УДК 517.938

Об индексах экспоненциальной разделенности

Миллионщиков В. М.

Предисловие

В предлагаемой вниманию читателя статье изучаются некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений и дифференцируемых отображений, связанные со свойством так называемой экспоненциальной разделенности решений уравнений в вариациях. Свойство экспоненциальной разделенности решений линейных дифференциальных и разностных систем состоит в следующем. Линейная система называется экспоненциально разделенной с индексом k, если в векторном пространстве ее решений имеется k-мерное векторное подпространство L^k — подпространство «медленных решений», элементы которого растут в экспоненциальной шкале медленнее, чем элементы алгебраического дополнения, причем равномерно на каждом отрезке времени; точно это словесное описание выражается неравенством

$$\frac{|x(t)|}{|x(\tau)|} \geqslant \alpha \frac{|y(t)|}{|y(\tau)|} \exp(\beta(t-\tau)),$$

где $y(\cdot)$ — любое ненулевое решение из подпространства L^k, $x(\cdot)$ — любое ненулевое решение из его алгебраического дополнения (в пространстве решений), $t \geqslant \tau \geqslant 0$ — любые, а положительные константы α и β не зависят от $x(\cdot), y(\cdot), t, \tau$.

Возникло свойство экспоненциальной разделенности в работах Перрона по теории показателей Ляпунова. В этих исследованиях было обнаружено, что показатели Ляпунова линейной системы дифференциальных уравнений, вообще говоря, не являются непрерывными функциями от матрицы коэффициентов системы (матрица коэффициентов системы рассматривается при этом как функция времени, причем множество этих функций наделяется топологией равномерной сходимости на полупрямой $t \geqslant 0$). Вопрос о том, какие системы линейных дифференциальных (разностных) уравнений являются точками непрерывности показателей Ляпунова, интересен, в частности, потому, что ответ на него дает возможность узнать, для каких линейных систем экспоненциальная устойчивость нулевого решения сохраняется при малых (равномерно на полупрямой $t \geqslant 0$) возмущениях коэффициентов системы. Правда, для этого достаточно было бы интересоваться линейными системами, являющимися точками непрерывности только старшего показателя Ляпунова, но для изучения не менее интересного, чем устойчивость, свойства условной устойчивости, нужно было изучать не только старший, но и остальные показатели Ляпунова. Решая эти вопросы, Перрон и ввел свое условие (по форме введенное им условие несколько отличалось от сформулированного выше; приведенная выше форма была придана этому определению постепенно в работах разных авторов). Множество линейных систем, обладающих свойством экспоненциальной разделенности в том пространстве линейных систем, о котором шла речь выше (т. е. в пространстве матриц коэффициентов, наделенных топологией равномерной сходимости на полупрямой), как известно, открыто.

Рассматривая линейные системы, возникающие в результате линеаризации нелинейных систем, и изучая их показатели Ляпунова и свойства их решений (в частности, свойство экспоненциальной разделенности решений), исследователи сталкиваются с необходимостью отказаться от рассмотрения топологии равномерной сходимости на полупрямой. Действительно, не только нет никаких оснований ожидать, но и в самом деле чрезвычайно редко бывает, что при малом возмущении задачи Коши коэффициенты системы уравнений в вариациях вдоль этого решения возмутятся мало равномерно на полупрямой $t \geqslant 0$. Неудивительно, что и свойство экспоненциальной разделенности решений системы уравнений в вариациях, вообще говоря, разрушается при некоторых сколь угодно малых возмущениях задачи Коши.

Факт, обнаруженный в предлагаемой вниманию читателя работе, состоит в том, что такое разрушение в некотором смысле (в смысле категорий Бэра) нетипично. Свойство называется типичным, если имеется всюду плотное множество типа G_δ, состоящее из точек, обладающих этим свойством.

Мы закончим это предисловие некоторыми формулировками.

Обозначим через S_d множество диффеоморфизмов f класса C^1 замкнутого дифференцируемого многообразия V^n на себя, наделенное C^1 топологией.

Т е о р е м а 1. *В пространстве $S_d \times V^n$ имеется всюду плотное множество D_d типа G_δ такое, что для всякого $(f, x) \in D_d$ имеет место утверждение: если уравнение в вариациях динамической системы $\{f^t\}_{t\in \mathrm{Z}}$ вдоль траектории точки x экспоненциально разделено с индексом k, то найдется окрестность U точки (f, x) в пространстве $S_d \times V^n$ такая, что для всякой точки $(g, y) \in U$ уравнение в вариациях динамической системы $\{g^t\}_{t\in \mathrm{Z}}$ вдоль траектории точки y тоже экспоненциально разделено с тем же индексом k.*

Обозначим через S_v множество векторных полей класса C^1 на замкнутом дифференцируемом многообразии V^n, наделенное C^1-топологией.

Т е о р е м а 2. *В пространстве $S_v \times V^n$ имеется всюду плотное множество D_v типа G_δ такое, что для всякого $(F, x) \in D_v$ имеет место утверждение: если уравнение в вариациях потока f^t, индуцированного векторным полем F, вдоль траектории точки x экспоненциально разделено с индексом k, то найдется окрестность U точки (F, x) в пространстве $S_v \times V^n$ такая, что для всякой точки $(G, y) \in U$ уравнение в вариациях потока g^t, индуцированного векторным полем G, вдоль траектории точки y тоже экспоненциально разделено с тем же индексом k.*

З а м е ч а н и е. На первый взгляд может показаться, что для того, чтобы можно было говорить об экспоненциальной разделенности, необходимо, чтобы на дифференцируемом многообразии была фиксирована риманова (или хотя бы финслерова) метрика. Однако в рассматриваемом в этом предисловии частном случае, когда дифференцируемое многообразие V^n замкнуто, свойство уравнения в вариациях быть экспоненциально разделенным с индексом k не зависит от выбора римановой метрики на V^n. В основном тексте статьи основное внимание уделено полным римановым многообразиям, не только компактным. Для предисловия мы сознательно выделили частный случай, в котором формулировки заметно упрощаются.

Введение

1. Пусть (E, p, B) — векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$ и базой B (B — полное метрическое пространство, расстояние в котором обозначается через $d_B(\cdot,\cdot)$). На (E, p, B) фиксируем некоторую риманову метрику.

2. Пусть $\mathbf{G}$ есть группа $\mathbf{R}$ или группа $\mathbf{Z}$ и пусть $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}(E, p, B))$, где через $\mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}(E, p, B))$ обозначается множество гомоморфизмов группы $\mathbf{G}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения (E, p, B), обозначаемую через $\mathrm{Aut}(E, p, B)$.

Напомним, что образом $\mathfrak{H}t$ точки $t \in \mathbf{G}$ при гомоморфизме $\mathfrak{H}$ является пара (X^t, χ^t), где X^t — гомеоморфизм E на E, χ^t —гомеоморфизм B на B, причем:

а) $pX^t = \chi^t p$ при всяком $t \in \mathbf{G}$,

б) при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ сужение $X^t[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X^t есть линейное отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$,

в) $X^{t+s} = X^t X^s$, $\chi^{t+s} = \chi^t \chi^s$ при всяких $t \in \mathbf{G}$, $s \in \mathbf{G}$.

Вместо X^1 будем писать X, вместо $\chi^1 - \chi$.

Потребуем от гомоморфизма $\mathfrak{H}$, чтобы для некоторой функции $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$, удовлетворяющей при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ равенству

$$a(\chi^t b) = a(b) \tag{1}$$

при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ выполнялось неравенство

$$\| X^t[b] \| \leqslant \exp(|t|\, a(b)). \tag{2}$$

Так как

$$(X^t[b])^{-1} = X^{-1}[\chi^t b] \quad (b \in B, t \in \mathbf{G}),$$

то наложенное условие перейдет в эквивалентное, если вместо «при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ выполнялось неравенство (2)» написать: «при всяких[1] $b \in B, t \in \mathbf{G}_*^+$ выполнялось неравенство

$$\max\{\| X^t[b] \|, \| (X^t[b])^{-1} \|\} \leqslant \exp(ta(b))». \tag{2'}$$

3) Для всякого[2] $\theta \in \mathbf{G}_*$ определим гомоморфизм

$$\mathfrak{H}_\theta \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Z}, \mathrm{Aut}(E, p, B))$$

формулой

$$\mathfrak{H}_\theta s \in \mathfrak{H}(s\theta) = (X^{s\theta}, \chi^{s\theta}) \quad (s \in \mathbf{Z}). \tag{3}$$

Так как по условию при всяком $t \in \mathbf{G}$ выполнено неравенство

$$\| X^t[b] \| \leqslant \exp(|t|\, a(b)),$$

то при всяком $z \in \mathbf{Z}$ выполнено неравенство

$$\| X^{s\theta}[b] \| \leqslant \exp(|s|\; |\theta| a(b)),$$

т.е. гомоморфизм $\mathfrak{H}_\theta$ удовлетворяет условию п. 2 (см. фразу, содержащую формулы (1), (2)) с функцией $a_\theta(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$ (вместо $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$, определенной формулой $a_\theta(b) = |\theta| a(b)$ $b \in B$.

§1

1. Напомним определение Перрона в форме, удобной для дальнейшего изложения.

Определение. Гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}(E, p, B))$ называется экспоненциально разделенным[3] с индексом $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ в точке $b \in B$, если найдется[4] $\mathbf{R}_0{}^k \in G_k(p^{-1}(b))$ такое, что для всякого алгебраического дополнения $\mathbf{R}_0{}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0{}^k$

---

[1] $\mathbf{G}_*{}^+ = \mathbf{R}_*{}^+$, если $\mathbf{G} = \mathbf{R}; \mathbf{G}_*{}^+ = \mathbf{N}$, если $\mathbf{G} = \mathbf{Z}; \mathbf{R}_*{}^+(\mathbf{N})$ − множество всех вещественных (целых) чисел >0.

