеем

$$\| X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-s+1}(\mathfrak{H},\, b)} \| \underset{(43)}{\overset{(39)}{=}} \| \mathfrak{X}((j+1)\tau,\, j\tau;\, A,\, x)_{\mathfrak{X}(j\tau,\, 0;\, A,\, x)\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1}} \|, \tag{44}$$

где

$$\widehat{\mathbf{R}}^{n-k+1} \underset{(40)}{=} \mathrm{pr}_{2,\, b}\mathbf{R}^{n-k+1} \underset{(43)}{=} \mathrm{pr}_2,\; E_{n-s+1}(\mathfrak{H},\, b) \underset{(42)}{=} E_{n-s+1}(A,\, x). \tag{45}$$

С помощью (45) равенство (44) переписывается в виде

$$\| X^{\tau}_{X^{j\tau}E_{n-s+1}(\mathfrak{H},\, b)} \| = \| \mathfrak{X}((j+1)\tau,\, j\tau;\, A,\, x)_{\mathfrak{X}(j\tau,\, 0;\, A,\, x)E_{n-s+1}(A,\, x)} \| \tag{46}$$

(при всяких $\tau \in \mathbf{R}^+_*$, $j \in \tau\mathbf{Z}^+$). Сравнивая формулы (4′) и (17′) (при $k = s$), видим, что одна и та же операция

$$\inf_{\tau\in\mathbf{R}^+_*} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau} \times \sum_{j=0}^{m-1} \ln$$

применена в правой части равенства (17′) к левой части равенства (46), а в правой части равенства (4′) — к правой части равенства (46). Следовательно, левые части формул (4′) и (17′) совпадают (при $k = s$), т. е. $\Omega^{(s)}((A,\, x)) = \Omega^{(s)}(\mathfrak{H},\, b)$. Лемма 3 доказана.

9. Доказательство предложения, сформулированного в п. 4. Это предложение следует из предложений 2, 5 [7] в силу лемм 1 — 3. Предложение доказано.

10. Доказательство теоремы, сформулированной в п. 5.

А. В силу теоремы [8] и леммы 2 в пространстве $B \underset{(5)}{=} \mathfrak{J} \times \mathfrak{B}$ найдется всюду плотное множество $C^{(1)}$ типа G_δ такое, что при всяких $(A,\, x) \in C^{(1)}$, $k \in \{1,\, \ldots,\, n\}$ функция $\Omega_k(\cdot) : \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху в точке $(A,\, x)$.

Б. В силу леммы 2 [4] (см. также сноски, содержащие терминологические пояснения в п. 7 введения [9]) гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R},\, \mathrm{Aut}\,(E,\, p,\, B))$, определенный формулами (7) — (9), является насыщенным. Поэтому в силу теоремы [9] в пространстве $B = \mathfrak{J} \times \mathfrak{B}$ найдется всюду плотное множество $C^{(2)}$ типа G_δ, обладающее свойствами:

а) при всяких $(A,\, x) \in C^{(2)}$, $k \in \{1,\, \ldots,\, n\}$ имеет место равенство $\lambda_k(\mathfrak{H},\, (A,\, x)) = \Omega_k(\mathfrak{H},\, (A,\, x)) = \Omega^{(k)}(\mathfrak{H},\, (A,\, x))$, которое в силу лемм 1 — 3 эквивалентно равенству

$$\lambda_k((A,\, x)) = \Omega_k((A,\, x)) = \Omega^{(k)}((A,\, x)); \tag{47}$$

б) при всяких $(A,\, x) \in C^{(2)}$, $k \in \{1,\, \ldots,\, n-1\}$ имеет место альтернатива:

либо выполнено равенство $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\, (A,\, x)) = \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\, (A,\, x))$, которое в силу леммы 1 эквивалентно равенству

$$\lambda_{n-k}((A,\, x)) = \lambda_{n-k+1}((A,\, x)), \tag{48}$$

либо гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен с индексом k в точке $(A,\, x)$, т. е. (см. п. 8 введения [9]) выполнена следующая совокупность условий:

i) имеет место строгое неравенство $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\, (A,\, x)) > \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\, (A,\, x))$, которое в силу леммы 1 эквивалентно строгому неравенству

$$\lambda_{n-k}((A,\, x)) > \lambda_{n-k+1}((A,\, x)); \tag{49}$$

ii) для всякого алгебраического дополнения

$$\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}((A,\, x)) \ominus \mathbf{R}^k_0(\mathfrak{H},\, (A,\, x)) \tag{50}$$

векторного подпространства $\mathbf{R}^k_0(\mathfrak{H},\, (A,\, x))$ слоя $p^{-1}((A,\, x))$ существуют вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}^k_0(\mathfrak{H},\, (A,\, x))$ для всяких $t \in \mathbf{R}^+$, $s \in \mathbf{R}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t\xi|\cdot|X^s\xi|^{-1} \geqslant \alpha\,|X^t\eta|\cdot|X^s\eta|^{-1} \exp\ (\beta(t-s)). \tag{51}$$

Напомним, что если выполнено строгое неравенство $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},\ b) > \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)$, то через $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ b)$ обозначается

$$E_k(\mathfrak{H},\ b) \underset{\text{def}}{=} \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \leqslant \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ b)\}, \tag{52}$$

где

$$\lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \dfrac{1}{t} \ln|X^t\xi| & \text{при } |\xi| \neq 0, \\ -\infty \ \text{при } |\xi| = 0, \end{cases} \tag{53}$$

что согласуется с формулой (15).