[2] $\mathbf{G}_* = \mathbf{G} \backslash \{0\}$.

[3] Подробнее: экспоненциально разделенным на $\mathbf{G}^+$. Через $\mathbf{G}^+$ обозначается множество всех неотрицательных элементов группы $\mathbf{G}$.

[4] Через $\mathbf{G}_h(p^{-1}(b))$ обозначается грассманово многообразие k-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$

векторного подпространства ${\bf R}_0{}^k$ слоя $p^{-1}(b)$ существуют $\alpha\in{\bf R}_*{}^+$, $\beta\in{\bf R}_*{}^+$ такие, что для всяких[5] $\xi\in{\bf R}_*{}^{n-k}$, $\eta\in{\bf R}_{0*}{}^k$ для всяких $t\in{\bf G}^+$, $s\in{\bf G}^+$ таких, что $t\geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t\xi|\ |X^s\xi|^{-1}\geqslant\alpha\,|X^t\eta|\ |X^s\eta|^{-1}\exp(\beta(t-s)). \qquad (1)$$

Для всякого $k\in\{1,...,n-1\}$ обозначим через $S^{(k)}$ множество тех $b\in B$, для которых гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен с индексом k в точке b.

2. Теорема. *В пространстве B имеется всюду плотное множество D типа* G_δ *такое, что* $S^{(k)}\bigcap D\subset \operatorname{Int} S^{(k)'}$ *при всяком* $k\in\{1,...,n-1\}$.

Сформулированная теорема означает, что свойство точки множества $S^{(k)}$ быть внутренней точкой этого множества является типичным (для всякого $k\in\{1,...,n-1\}$). Доказательству теоремы предпошлем некоторый вспомогательный материал.

§2

1. Показатель Ляпунова $\lambda_k(\mathfrak{H},b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H}\in\operatorname{Hom}({\bf G},\operatorname{Aut}(E,p,B))$ определяется при всяких $b\in B$, $k\in\{1,...,n-1\}$ формулой

$$\lambda_k(\mathfrak{H},b)\underset{\text{def}}{=}\inf_{{\bf R}^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))}\ \sup_{\xi\in{\bf R}_*^{n-k+1}}\lambda(\mathfrak{H},\xi); \qquad (1)$$

здесь: $G_i(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие i-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$, через ${\bf R}_*{}^i$ обозначается множество всех ненулевых векторов векторного пространства ${\bf R}^i$, $|\cdot|$ — норма, индуцированная фиксированной выше римановой метрикой векторного расслоения (E,p,B),

$$\lambda(\mathfrak{H},\xi)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X^t\xi|\,(\ln 0=-\infty). \qquad (2)$$

В [1] доказано, что $|\lambda_k(\mathfrak{H},b)|\leqslant a(b)$ при всяких $b\in B$, $k\in\{1,...,n-1\}$.

Введем следующее обозначение. Если для некоторого $b\in B$ и некоторого $k\in\{1,...,n-1\}$ выполнено строгое неравенство $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},b)>\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},b)$, то положим

$${\bf R}_0^k(\mathfrak{H},b)\underset{\text{def}}{=}\{\xi\in p^{-1}(b):\lambda(\mathfrak{H},\xi)\leqslant\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},b)\}. \qquad (3)$$

В силу предложения 8 [1] из условия $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},b)>\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},b)\}$ следует равенство $\dim{\bf R}_0^k(\mathfrak{H},b)=k$.

Напомним определение Перрона в форме, приведенной в [1, с. 2143, определение 3].

Определение 1. Гомоморфизм $\mathfrak{H}\in\operatorname{Hom}({\bf G},\operatorname{Aut}(E,p,B))$ называется экспоненциально разделенным с индексом $k\in\{1,...,n-1\}$ в точке $b\in B$, если выполнена следующая совокупность условий:

i) имеет место строгое неравенство

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},b)>\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},b)\};$$

ii) для всякого алгебраического дополнения ${\bf R}^{n-k}=p^{-1}(b)\ominus{\bf R}_0^k(\mathfrak{H},b)$ векторного подпространства ${\bf R}_0^k(\mathfrak{H},b)$ слоя $p^{-1}(b)$ существуют вещественные числа $\alpha>0$, $\beta>0$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\xi\in{\bf R}^{n-k}$, $\eta\in{\bf R}_0^k(\mathfrak{H},b)$ для всяких $t\in{\bf G}^+$, $s\in{\bf G}^+$ таких, что $t\geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t\xi|\ |X^s\xi|^{-1}\geqslant\alpha\,|X^t\eta|\ |X^s\eta|^{-1}\exp(\beta(t-s)).$$

Лемма 1. *Определение* § 1 *эквивалентно определению* 1 § 2.

---

[5] Звездочка справа внизу означает выбрасывание нуля.

Доказательство. 1. Пусть выполнены условия i), ii) определения 1 § 2. Так как из условия i) следует равенство $\dim \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},b)=k$ (см. предложение 8 [1]), то $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},b)\in G_k(p^{-1}(b))$. Из условия ii) определения 1 § 2 следует поэтому, что подпространство $\mathbf{R}_0^k \underset{\text{def}}{=} \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},b)$ удовлетворяет условию определения § 1.

2. Пусть выполнено условие определения § 1, т. е. существует $\mathbf{R}_0^k\in G_k(p^{-1}(b))$ такое, что для всякого $\mathbf{R}^{n-k}=p^{-1}(b)\ominus\mathbf{R}_0^k$ существуют $\alpha\in\mathbf{R}_*{}^+$, $\beta\in\mathbf{R}_*{}^+$ такие, что для всяких $\xi\in\mathbf{R}_*{}^{n-k}$, $\eta\in\mathbf{R}_{0*}^k$ для всяких $t\in\mathbf{G}^+$, $s\in\mathbf{G}^+$ таких, что $t\geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t\xi|\ |X^s\xi|^{-1}\geqslant\alpha\,|X^t\eta|\ |X^s\eta|^{-1}\exp(\beta(t-s)). \tag{4}$$

а) Положив в (4) $s=0$, получаем, что для всяких $t\in\mathbf{G}^+$, $\xi\in\mathbf{R}_*^{n-k}$, $\eta\in\mathbf{R}_{0*}^k$ выполнено неравенство

$$|X^t\xi|\ |\xi|^{-1}\geqslant\alpha\,|X^t\eta|\ |\eta|^{-1}\exp(\beta t).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$|X^t\xi|\geqslant\gamma\,|X^t\eta|\exp(\beta t).$$

Где $\gamma=\gamma(\xi,\eta)=\alpha\,|\xi|\ |\eta|^{-1}$ не зависит от $t\in\mathbf{G}^+$.

б) Для всяких $\xi\in\mathbf{R}_*^{n-k}$, $\eta\in\mathbf{R}_{0*}^k$ из последнего неравенства следует:

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X^t\xi|\geqslant\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln(\gamma\,|X_\eta^t|\exp(\beta t))=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{t}(\ln\gamma+\ln(|X_\eta^t|+\beta t)=$$

$$=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left(\frac{1}{t}\ln(|X_\eta^t|+\beta+\frac{1}{t}\ln\gamma\right)=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln|X_\eta^t|+\beta\,.$$

Пользуясь обозначением (2) (при $|\eta|=0$ имеем $\lambda(\mathfrak{H},\eta)+\beta=-\infty$, перепишем доказанное в следующем виде: для всяких $\xi\in\mathbf{R}_*^{n-k}$, $\eta\in\mathbf{R}_0^k$ имеет место неравенство

$$\lambda(\mathfrak{H},\xi)\geqslant\lambda(\mathfrak{H},\eta)+\beta\,. \tag{5}$$

в) Так как $p^{-1}(b)=\mathbf{R}^{n-k}\oplus\mathbf{R}_0^k$, то всякий вектор $\xi\in p^{-1}(b)$ можно представить в виде

$$\zeta=\xi+\eta\,,\ \ \xi\in\mathbf{R}^{n-k}.$$

Если $\zeta\in p^{-1}(b)\setminus\mathbf{R}_0{}^k$, то вектор ξ отличен от нуля, следовательно, $\xi\in\mathbf{R}_*{}^{n-k}$. Поэтому из результата подпункта б) следует: для всякого $\xi\in p^{-1}(b)\setminus\mathbf{R}_0{}^k$ $\xi\epsilon$ имеет место равенство $\zeta=\xi+\eta$, где векторы ξ, η удовлетворяют неравенству (5). Так как $\beta\in\mathbf{R}_*^+$, то из неравенства (5) следует равенство $\lambda(\mathfrak{H},\zeta)=\lambda(\mathfrak{H},\xi)$ (при $|\eta|\neq0$ это следует в силу предложения 4 [1] (см. замечание об обозначениях на с. 2140 в [1]), а при $|\eta|=0$ в силу равенства $\zeta=\xi$). Итак, доказано следующее. Для всякого $\xi\in p^{-1}(b)\setminus\mathbf{R}_0{}^k$ имеет место равенство $\lambda(\mathfrak{H},\zeta)=\lambda(\mathfrak{H},\xi)$, где $\xi\in\mathbf{R}_*{}^{n-k}$ таково, что $\zeta-\xi\in\mathbf{R}_0^k$.

г) Из результатов подпунктов в) и б) вытекает, что для всяких $\eta\in\mathbf{R}_0^k$, $\zeta\in p^{-1}(b)\setminus\mathbf{R}_0{}^k$ имеет место равенство

$$\lambda(\mathfrak{H},\zeta)\geqslant\lambda(\mathfrak{H},\eta)+\beta\,.$$

Следовательно, для всякого $\zeta\in p^{-1}(b)\setminus\mathbf{R}_0{}^k$ выполнено неравенство

$$\lambda(\mathfrak{H},\zeta)\geqslant\sup_{\eta\in\mathbf{R}_0{}^k}\lambda(\mathfrak{H},\eta)+\beta \tag{6}$$

д) Для всякого $\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))$, отличного от $\mathbf{R}_0^k$, найдется $\zeta\in\mathbf{R}_*^k$ такое, что $\zeta\notin\mathbf{R}_0^k$. Поэтому из результата подпункта г) вытекает (так как $\beta>0$) следующее утверждение. Для всякого $\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))$ такого, что $\mathbf{R}^k\neq\mathbf{R}_0^k$, имеет место неравенство

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}_*{}^k}\lambda(\mathfrak{H},\xi)>\sup_{\eta\in\mathbf{R}_0{}^k}\lambda(\mathfrak{H},\eta)\,.$$

е) Для всякого $\mathbf{R}^{k+1} \in G_{k+1}(p^{-1}(b))$ найдется $\zeta \in \mathbf{R}_*^{k+1}$ такое, что $\zeta \notin \mathbf{R}_0^k$. Поэтому из результата подпункта г) вытекает следующее. Для всякого $\mathbf{R}^{k+1} \in G_{k+1}(p^{-1}(b))$ имеет место неравенство

$$\sup_{\xi \in \mathbf{R}_*^{k+1}} \lambda(\mathfrak{H},\xi) \geqslant \sup_{\eta \in \mathbf{R}_0^k} \lambda(\mathfrak{H},\eta) + \beta.$$

ж) Заменив в формуле (1) k на $n-k+1$, получаем равенство

$$\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},b) = \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))} \sup_{\xi \in \mathbf{R}_*^k} \lambda(\mathfrak{H},\xi).$$

В силу результата подпункта д) из этого равенства следует равенство

$$\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},b) = \sup_{\xi \in \mathbf{R}_{0*}^k} \lambda(\mathfrak{H},\xi) \tag{7}$$

Напомним, что[6] $\lambda(\mathfrak{H},0_b) = -\infty$ и поэтому

$$\sup_{\xi \in \mathbf{R}_0^k} \lambda(\mathfrak{H},\xi) = \sup_{\xi \in \mathbf{R}_{0*}^k} \lambda(\mathfrak{H},\xi). \tag{8}$$

з) Заменив в формуле (1) k на $n-k$, получаем равенство

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},b) = \inf_{\mathbf{R}^{k+1} \in G_{k+1}(p^{-1}(b))} \sup_{\xi \in \mathbf{R}_*^{k+1}} \lambda(\mathfrak{H},\xi).$$

Из этой формулы в силу результата подпункта е) следует неравенство

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},b) \geqslant \sup_{\eta \in \mathbf{R}_{0*}^k} \lambda(\mathfrak{H},\eta) + \beta > \sup_{\eta \in \mathbf{R}_{0*}^k} \lambda(\mathfrak{H},\eta),$$

которое с помощью формулы (7) переписывается в виде строгого неравенства

$$\lambda_{n-k}(\mathfrak{H},b) > \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},b). \tag{9}$$

Таким образом, доказано, что условие i) определения 1 § 2 выполнено.

и) Из доказанных выше формул (7), (8) следует включение

$$\mathbf{R}_0^k \subset \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H},\xi) \leqslant \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},b)\}. \tag{10}$$

В силу результата подпункта г) для всякого $\zeta \in p^{-1}(b) \setminus \mathbf{R}_0^k$ имеет место неравенство (6), которое с помощью формул (8), (7) переписывается в виде

$$\lambda(\mathfrak{H},\zeta) \geqslant \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},b) + \beta > \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},b).$$

Отсюда следует включение

$$\{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H},\xi) \leqslant \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},b)\} \subset \mathbf{R}_0^k.$$

Соединив это включение с доказанным выше включением (10), получаем равенство

$$\mathbf{R}_0^k = \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H},\xi) \leqslant \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H},b)\}. \tag{11}$$

Из доказанных формул (9), (11) и формулы (3) следует равенство

$$\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},b) = \mathbf{R}_0^k.$$

Вследствие этого равенства условие ii) определения 1 § 2 совпадает с условием определения § 1 и, следовательно, условие ii) определения 1 § 2 выполнено. Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Определение, получаемое из определения* § 1 *заменой слова «всякого» словом «некоторого», эквивалентно определению, получаемому из определения* 1 § 2 *заменой слова «всякого» словом «некоторого».*

Д о к а з а т е л ь с т в о получается из доказательства леммы 1 заменой слова «всякого» (в первой фразе п. 2 цитируемого доказательства) словом «некоторого». Лемма 2 доказана.

О п р е д е л е н и е 2. Гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}(E,p,B))$ называется экспоненциально разделенным с индексом $k \in \{1,\dots,n-1\}$ в точке $b \in B$, если найдется $\mathbf{R}_0^k \in G_k(p^{-1}(b))$ такое, что для некоторого алгебраического дополнения

[6] Через 0_b обозначается нуль векторного пространства $p^{-1}(b)$.

$\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0{}^k$ векторного подпространства $\mathbf{R}_0{}^k$ слоя $p^{-1}(b)$ существуют $\alpha \in \mathbf{R}_*{}^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*{}^+$ такие, что для всяких $\xi \in \mathbf{R}_*{}^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_{0*}^k$ для всяких $t \in \mathbf{Z}^+$, $s \in \mathbf{Z}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t\xi|\ |X^s\xi|^{-1} \geqslant \alpha\, |X^t\eta|\ |X^s\eta|^{-1} \exp(\beta(t-s)).$$

Это определение отличается от определения § 1 тем, что вместо «всякого» алгебраического дополнения здесь написано «некоторого» и вместо «всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ ...» здесь написано «всяких $t \in \mathbf{Z}^+$, $s \in \mathbf{Z}^+$ ...».

Лемма 3. *Определение* § 1 *эквивалентно определению* 2 § 2.

Доказательство. В силу доказанной выше леммы 1 определение § 1 эквивалентно определению 1 § 2.

В силу леммы 6 [1] экспоненциальная разделенность гомоморфизма $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}(E,p,B))$ с индексом k в точке b (понимаемая в смысле определения 1 § 2) эквивалентна экспоненциальной разделенности гомоморфизма $\mathfrak{H}_1 \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, \mathrm{Aut}(E,p,B))$ с индексом k в точке b (понимаемой в том же смысле).

Понимаемая в этом смысле (т. е. в смысле определения 1 § 2) экспоненциальная разделенность гомоморфизма $\mathfrak{H}_1 \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, \mathrm{Aut}(E,p,B))$ с индексом k в точке b в силу леммы 7 [1] эквивалентна следующей совокупности условий (это — условия i), ii) определения 4 [1], примененного к гомоморфизму $\mathfrak{H}_1 \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, \mathrm{Aut}(E,p,B))$ вместо гомоморфизма $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}(E,p,B))$):

l.i) имеет место строгое неравенство $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H}_1, b) > \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H}_1, b)$;

l.ii) для некоторого алгебраического дополнения $\mathbf{R}_0{}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0{}^k(\mathfrak{H}_1, b)$ векторного подпространства $\mathbf{R}_0{}^k(\mathfrak{H}_1, b)$ слоя $p^{-1}(b)$ существуют вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\xi \in \mathbf{R}_0{}^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_0{}^k(\mathfrak{H}_1, b)$ для всяких $t \in \mathbf{Z}^+$, $s \in \mathbf{Z}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t\xi|\ |X^s\xi|^{-1} \geqslant \alpha\, |X^t\eta|\ |X^s\eta|^{-1} \exp(\beta(t-s)).$$

Применив теперь лемму 2, доказанную в этом параграфе, к гомоморфизму $\mathfrak{H}_1 \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, \mathrm{Aut}(E,p,B))$ вместо гомоморфизма $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}(E,p,B))$, получаем: совокупность условий l.i), l.ii) эквивалентна следующему условию: найдется $\mathbf{R}_0{}^k \in G_k(p^{-1}(b))$ такое, что для некоторого алгебраического дополнения $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}_0{}^k$ векторного подпространства $\mathbf{R}_0{}^k$ слоя $p^{-1}(b)$ существуют $\alpha \in \mathbf{R}_*{}^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*{}^+$ такие, что для всяких $\xi \in \mathbf{R}_*{}^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_{0*}^k$, для всяких $t \in \mathbf{Z}^+$, $s \in \mathbf{Z}^+$ таких, что $t \geqslant s$ имеет место неравенство

$$|X^t\xi|\ |X^s\xi|^{-1} \geqslant \alpha\, |X^t\eta|\ |X^s\eta|^{-1} \exp(\beta(t-s)).$$

Это и есть условие определения 2 § 2. Лемма 3 доказана.

Предложение. *Для того чтобы гомоморфизм* $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}(E,p,B))$ *был экспоненциально разделенным с индексом* $k \in \{1,\dots,n-1\}$ *в точке* $b \in B$, *необходимо и достаточно, чтобы нашлось* $\mathbf{R}_0{}^k \in G_k(p^{-1}(b))$ *такое, что*

$$\varlimsup_{\substack{t-s\to+\infty \\ (t\in Z^+,\, s\in Z^+)}} \frac{1}{t-s} \ln\{\| X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}_0^k} \|\, \| X^{s-t}_{X^t\mathbf{R}_0^{n-k}} \|\} < 0, \tag{12}$$

где $\mathbf{R}_0{}^{n-k}$ *— ортогональное дополнение векторного подпространства* $\mathbf{R}_0{}^i$ *слоя* $p^{-1}(b)$

Доказательство. 1. При всяких $t\in\mathbf{G}$, $s\in\mathbf{G}$, $\mathbf{R}_0{}^k\in G_k(p^{-1}(b))$, $\mathbf{R}^{n-k}\in G_{n-k}(p^{-1}(b))$ имеют место формулы

$$\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}_0^k}\|=\sup_{\eta\in\mathbf{R}_{0*}^k}\{|X^t\eta||X^s\eta|^{-1}\},\tag{13}$$

$$\|X^{s-t}_{X^t\mathbf{R}^{n-k}}\|=\sup_{\xi\in\mathbf{R}_*^{n-k}}\{|X^s\xi||X^t\xi|^{-1}\}.\tag{14}$$

При написании формул (13), (14) использованы, кроме стандартного определения нормы линейного оператора, свойства б), в) п. 2 введения и вытекающая из этих свойств невырожденность линейных операторов $X^r[b]$ $(r\in\mathbf{G})$.