Так как отображение $\mathrm{pr}_{2,\,b}$ (сужение на слой $p^{-1}(b)$ проекции pr_2 произведения $B\times\mathbf{R}^n$ на второй сомножитель) при всяком $b\in B$ есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство $\mathbf{R}^n$ (см. п. 1, § 1 [4]), то формула (50) эквивалентна формуле

$$\mathrm{pr}_{2,\,(A,\,x)}\mathbf{R}^{n-k} = \mathbf{R}^n \ominus \mathrm{pr}_{2,\,(A,\,x)}\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ (A,\ x)). \tag{54}$$

Так как

$$\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ (A,\ x)) \underset{(49)}{=} E_k(\mathfrak{H},\ (A,\ x)) \underset{(52)}{=} \{\xi \in p^{-1}((A,\ x)) : \lambda(\mathfrak{H},\ \xi) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ (A,\ x))\} \overset{(2),\,(53)}{\underset{(25),\,(28')}{=}} \{\xi \in p^{-1}((A,\ x)) : \lambda(A,\ x;\ \mathrm{pr}_{2,\,(A,\,x)}\xi) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_{n-k+1}((A,\ x))\} = (\mathrm{pr}_{2,\,(A,\,x)})^{-1}\{\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n : \lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x}) \leqslant \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},\ (A,\ x))\}$$

(последнее равенство в этой цепочке — опять-таки следствие того, что $\mathrm{pr}_{2,\,(A,\,x)}$ — изоморфизм $p^{-1}((A,\ x))$ на $\mathbf{R}^n$), то формулу (54) можно переписать в виде

$$\mathrm{pr}_{2,\,(A,\,x)}\mathbf{R}^{n-k} = \mathbf{R}^n \ominus \{\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n : \lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x}) \leqslant \lambda_{n-k+1}((A,\ x))\}.$$

Поэтому условие *ii)* можно переписать в виде: для всякого алгебраического дополнения

$$\widehat{\mathbf{R}}^{n-k} = \mathbf{R}^n \ominus \{\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n : \lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x}) \leqslant \lambda_{n-k+1}((A,\ x))\} \tag{55}$$

векторного подпространства $\{\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n : \lambda(A,\ x;\ \mathfrak{x}) \leqslant \lambda_{n-k+1}((A,\ x))\}$ пространства $\mathbf{R}^n$ существуют вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\mathfrak{x} \in \widehat{\mathbf{R}}^{n-k}$, $\mathfrak{y} \in \{\mathfrak{z} \in \mathbf{R}^n : \lambda(A,\ x;\ \mathfrak{z}) \leqslant \lambda_{n-k+1}((A,\ x))\}$ для всяких $t \in \mathbf{R}^+$; $s \in \mathbf{R}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t(A,\ x;\ \mathfrak{x})|\cdot|X^s(A,\ x;\ \mathfrak{x})|^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant \alpha\,|X^t(A,\ x;\ \mathfrak{y})|\cdot|X^s(A,\ x;\ \mathfrak{y})|^{-1} \exp\ (\beta(t-s)),$$

в котором $|\xi| \underset{\text{def}}{=} (\beta(\xi,\ \xi))^{1/2}$ для всякого $\xi \in E$ и которое с помощью формул (8), (6) переписывается в виде

$$|\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}|\cdot|\mathfrak{X}(s,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}|^{-1} \geqslant \alpha\,|\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{h}|\times$$
$$\times|\mathfrak{X}(s,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{h}|^{-1} \exp\ (\beta(t-s)),$$

где $|\mathfrak{z}| \underset{\text{def}}{=} \langle \mathfrak{z},\ \mathfrak{z}\rangle^{1/2}$ для всякого $\mathfrak{z} \in \mathbf{R}^n$. Последнее неравенство при $\mathfrak{x} \neq 0$, $\mathfrak{y} \neq 0$ эквивалентно неравенству

$$\begin{aligned} &|\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}|\cdot|\mathfrak{X}(s,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{y}| \geqslant \\ &\geqslant \alpha\,|\mathfrak{X}(s,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{x}|\cdot|\mathfrak{X}(t,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{y}| \exp\ (\beta(t-s)). \end{aligned} \tag{56}$$

Если $\mathfrak{x} = 0$ или $\mathfrak{y} = 0$, то левая и правая части нестрогого неравенства (56) равны нулю, следовательно, неравенство (56) верно и в том случае, когда $\mathfrak{x} = 0$ или $\mathfrak{y} = 0$.