2. Пусть гомоморфизм $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}(\mathbf{G},\mathrm{Aut}(E,p,B))$ экспоненциально разделен с некоторым индексом $k\in\{1,...,n-1\}$ в некоторой точке $b\in B$. Тогда (согласно определению § 1 (напомним, что $\mathbf{Z}^+\subset\mathbf{G}^+$)) найдется $\mathbf{R}_0{}^k\in G_k(p^{-1}(b))$ такое, что для ортогонального дополнения $\mathbf{R}_0{}^{n-k}$ векторного подпространства $\mathbf{R}_0{}^k$ слоя $p^{-1}(b)$ существуют $\alpha\in\mathbf{R}_*{}^+$, $\beta\in\mathbf{R}_*{}^+$ такие, что для всяких $\xi\in\mathbf{R}_{0*}{}^{n-k}$, $\eta\in\mathbf{R}_{0*}^k$, для всяких $t\in\mathbf{Z}^+$, $s\in\mathbf{Z}^+$ таких, что $t\geqslant s$, имеет место неравенство

$$|X^t\xi|\;|X^s\xi|^{-1}\geqslant\alpha|X^t\eta|\;|X^s\eta|^{-1}\exp(\beta(t-s)).\tag{15}$$

Отсюда вследствие формул (13), (14) вытекает: для всяких $t\in\mathbf{Z}^+$, $s\in\mathbf{Z}^+$ таких, что $t\geqslant s$, выполнено неравенство

$$\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}_0^k}\|\,\|X^{s-t}_{X^t\mathbf{R}_0^{n-k}}\|\leqslant\alpha^{-1}\exp(-\beta(t-s)).$$

Отсюда следует неравенство

$$\overline{\lim_{\substack{t-s\to+\infty\\(t\in Z^+,s\in Z^+)}}}\frac{1}{t-s}\ln\{\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}_0^k}\|\,\|X^{s-t}_{X^t\mathbf{R}_0^{n-k}}\|\}\leqslant-\beta<0,$$

из которого следует неравенство (12).

3. Пусть гомоморфизм $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}(\mathbf{G},\mathrm{Aut}(E,p,B))$ таков, что для некоторого индекса $k\in\{1,...,n-1\}$ и некоторой точки $b\in B$ найдется $\mathbf{R}_0{}^k\in G_k(p^{-1}(b))$, удовлетворяющее неравенству

$$\gamma\underset{\mathrm{def}}{=}\overline{\lim_{\substack{t-s\to+\infty\\(t\in Z^+,s\in Z^+)}}}\frac{1}{t-s}\ln\{\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}_0^k}\|\,\|X^{s-t}_{X^t\mathbf{R}_0^{n-k}}\|\}<0,$$

где $\mathbf{R}_0{}^{n-k}$ — ортогональное дополнение векторного подпространства $\mathbf{R}_0{}^k$ слоя $p^{-1}(b)$. Отсюда следует, что для некоторого $\beta\in\mathbf{R}_*{}^+$ (в качестве такого β годится любое число из интервала $(0,-\gamma)$) найдется $m\in\mathbf{Z}^+$ такое, что для всяких $t\in\mathbf{Z}^+$, $s\in\mathbf{Z}^+$ таких, что $t-s>m$, имеет место неравенство

$$\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}_0^k}\|\,\|X^{s-t}_{X^t\mathbf{R}_0^{n-k}}\|<\exp(-\beta(t-s)).\tag{16}$$

Для всяких $t\in\mathbf{G}$, $s\in\mathbf{G}$ имеют место формулы

$$\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}_0^k}\|\leqslant\|X^{t-s}[\chi^s b]\leqslant\exp(|t-s|\,a(b)),\tag{17}$$

$$\|X^{s-t}_{X^t\mathbf{R}_0^{n-k}}\|\leqslant\|X^{s-t}[\chi^t b]\leqslant\exp(|t-s|\,a(b));\tag{18}$$

первое неравенство в каждой из этих двух цепочек — следствие того, что операторы $X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}_0^k}$, $X^{s-t}_{X^t\mathbf{R}_0^{n-k}}$ суть сужения операторов $X^{t-s}[\chi^s b], X^{s-t}[\chi^t b]$ соответственно; последнее неравенство в каждой из этих двух цепочек — следствие условия, наложенного на гомоморфизм $\mathfrak{H}$ в п. 2 введения (см. во введении фразу содержащую формулы (1), (2)).

При всяких $t\in\mathbf{Z}^+$, $s\in\mathbf{Z}^+$ таких, что $0\leqslant t-s\leqslant m$, из формул (17), (18) следует:

$$\| X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}_0^k} \| \| X^{s-t}_{X^t\mathbf{R}_0^{n-k}} \| \leqslant \exp(2ma(b)) \leqslant \exp(2ma(b)+\beta m)\exp(-\beta(t-s)) . \tag{19}$$

Из фраз, содержащих формулы (16), (19), следует, что для всяких $t\in\mathbf{Z}^+$, $s\in\mathbf{Z}^+$ таких, что $t\geqslant s$, имеет место неравенство

$$\| X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}_0^k} \| \| X^{s-t}_{X^t\mathbf{R}_0^{n-k}} \| \leqslant \alpha^{-1}\exp(-\beta(t-s)), \tag{20}$$

где $\alpha \underset{\text{def}}{=} \exp(-(2ma(b)+\beta m))$.

Из неравенства (20) вследствие формул (13), (14) вытекает, что для всяких $\xi\in\mathbf{R}_{0*}^{\;n-k}$, $\eta\in\mathbf{R}_{0*}^k$ выполнено неравенство

$$| X^t\eta | \; | X^s\eta |^{-1} \, | X^s\xi | \; | X^t\xi |^{-1} \leqslant \alpha^{-1}\exp(\beta(t-s)),$$

эквивалентное неравенству

$$| X^t\xi | \; | X^s\xi |^{-1} \geqslant \alpha \, | X^t\eta | \; | X^s\eta |^{-1}\exp(\beta(t-s)). \tag{21}$$

Таким образом, доказано, что для ортогонального дополнения $\mathbf{R}_0^{\;n-k}$ векторного подпространства $\mathbf{R}_0^{\;k}\in G_k(p^{-1}(b))$ слоя $p^{-1}(b)$ найдутся $\alpha\in\mathbf{R}_*^{\;+}$, $\beta\in\mathbf{R}_*^{\;+}$ такие, что для всяких $\xi\in\mathbf{R}_{0*}^{\;n-k}$, $\eta\in\mathbf{R}_{0*}^k$, для всяких $t\in\mathbf{Z}^+$, $s\in\mathbf{Z}^+$ таких, что $t\geqslant s$, имеет место неравенство (21). В силу определения 2 § 2 это означает, что гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен с индексом k в точке b. Напомним, что согласно лемме 3 определение 2 § 2 эквивалентно определению § 1. Предложение доказано.

§3

В этом параграфе вводится объект, давший название этой статье.

О п р е д е л е н и е. Индекс экспоненциальной разделенности гомоморфизма $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}(\mathbf{G},\mathrm{Aut}(E,p,B))$ при всяких $k\in\{1,\dots,n-1\}$, $b\in B$ определяется формулой[7]

$$\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},b) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))} \overline{\lim_{\substack{t-s\to+\infty\\(t\in Z^+,\,s\in Z^+)}}} \frac{1}{t-s}\ln\{\| X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}^k} \| \| X^{s-t}_{X^t((\mathbf{R}^k)\perp)} \|\}.$$

Роль индекса экспоненциальной разделенности выявляется в процессе дальнейшего изложения. Первым шагом в этом выявлении служит доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а. *Для всяких* $k\in\{1,\dots,n-1\}$, $b\in B$ *имеет место следующее утверждение. Для того чтобы гомоморфизм* $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}(\mathbf{G},\mathrm{Aut}(E,p,B))$ *был экспоненциально разделенным с индексом* $k\in\{1,\dots,n-1\}$ *в точке* $b\in B$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* $\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},b)<0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны $k\in\{1,\dots,n-1\}$, $b\in B$. Из определения индекса $\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},b)$ следует, что неравенство $\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},b)<0$ эквивалентно существованию такого $\mathbf{R}_0^{\;k}\in G_k(p^{-1}(b))$, для которого

$$\overline{\lim_{\substack{t-s\to+\infty\\(t\in Z^+,\,s\in Z^+)}}} \frac{1}{t-s}\ln\{\| X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}_0^k} \| \| X^{s-t}_{X^t((\mathbf{R}_0^k)\perp)} \|\}<0.$$

В силу предложения § 2 это эквивалентно экспоненциальной разделенности гомоморфизма $\mathfrak{H}$ с индексом k в точке b. Теорема доказана.

---

[7] Через $(\mathbf{R}^k)\perp$ обозначается ортогональное дополнение векторного подпространства $\mathbf{R}^k$ в слое векторного расслоения (E,p,B).

§4

Пусть заданы компактное топологическое пространство F и неотрицательное вещественное число a. Пусть $a_{i,j}(\cdot): F \to [-a, a]$ $(i \in \mathbf{Z}^+,\ j \in i + \mathbf{N})$ — непрерывные функции.

Л е м м а 1. *При всяком $m \in \mathbf{N}$ последовательность*

$$\{\inf_{x\in F} \max_{i\in\{0,\ldots,q\}} \max_{j\in\{i,\ldots,q\}} a_{i,m+j}(x)\}_{q\in\mathbf{N}} \tag{1}$$

— монотонно неубывающая, все ее точки принадлежат отрезку $[-a, a]$ и для всякого $q \in \mathbf{N}$ имеет место равенство

$$\inf_{x\in F} \max_{i\in\{0,\ldots,q\}} \max_{j\in\{i,\ldots,q\}} a_{i,m+j}(x) = \min_{x\in F} \max_{i\in\{0,\ldots,q\}} \max_{j\in\{i,\ldots,q\}} a_{i,m+j}(x), \tag{2}$$

т. е. точная нижняя грань в формуле (1) достигается.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Так как при всяких $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$, $x \in F$ имеет место неравенство

$$\max_{i\in\{0,\ldots,q\}} \max_{j\in\{i,\ldots,q\}} a_{i,m+j}(x) \leqslant \max_{i\in\{0,\ldots,q+1\}} \max_{j\in\{i,\ldots,q+1\}} a_{i,m+j}(x),$$

то при всяких $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$\inf_{x\in F} \max_{i\in\{0,\ldots,q\}} \max_{j\in\{i,\ldots,q\}} a_{i,m+j}(x) \leqslant \inf_{x\in F} \max_{i\in\{0,\ldots,q+1\}} \max_{j\in\{i,\ldots,q+1\}} a_{i,m+j}(x),$$

т. е. при всяком $m \in \mathbf{N}$ последовательность (1) — монотонно неубывающая.

2. Так как при всяких $i \in \mathbf{Z}^+$, $j \in i + \mathbf{N}$, $x \in F$ имеет место включение $a_{i,j}(x) \in [-a, a]$, то при всяких $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$, $x \in F$ имеем:

$$\max_{i\in\{0,\ldots,q\}} \max_{j\in\{i,\ldots,q\}} a_{i,m+j}(x) \in [-a, a],$$

и следовательно, при всяких $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$ имеет место включение

$$\inf_{x\in F} \max_{i\in\{0,\ldots,q\}} \max_{j\in\{i,\ldots,q\}} a_{i,m+j}(x) \in [-a, a],$$

т. е. при всяком $m \in \mathbf{N}$ все точки последовательности (1) принадлежат отрезку $[-a, a]$

3. Фиксируем произвольные $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$. Для всякого вещественного числа $r > p$, где

$$\rho \underset{\text{def}}{=} \inf_{x\in F} \max_{i\in\{0,\ldots,q\}} \max_{j\in\{i,\ldots,q\}} a_{i,m+j}(x), \tag{3}$$

множество

$$F^r \underset{\text{def}}{=} \{x \in F : \max_{i\in\{0,\ldots,q\}} \max_{j\in\{i,\ldots,q\}} a_{i,m+j}(x) \leqslant r\} \tag{4}$$

непусто. Имеет место равенство (при всяком вещественном $r > p$)

$$F^r = \bigcap_{i\in\{0,\ldots,q\}} \bigcap_{j\in\{i,\ldots,q\}} F^r{}_{i,m+j}, \tag{5}$$

где множества $F^r{}_{i,j}(r > \rho, i \in \mathbf{Z}^+, j \in i + \mathbf{N})$ определены формулой

$$F^r{}_{i,j} \underset{\text{def}}{=} \{x \in F : a_{i,j}(x) \leqslant r\}.$$

Множества $F^r{}_{i,j}(r > \rho, i \in \mathbf{Z}^+, j \in i + \mathbf{N})$ замкнуты, так как функции $a_{i,j}(\cdot): F \to [-a, a]$ $(i \in \mathbf{Z}^+, j \in i + \mathbf{N})$ непрерывны. Следовательно (в силу формулы (5)), при всяком $r > p$ множество F^r замкнуто, а так как пространство F компактно, то и множества $F^r \subset F$ $(r > p)$ компактны. Из формулы (4) следует, что для всяких $r \in \mathbf{R}$, $s \in \mathbf{R}$ таких, что $r \geqslant s$, имеет место включение $F^s \subset F^r$. Так как $F^s \ne \varnothing (s > p)$, то отсюда следует, что

$$\bigcap_{r>\rho} F^r \ne \varnothing.$$

Из формулы (4) следует, что для всякого $x \in \bigcap_{r>\rho} F^r$ имеет место неравенство

$$\max_{i\in\{0,\dots,q\}}\max_{j\in\{i,\dots,q\}} a_{i,m+j}(x)\leqslant\rho\,. \tag{6}$$

Отсюда в силу формулы (3) следует, что для всякого $x\in\bigcap\limits_{r>\rho}F^r$ неравенство (6) в действительности является равенством, из которого в силу доказанной непустоты множества $\bigcap\limits_{r>\rho}F^r$ следует формула (2). Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 в силу теоремы Вейерштрасса следует, что при всяком $m\in\mathbf{N}$ последовательность (1) имеет предел, причем этот предел принадлежит отрезку $[-a,a]$. Следующая лемма содержит некоторую информацию об этом пределе.

Лемма 2. *При всяком* $m\in\mathbf{N}$ *имеют место равенства*

$$\begin{aligned}\lim_{q\to\infty}\inf_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,q\}}\max_{j\in\{i,\dots,q\}} a_{i,m+j}(x)&=\inf_{x\in F}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x)\\&=\min_{x\in F}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x).\end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $m\in\mathbf{N}$.

1. Так как при всяких $q\in\mathbf{N}$, $x\in F$ имеет место неравенство

$$\max_{i\in\{0,\dots,q\}}\max_{j\in\{i,\dots,q\}} a_{i,m+j}(x)\leqslant\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x),$$

то при всяком $q\in\mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$\inf_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,q\}}\max_{j\in\{i,\dots,q\}} a_{i,m+j}(x)\leqslant\inf_{x\in F}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x),$$

отсюда следует неравенство

$$\lim_{q\to\infty}\inf_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,q\}}\max_{j\in\{i,\dots,q\}} a_{i,m+j}(x)\leqslant\inf_{x\in F}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x). \tag{8}$$

2. При всяком $q\in\mathbf{N}$ при всяком $r>\rho_q$, где

$$\rho_q\underset{\text{def}}{=}\inf_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,q\}}\max_{j\in\{i,\dots,q\}} a_{i,m+j}(x), \tag{9}$$

множество

$$F_q^r\underset{\text{def}}{=}\{x\in F:\max_{i\in\{0,\dots,q\}}\max_{j\in\{i,\dots,q\}} a_{i,m+j}(x)\leqslant r\} \tag{10}$$

непусто и компактно (последнее доказано в п. 3 доказательства леммы 1, где применены более краткие, чем здесь, обозначения (там опущен имеющийся здесь индекс q)).

Из формулы (10) следует, что для всяких $p\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}$ таких, что $p\geqslant q$, и всяких $r\in\mathbf{R}$, $s\in\mathbf{R}$ таких, что $r\geqslant s$, имеет место включение

$$F_p^s\subset F_q^r\,.$$

Так как $F_p^s(p\in\mathbf{N},s>\rho_p)$ — непустые компактные множества, то отсюда следует:

$$F_\infty\underset{\text{def}}{=}\bigcap_{p\in\mathbf{N}}\bigcap_{s>p_\infty}F_p^s\neq\varnothing, \tag{11}$$

где

$$\rho_\infty\underset{\text{def}}{=}\sup_{q\in\mathbf{N}}\rho_q\,. \tag{12}$$

Из формул (10) — (12) следует, что для всяких $x\in F_\infty$, $q\in\mathbf{N}$, $r>\rho_\infty$ имеет место неравенство

$$\max_{i\in\{0,\dots,q\}}\max_{j\in\{i,\dots,q\}} a_{i,m+j}(x)\leqslant r.$$

Следовательно, для всякого $x\in F_\infty$ выполнено неравенство

$$\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x)\leqslant\rho_\infty. \tag{13}$$

В силу леммы 1 последовательность $\{\rho_q\}_{q\in N}$, определенная формулой (9), монотонно неубывающая и потому ρ_∞, определенное формулой (12), равно

$$\lim_{q\to\infty}\rho_q = \lim_{q\to\infty}\inf_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,q\}}\max_{j\in\{i,\dots,q\}} a_{i,m+j}(x).$$

Поэтому неравенство (13) можно переписать в виде

$$\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x) \leqslant \lim_{q\to\infty}\inf_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,q\}}\max_{j\in\{i,\dots,q\}} a_{i,m+j}(x). \tag{14}$$

Таким образом, доказано, что для некоторого $x\in F$ (таковым является всякий элемент множества F_∞) имеет место неравенство (14). Соединяя это с неравенством (8), получаем формулу (7). Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3 . *Числовая последовательность*

$$\{\inf_{x\in F}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x)\}_{m\in\mathbf{N}} \tag{15}$$

— монотонно не возрастающая и все ее точки принадлежат отрезку $[-a,a]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . 1. Так как при всяких $m\in\mathbf{N}$, $x\in F$ имеет место неравенство

$$\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+1+j}(x) \leqslant \sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x),$$

то при всяком $m\in\mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$\inf_{x\in F}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+1+j}(x) \leqslant \inf_{x\in F}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x),$$

т. е. последовательность (15) — монотонно невозрастающая.

2. В силу леммы 2 последовательность (15) совпадает с последовательностью

$$\{\lim_{q\to\infty}\inf_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,q\}}\max_{j\in\{i,\dots,q\}} a_{i,m+j}(x)\}_{m\in\mathbf{N}},$$

все точки которой принадлежат отрезку $\left[-a,a\right]$ (см. абзац перед леммой 2). Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 в силу теоремы Вейерштрасса следует, что последовательность (15) имеет предел, принадлежащий отрезку $[-a,a]$. Следующая лемма содержит некоторые сведения об этом пределе.