Рассмотрим следующие множества отображений $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$:

$$L^k(A,\ x) \underset{\text{def}}{=} \{\mathfrak{X}(\cdot,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{z}\}_{\mathfrak{z}\in\{\mathfrak{X}\in\mathbf{R}^n:\lambda(A,\ x;\ \mathfrak{X})\leqslant\lambda_{n-k+1}((A,\ x))\}}, \tag{57}$$

$$L^{n-k} \underset{\text{def}}{=} \{\mathfrak{X}(\cdot,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{z}\}_{\mathfrak{z}\in\widehat{\mathbf{R}}^{n-k}}, \tag{58}$$

$$L(A,\ x) = \{\mathfrak{X}(\cdot,\ 0;\ A,\ x)\mathfrak{z}\}_{\mathfrak{z}\in\mathbf{R}^n}. \tag{59}$$

Так как $\mathfrak{X}(\tau,\ \theta;\ x,\ A)$ по определению — оператор Коши системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$ (см. п. 2), то эти множества суть векторные пространства и из формул (55), (57) — (59) следует: имеет место формула

$$L^{n-k} = L(A,\ x) \ominus L^k(A,\ x),$$

всякое $L(A,\ x) \ominus L^k(A,\ x)$, представимо по формуле (58) через некоторое $\widehat{\mathbf{R}}^{n-k}$, представимое формулой (55), а из формулы (59) следует, что $L(A,\ x)$ — векторное пространство всех решений системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$.

Поэтому из условия *ii)* следует: для всякого алгебраического дополнения L^{n-k} подпространства $L^k(A,\ x)$ (определенного формулой (57)) векторного пространства $L(A,\ x)$ всех решений системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$ существуют вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких решений $\mathfrak{x}(\cdot) \in L^{n-k}$, $\mathfrak{y}(\cdot) \in L^k(A,\ x)$ для всяких $t \in \mathbf{R}^+$, $s \in \mathbf{R}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$|\mathfrak{x}(t)|\ |\mathfrak{y}(s)| \geqslant \alpha |\mathfrak{x}(s)|\ |\mathfrak{y}(t)| \exp(\beta(t-s)). \tag{60}$$

В. Положим $C = C^{(1)} \bigcap C^{(2)}$ (множество $C^{(1)}$ введено в подпункте А, множество $C^{(2)}$ — в начале подпункта Б). Так как $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ — всюду плотные множества типа G_δ в полном метрическом пространстве $(B,\ d_B)$ (полнота метрического пространства $(B,\ d_B)$ (см. формулы (5) (5′)) следует из полноты метрических пространств $(\mathfrak{J},\ d_{\mathfrak{J}})$, $(\mathfrak{B},\ d_{\mathfrak{B}})$), то в силу теоремы Бэра множество $C = C^{(1)} \bigcap C^{(2)}$ есть всюду плотное в B множество типа G_δ.

Имеем: а) при всяких $(A,\ x) \in C = C^{(1)} \bigcap C^{(2)}$, $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$ функция $\Omega_k(\cdot) : \mathfrak{J} \times \mathfrak{B} \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху в точке $(A,\ x)$ (доказано в подпункте А);

б) при всяких $(A,\ x) \in C = C^{(1)} \bigcap C^{(2)}$, $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$ имеет место равенство $\lambda_k((A,\ x)) = \Omega_k((A,\ x)) = \Omega^{(k)}((A,\ x))$ (см. равенство (47));

в) при всяких $(A,\ x) \in C = C^{(1)} \bigcap C^{(2)}$, $k \in \{1,\ \dots,\ n-1\}$ имеет место альтернатива:

либо $\lambda_{n-k}((A,\ x)) = \lambda_{n-k+1}((A,\ x))$ (см. равенство (48)),

либо (см. фразу, содержащую формулу (60)) подпространство $L^k(A,\ x)$ векторного пространства $L(A,\ x)$ всех решений системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$, состоящее из решений, показатели Ляпунова которых $\leqslant \lambda_{n-k+1}((A,\ x))$, обладает следующим свойством:

для всякого алгебраического дополнения L^{n-k} подпространства $L^k(A,\ x)$ (в векторном пространстве $L(A,\ x)$) существуют вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких решений $\mathfrak{x}(\cdot) \in L^{n-k}$, $\mathfrak{y}(\cdot) \in L^k(A,\ x)$ для всяких $t \in \mathbf{R}^+$, $s \in \mathbf{R}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$|\mathfrak{x}(t)|\ |\mathfrak{y}(s)| \geqslant \alpha |\mathfrak{x}(s)|\ |\mathfrak{y}(t)| \exp(\beta(t-s)).$$

Теорема доказана.

Литература

1. Ляпунов А. М. Собр. соч. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1956, т. 2. — 473 с.
2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
3. Изобов Н. А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнении. — В кн.: Итоги науки и техники / Математический анализ. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1974, т. 12, с. 71 — 146.
4. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 8, с. 1394 — 1410.
5. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 12, с. 2132 — 2148.
6. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1408 — 1416.
7. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 8, с. 1344 — 1356.
8. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 9, с. 1503 — 1510.
9. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 5, с. 753 — 779.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
24 февраля 1983 г.