Л е м м а 4 . *Имеют место равенства*

$$\inf_{m\in\mathbf{N}}\inf_{x\in F}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x) =$$

$$\lim_{m\to\infty}\inf_{x\in F}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x) = \inf_{x\in F}\inf_{m\in\mathbf{N}}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . В силу леммы 3 числовая последовательность

$$\{\inf_{x\in F}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x)\}_{m\in\mathbf{N}}$$

монотонно невозрастает, поэтому ее предел равен точной нижней грани множества ее точек:

$$\lim_{m\to\infty}\inf_{x\in F}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x) = \inf_{m\in\mathbf{N}}\inf_{x\in F}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x). \tag{16}$$

В силу равенства

$$\inf_{\alpha\in A}\inf_{\beta\in B}\varphi(\alpha,\beta) = \inf_{\beta\in B}\inf_{\alpha\in A}\varphi(\alpha,\beta),$$

верного для всяких множеств *A*, *B* и всякой функции $\varphi(\cdot,\cdot): A\times B\to\mathbf{R}$, знаки $\inf\limits_{m\in\mathbf{N}}, \inf\limits_{x\in F}$ в правой части равенства (16) можно поменять местами:

$$\lim_{m\to\infty}\inf_{x\in F}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x) = \inf_{x\in F}\inf_{m\in\mathbf{N}}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x). \tag{17}$$

Лемма 4 доказана.

Воспользовавшись хорошо известным и легко доказываемым равенством (которое, впрочем, можно рассматривать и как определение верхнего предела, стоящего в левой части)

$$\overline{\lim_{j-i\to\infty}}\, a_{i,j} = \inf_{m\in\mathbf{N}}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j},$$

верным для всякой двойной (треугольной последовательности вещественных чисел $\{a_{i,j}\}_{i\in\mathbf{Z}^+, j\in i+\mathbf{N}}$, перепишем утверждение леммы 4 в виде цепочки равенств

$$\inf_{m\in\mathbf{N}}\inf_{x\in F}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x) = \lim_{m\to\infty}\inf_{x\in F}\sup_{i\in\mathbf{Z}^+}\sup_{j\in i+\mathbf{Z}^+} a_{i,m+j}(x) = \inf_{x\in F}\varlimsup_{j-i\to\infty} a_{i,j}(x). \tag{18}$$

В силу лемм 1, 2 из равенства (18) следует

П р е д л о ж е н и е. *Пусть F — компактное топологическое пространство, $a\in\mathbf{R}^+$ и пусть при всяких $i\in\mathbf{Z}^+$, $j\in i+\mathbf{N}$ задана непрерывная функция $a_{i,j}(\cdot): F\to[-a,a]$. Тогда имеют место равенства*

$$\inf_{x\in F}\varlimsup_{j-i\to\infty} a_{i,j}(x) = \lim_{m\to\infty}\lim_{q\to\infty}\min_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,q\}}\max_{j\in\{i,\dots,q\}} a_{i,m+j}(x) =$$
$$= \inf_{m\in\mathbf{N}}\lim_{q\to\infty}\min_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,q\}}\max_{j\in\{i,\dots,q\}} a_{i,m+j}(x).$$

§5

В этом параграфе в удобной для дальнейшего изложения форме напоминаются известные утверждения, которые для полноты изложения приводятся вместе с доказательствами.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть A — некоторое множество, T — топологическое пространство. Пусть при всяком $\alpha\in A$ задана функция $f_a(\cdot): T\to\mathbf{R}$. Пусть в некоторой точке $x\in T$ каждая из функций $f_a(\cdot)$ $(\alpha\in A)$ полунепрерывна сверху. Тогда функция $\inf_{\alpha\in A} f_a(\cdot): T\to\mathbf{R}$ полунепрерывна сверху в точке x.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\inf_{\alpha\in A} f_a(\cdot)$ через $f(\cdot)$. Пусть дано $\varepsilon\in\mathbf{R}_*^+$. Возьмем такое $\alpha_\varepsilon\in A$, что $f_{\alpha_\varepsilon}(x) < f(x)+\dfrac{\varepsilon}{2}$. Возьмем далее, пользуясь полунепрерывностью сверху функции $f_{\alpha_\varepsilon}(\cdot)$ в точке *x*, такую окрестность *V* точки *x* в пространстве *T*, что $f_{\alpha_\varepsilon}(y) < f_{\alpha_\varepsilon}(x)+\dfrac{\varepsilon}{2}$ для всякого $y\in V$. Тогда для всякого $y\in V$ имеем:

$$f(y)\leqslant f_{\alpha_\varepsilon}(y) < f_{\alpha_\varepsilon}(x)+\frac{\varepsilon}{2} < f(x)+\varepsilon.$$

Итак, для всякого $\varepsilon\in\mathbf{R}_*^+$ найдется окрестность *V* точки *x* в пространстве *T* такая, что для всякого $y\in V$ выполнено неравенство $f(y)<f(x)+\varepsilon$; это и означает, что функция $f(\cdot)$ полунепрерывна сверху в точке *x*. Предложение 1 доказано.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть $(\mathscr{E},\pi,\mathscr{B})$ — локально тривиальное расслоение с компактным слоем F. Пусть функция $f(\cdot):\mathscr{E}\to\mathbf{R}$ непрерывна. Тогда функция*

$$\sup_{z\in\pi^{-1}(\cdot)} f(z): \mathscr{B}\to\mathbf{R}$$

непрерывна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Полунепрерывность функции

$$g(\cdot) \underset{\text{def}}{=} \sup_{z\in\pi^{-1}(\cdot)} f(z): \mathscr{B}\to\mathbf{R}$$

снизу выведем из предложения 1 (здесь не используется компактность слоя *F*). Пусть дана точка $x_0\in\mathscr{B}$. Возьмем такую карту $(V\times F, h: V\times F\to\mathscr{E})$ локально тривиального расслоения $(\mathscr{E},\pi,\mathscr{B})$, что V — окрестность точки x_0. При всяком $\alpha\in F$ функция $f_a(\cdot): V\to\mathbf{R}$, определенная формулой

$$f_a(x) = f(h(x,a)) \qquad (x\in V),$$

непрерывна как суперпозиция непрерывных функций $f(\cdot):\mathscr{E}\to\mathbf{R}$, $h(\cdot,\alpha):V\times\{\alpha\}\to\mathscr{E}$. При всяком $x\in V$ имеет место равенство

$$\sup_{\alpha\in F} f_\alpha(x)=\sup_{\alpha\in F} f(h(x,\alpha)).$$

Так как $\{h(x,\alpha)\}_{\alpha\in F}=\pi^{-1}(x)$, то из предыдущего равенства следует, что для всякого $x\in V$ выполнено равенство

$$\sup_{\alpha\in F} f_\alpha(x)=\sup_{z\in\pi^{-1}(x)} f(z).$$

Таким образом, сужение интересующей нас функции $g(\cdot):\mathscr{B}\to\mathbf{R}$ на некоторую окрестность V точки x_0 совпадает с функцией $\sup\limits_{\alpha\in F} f_a(\cdot):V\to\mathbf{R}$, причем для всякого $\alpha\in F$ функция $f_a(\cdot):V\to\mathbf{R}$ непрерывна. В силу предложения 1 отсюда следует, что сужение функции $-g(\cdot)=\inf\limits_{z\in\pi^{-1}(\cdot)} f(z):\mathscr{B}\to\mathbf{R}$ на некоторую окрестность точки x_0 полунепрерывно сверху, а следовательно, сужение функции $g(\cdot):\mathscr{B}\to\mathbf{R}$ на некоторую окрестность точки x_0 полунепрерывно снизу. Так как это доказано для некоторую окрестность V точки x_0 совпадает с функцией $\sup\limits_{z\in\pi^{-1}(\cdot)} f_a(\cdot):V\to\mathbf{R}$, снизу доказана.

2. Докажем теперь, что функция $\sup\limits_{z\in\pi^{-1}(\cdot)} f(z):\mathscr{B}\to\mathbf{R}$ полунепрерывна сверху. Пусть дана точка $x_0\in\mathscr{B}$. Возьмем такую карту $(V\times F, h:V\times F\to\mathscr{E})$ локально тривиального расслоения $(\mathscr{E},\pi,\mathscr{B})$, что V — окрестность точки x_0. Функция $f_0h:V\times F\to\mathbf{R}$ непрерывна как суперпозиция непрерывных отображений $f:\mathscr{E}\to\mathbf{R}$, $h:V\times F\to\mathscr{E}$. Пусть дано $\varepsilon\in\mathbf{R}_*^{+}$. Для всякого $\alpha\in F$ возьмем окрестность U_α точки x_0 в пространстве $V\subset\mathscr{B}$ и открытую окрестность W_α точки α в пространстве F такие, что

$$f(h(x,\beta))<f(h(x_0,\alpha))+\frac{\varepsilon}{2}\tag{1}$$

для всяких $x\in U_\alpha$, $\beta\in W_\alpha$. Из открытого покрытия $\{W_\alpha\}_{\alpha\in F}$ компактного пространства F выберем конечное покрытие: $\{W_{\alpha_i}\}_{i\in\{1,\dots,s\}}$. Множество

$$U\underset{\text{def}}{=}\bigcap_{i=1}^{s} U_{\alpha_i}.$$

есть окрестность точки x_0 в пространстве $V\subset\mathscr{B}$. Из того, что для всякого $\alpha\in F$, для всяких $x\in U_\alpha$, $\beta\in W_\alpha$ выполнено неравенство (1), следует, что для всякого $x\in U$, для всякого $\beta\in W_{\alpha_i}$ $(i\in\{1,\dots,s\})$ имеет место неравенство

$$f(h(x,\beta))<\sup_{\alpha\in F} f(h(x_0,\alpha))+\frac{\varepsilon}{2},\tag{2}$$

а так как $\{W_{\alpha_i}\}_{i\in\{1,\dots,s\}}$ — покрытие пространства F, то неравенство (2) выполнено для всяких $x\in U$, $\beta\in F$. Следовательно, для всякого $x\in U$ имеет место неравенство

$$\sup_{\beta\in F} f(h(x,\beta))<\sup_{\alpha\in F} f(h(x_0,\alpha))+\varepsilon.\tag{3}$$

Так как $\{h(x,\alpha)\}_{\alpha\in F}=\pi^{-1}(x)$ для всякого $x\in V$, то

$$\sup_{\alpha\in F} f(h(x,\alpha))=\sup_{z\in\pi^{-1}(x)} f(z)$$

и поэтому неравенство (3) для всякого $x\in U$ переписывается в виде

$$\sup_{z\in\pi^{-1}(x)} f(z)<\sup_{z\in\pi^{-1}(x_0)} f(z)+\varepsilon.\tag{4}$$

Таким образом, доказано, что для всякого $x_0 \in \mathscr{B}$, для всякого $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ найдется окрестность U точки x_0 в пространстве $\mathscr{B}$ такая, что для всякого $x \in U$ выполнено неравенство (4). Это означает, что функция $\sup\limits_{z \in \pi^{-1}(x)} f(z) : \mathscr{B} \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху.

3. Соединив доказанную в п. 1 полунепрывность снизу с доказанной в п. 2 полунепрерывностью сверху, получаем, что функция $\sup\limits_{z \in \pi^{-1}(x)} f(z) : \mathscr{B} \to \mathbf{R}$ непрерывна. Предложение 2 доказано.

Замечание. В условиях предложения 2

$$\sup_{z \in \pi^{-1}(\cdot)} f(z) = \max_{z \in \pi^{-1}(\cdot)} f(z).$$

так как сужение непрерывной функции $f(\cdot) : \mathscr{E} \to \mathbf{R}$ на всякий слой непрерывно и потому (так как слой компактен) достигает своей точной верхней грани.

§6

Вернемся к рассмотрению гомоморфизма $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}(E, p, B))$, удовлетворяющего условиям, сформулированным во введении.

Векторное расслоение (E, p, B) со слоем $\mathbf{R}^n$ у нас фиксировано. Фиксируем произвольное $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Для всякого $b \in B$ обозначим через $E_b^{(k)}$ множество всех k-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$. Через $E^{(k)}$ обозначим объединение всех этих множеств:

$$E^{(k)} \underset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{b \in B} E_b^{(k)}.$$

Пусть дана произвольная точка $\hat{b} \in B$ и произвольное k-мерное векторное подпространство $\hat{\mathbf{R}}^k$ слоя $p^{-1}(\hat{b})$ векторного расслоения (E, p, B). Всякому базису $\{\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n\}$ векторного пространства $\hat{\mathbf{R}}^k$ и всякому набору окрестностей $U(\hat{\xi}_i)$ точек $\hat{\xi}_i$ $(i \in \{1, \dots, k\})$ ($\hat{\xi}_i$ при всяком $i \in \{1, \dots, k\}$ есть точка топологического пространства E, а $U(\hat{\xi}_i)$ есть окрестность этой точки в топологическом пространстве E) поставим в соответствие множество всех тех k-мерных подпространств $\mathbf{R}^k$ слоев $p^{-1}(b)$ векторного расслоения (E, p, B), которые обладают следующим свойством:

$$\mathbf{R}^k \bigcap U(\hat{\xi}_i) \neq \varnothing \text{ при всяком } i \in \{1, \dots, k\}.$$

Объявив сопоставленную таким образом каждой точке $\hat{\mathbf{R}}^k$ множества $E^{(k)}$ совокупность содержащих эту точку подмножеств множества $E^{(k)}$ базисом окрестностей этой точки, мы наделяем $E^{(k)}$ структурой топологического пространства. Далее через $E^{(k)}$ обозначается это топологическое пространство.

Определим отображение $p^{(k)} : E^{(k)} \to B$, положив для всякого $b \in B$ для всякого $s \in E_b^{(k)}$ по определению $p^{(k)}(s) = b$.

Непосредственно из определений вытекает, что так определенное расслоение $(E^{(k)}, p^{(k)}, B)$ является локально тривиальным расслоением со слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$. При всяком $k \in \{1, \dots, n\}$ грассманово многообразие $G_k(\mathbf{R}^n)$ естественно наделяется структурой левого $GL(n, \mathbf{R})$-пространства: если $\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in GL(n, \mathbf{R})$, то $\varphi \mathbf{R}^k$ есть по определению образ множества $\mathbf{R}^k$ при отображении φ. Непосредственно из определений вытекает, что локально тривиальное расслоение $(E^{(k)}, p^{(k)}, B)$ есть расслоенное пространство со слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$, ассоциированное с тем же локально тривиальным главным $GL(n, \mathbf{R})$-

расслоением, с которым ассоциировано векторное расслоение (E,p,B) (см. [2, с. 69, 72—73, 97—98]).

Лемма. *При всяких* $k\in\{1,...,n-1\}$, $i\in\mathbf{Z}^+$, $j\in i+\mathbf{N}$ *формула*

$$a_{i,j}^{(k)}(\mathbf{R}^{(k)}) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{j-i}\ln\{\| X^{j-i}_{X^i\mathbf{R}^k}\|\cdot\| X^{i-j}_{X^j((\mathbf{R}^k)\perp)}\|\}, \tag{1}$$

где $(\mathbf{R}^k)\perp$ *— ортогональное дополнение векторного подпространства* $\mathbf{R}^k$ *в слое* $p^{-1}(p^{(k)}\mathbf{R}^k)$ *определяет непрерывное отображение* $a_{i,j}^{(k)}(\cdot):E^{(k)}\to\mathbf{R}$.

Для всяких, $k\in\{1,...,n-1\}$, $i\in\mathbf{Z}^+$, $j\in i+\mathbf{N}$, $b\in B$ *сужение этого отображения на слой* $[p^{(k)}]^{-1}(b)$ *есть отображение* $[p^{(k)}]^{-1}(b)\to[-2a(b),2a(b)]$.

Доказательство. 1. При всяком $m\in\{1,...,n\}$ определим топологическое пространство $\mathscr{E}^{(m)}$ как подпространство произведения $E^{(m)}\times E$, состоящее из пар $(\mathbf{R}^m,\xi)$ таких, что $\mathbf{R}^m\in E^{(m)}$, $\xi\in\mathbf{R}^m$, $|\xi|=1$; в качестве базы $\mathscr{B}^{(m)}$ берется пространство $E^{(m)}$, проекция $\pi^{(m)}$ определяется формулой $\pi^{(m)}=pr_1|_{\mathscr{E}^{(m)}}$, т. е. $\pi^{(m)}$ есть сужение на $\mathscr{E}^{(m)}$ проекции pr_1 произведения $E^{(m)}\times E$ на первый сомножитель. Непосредственно из определений вытекает, что так определенная тройка $(\mathscr{E}^{(m)},\pi^{(m)},\mathscr{B}^{(m)})$ является локально тривиальным расслоением со слоем S^{m-1} (поверхность шара в m-мерном евклидовом пространстве). При всяких $m\in\{1,...,n\}$, $t\in\mathbf{G}$ формула

$$f_t^{(m)}(\mathbf{R}^m,\xi)\underset{\text{def}}{=}|X^t\xi|$$

определяет функцию[8] $\mathscr{E}^{(m)}\to\mathbf{R}_*^{\,+}$, которая непрерывна, так как отображение $X^t:E\to E$ при всяком $t\in\mathbf{G}$ непрерывно и норма $|\cdot|$, индуцированная римановой метрикой векторного расслоения (E,p,B), непрерывна. Поэтому в силу предложения 2 § 5 при всяких $m\in\{1,...,n\}$, $t\in\mathbf{G}$ функция $\varphi_t^{(m)}:E^{(m)}\to\mathbf{R}_*^{\,+}$, определенная формулой

$$\varphi_t^{(m)}\mathbf{R}^m\underset{\text{def}}{=}\|X^t_{\mathbf{R}^m}\|\underset{\text{def}}{=}\sup_{\substack{\xi\in\mathbf{R}^m\\|\xi|=1}}|X^t\xi|,$$

непрерывна.

2. Для всякого $k\in\{1,...,n-1\}$ отображение $\psi_k:E^{(k)}\to E^{(n-k)}$, определенное формулой

$$\psi_k\mathbf{R}^k=(\mathbf{R}^k)^\perp,$$

т. е. переводящее всякое $\mathbf{R}^k\in E^{(k)}$ в его ортогональное дополнение в слое $p^{-1}(p^{(k)}\mathbf{R}^k)$, непрерывно, так как риманова метрика векторного расслоения непрерывна.

3. При всяких $m\in\{1,...,n\}$, $t\in\mathbf{G}$ отображение $(X^t)^{(m)}:E^{(m)}\to E^{(m)}$, определенное формулой

$$(X^t)^{(m)}\mathbf{R}^m=X^t\mathbf{R}^m$$

(символ $X^t\mathbf{R}^m$ понимается в стандартном смысле: это множество точек вида $X^t\xi$, где $\xi\in\mathbf{R}^m$), непрерывно; это следует из определения топологического пространства $E^{(m)}$, так как (X^t,χ^t) — морфизм векторного расслоения (E,p,B).

[8] Напомним, что при всяких $r\in\mathbf{G}$, $b\in B$ сужение $X^r[b]$ отображения X^r на слой $p^{-1}(b)$ невырождено. Это следует из условий б), в) п. 2 введения.

4. При всяких $k\in\{1,...,n-1\}$, $i\in\mathbf{Z}^+$, $j\in i+\mathbf{N}$ функция $a_{i,j}^{(k)}(\cdot):E^{(k)}\to\mathbf{R}$, определенная формулой (1), является суперпозицией непрерывной функции $\frac{1}{j-i}\ln:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ и отображений, непрерывность которых доказана выше в пп. 1—3. Поэтому в силу теоремы о непрерывности суперпозиции непрерывных отображений при всяких $k\in\{1,...,n-1\}$, $i\in\mathbf{Z}^+$, $j\in i+\mathbf{N}$ функция $a_{i,j}^{(k)}(\cdot):E^{(k)}\to\mathbf{R}$, определенная формулой (1), непрерывна.

5. При всяких $m\in\{1,...,n\}$, $t\in\mathbf{G}$, $s\in\mathbf{G}$, $b\in B$ при всяком $\mathbf{R}^m\in[p^{(k)}]^{-1}(b)$ в силу условия, наложенного на гомоморфизм $\mathfrak{H}$ (см. во введении фразу, содержащую формулы (1), (2)), имеет место неравенство

$$\| X_{X^s\mathbf{R}^m}^{t-s}\|\leqslant\exp(|t-s|\,a(b)).$$

Отсюда следует, что при всяких $k\in\{1,...,n-1\}$, $i\in\mathbf{Z}^+$, $j\in i+\mathbf{N}$, $b\in B$ сужение отображения $a_{i,j}^{(k)}(\cdot)$, определенного формулой (1), на слой $[p^{(k)}]^{-1}(b)$ есть отображение $[p^{(k)}]^{-1}(b)\to[-2a(b),2a(b)]$. Лемма доказана.

Рассмотрим индексы экспоненциальной разделенности $\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},b)$, определенные в § 3.

П р е д л о ж е н и е. *При всяких* $k\in\{1,...,n-1\}$, $b\in B$ *имеет место равенство*[9]

$$\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},b)=\lim_{m\to\infty}\lim_{q\to\infty}\min_{\mathbf{R}^k\in[p^{(k)}]^{-1}(b)}\max_{i\in\{0,...,q\}}\max_{j\in\{i,...,q\}}\frac{1}{m+j-i}\times$$
$$\times\ln\{\| X_{X^i\mathbf{R}^k}^{m+j-i}\|\,\| X_{X^{m+j}((\mathbf{R}^k)^\perp)}^{i-m-j}\|\} \tag{2}$$

причем равенство (2) остается верным, если знак $\lim\limits_{m\to\infty}$ *заменить знаком* $\inf\limits_{m\in\mathbf{N}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны $k\in\{1,...,n-1\}$, $b\in B$. Согласно определению § 3 имеет место равенство

$$\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},b)=\inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))}\varlimsup_{\substack{j-i\to+\infty\\(j\in\mathbf{Z}^+,i\in\mathbf{Z}^+)}}\frac{1}{j-i}\ln\{\| X_{X^i\mathbf{R}^k}^{j-i}\|\,\| X_{X^j((\mathbf{R}^k)^\perp)}^{i-j}\|\},$$

из которого в силу формулы (1) следует формула

$$\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},b)=\inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))}\varlimsup_{\substack{j-i\to+\infty\\(j\in\mathbf{Z}^+,i\in\mathbf{Z}^+)}}a_{i,j}^{(k)}(\mathbf{R}^k). \tag{3}$$

Согласно лемме, доказанной в этом параграфе, при всяких $i\in\mathbf{Z}^+$, $j\in i+\mathbf{N}$ отображение $a_{i,j}^{(k)}(\cdot):G_k(p^{-1}(b))=[p^{(k)}]^{-1}(b)\to[-2a(b),2a(b)]$, определенное формулой (1), непрерывно. Грассманово многообразие $G_k(p^{-1}(b))$ компактно. Поэтому в силу предложения § 4 имеет место равенство[10]

$$\inf_{\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))}\varlimsup_{\substack{j-i\to+\infty\\(j\in\mathbf{Z}^+,i\in\mathbf{Z}^+)}}a_{i,j}^{(k)}(\mathbf{R}^k)=$$
$$=\lim_{m\to\infty}\lim_{q\to\infty}\min_{\mathbf{R}^k\in[p^{(k)}]^{-1}(b)}\max_{i\in\{0,...,q\}}\max_{j\in\{i,...,q\}}a_{i,m+j}^{(k)}(\mathbf{R}^k),$$

остающееся верным после замены знака $\lim\limits_{m\to\infty}$ знаком $\inf\limits_{m\in\mathbf{N}}$.

Левая часть этого равенства в силу формулы (3) равна $\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},b)$, а правая — в силу формулы (1) — равна[11]

[9] В этом равенстве через *m*, *q* обозначаются натуральные числа.
[10] В этом равенстве через m, q обозначаются натуральные числа.
[11] См. предыдущую сноску.

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{q\to\infty}\min_{\mathbf{R}^k\in[p^{(k)}]^{-1}(b)}\max_{i\in\{0,\dots,q\}}\max_{j\in\{i,\dots,q\}}\frac{1}{m+j-i}\ln\{\| X^{m+j-i}_{X^i\mathbf{R}^k}\|\,\| X^{i-m-j}_{X^{m+j}((\mathbf{R}^k)^\perp)}\|\},$$

причем замена знака $\lim\limits_{m\to\infty}$ знаком $\inf\limits_{m\in\mathbf{N}}$ не меняет это число. Предложение доказано.

§7

Продолжаем рассмотрение индексов экспоненциальной разделенности $\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},b)$, определенных в § 3.

Т е о р е м а 1. *При всяком* $k\in\{1,\dots,n-1\}$ *функция*

$$\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},\cdot):B\to\mathbf{R}$$

принадлежит второму классу Бэра.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Определения функциональных классов Бэра см. в [3], [4, § 39]. Согласно этим определениям, доказываемая теорема есть утверждение о том, что для всяких $k\in\{1,\dots,n-1\}$, $m\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}$ найдется непрерывная функция $f_k^{(m,q)}(\mathfrak{H},\cdot):B\to\mathbf{R}$, причем эти функции обладают свойством: для всяких $k\in\{1,\dots,n-1\}$, $b\in B$ выполнено равенство

$$\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},b)=\lim_{m\to\infty}\lim_{q\to\infty}f_k^{(m,q)}(\mathfrak{H},b).$$

Поскольку в силу предложения § 6 при всяких $k\in\{1,\dots,n-1\}$, $b\in B$ имеют место равенства

$$\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},b)=\lim_{m\to\infty}\lim_{q\to\infty}f_k^{(m,q)}(\mathfrak{H},b)=\inf_{m\in\mathbf{N}}\lim_{q\to\infty}f_k^{(m,q)}(\mathfrak{H},b),\tag{1}$$

где функции $f_k^{(m,q)}(\mathfrak{H},\cdot):B\to\mathbf{R}$ $k\in\{1,\dots,n-1\}$, $m\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}$) определены формулой

$$f_k^{(m,q)}(\mathfrak{H},b)\underset{\text{def}}{=}\min_{\mathbf{R}^k\in[p^{(k)}]^{-1}(b)}\max_{i\in\{0,\dots,q\}}\max_{j\in\{i,\dots,q\}}\frac{1}{m+j-i}\times$$

$$\ln\{\| X^{m+j-i}_{X^i\mathbf{R}^k}\|\,\| X^{i-m-j}_{X^{m+j}((\mathbf{R}^k)^\perp)}\|\},$$

то для доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что при всяких $k\in\{1,\dots,n-1\}$, $m\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}$ функция $f_k^{(m,q)}(\mathfrak{H},\cdot):B\to\mathbf{R}$, определенная формулой (2), непрерывна.

2. Пусть даны $k\in\{1,\dots,n-1\}$, $m\in\mathbf{N}$, $q\in\mathbf{N}$. Выражение, стоящее в формуле (2) справа от знака $\min\limits_{\mathbf{R}^k\in[p^{(k)}]^{-1}(b)}$, определяет функцию $c_k^{(m,q)}(\mathfrak{H},\cdot):E^{(k)}\to\mathbf{R}$. Эта функция непрерывна, будучи максимумом по параметру (i,j), принимающему конечное множество значений ($i\in\{0,\dots,q\}$, $j\in\{i,\dots,q\}$) семейства функций $a_{i,j}^{(k)}(\cdot):E^{(k)}\to\mathbf{R}$, определенных в лемме § 6 и непрерывных согласно цитируемой лемме. Только что использованное утверждение о непрерывности функции $\max\limits_{\alpha\in A}c_a(\cdot)$, где A — конечное множество, а $c_a(\cdot):T\to\mathbf{R}$ $(\alpha\in A)$ — непрерывные отображения топологического пространства T в $\mathbf{R}$, хорошо известно, однако приведем здесь для полноты изложения его доказательство: это утверждение есть частный случай предложения 2 § 5; в качестве расслоения $(\mathscr{E},\pi,\mathscr{B})$ здесь фигурирует расслоение — произведение $(A\times T,\mathrm{pr}_2,T)$, слой которого A наделяем дискретной топологией, в результате чего конечное множество A становится компактным топологическим пространством, а функция $f(\cdot):A\times T\to\mathbf{R}$, определенная формулой $f((\alpha,t))=c_\alpha(t)$ (для всяких $\alpha\in A$, $t\in T$) оказывается непрерывной.

3. Применим предложение 2 § 5 к функции — $c_k^{(m,q)}(\mathfrak{H},\cdot):E^{(k)}\to\mathbf{R}$ (функция $c_k^{(m,q)}(\mathfrak{H},\cdot):E^{(k)}\to\mathbf{R}$ определена в предыдущем пункте доказательства). Роль фигурирующего в цитируемом предложении локально тривиального расслоения $(\mathscr{E},\pi,\mathscr{B})$

с компактным слоем F играет здесь локально тривиальное расслоение $(E^{(k)}, p^{(k)}, B)$ с компактным слоем $G_k(p^{-1}(b))$. Согласно предложению 2 § 5 функция

$$\sup_{\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(\cdot)} (-c_k{}^{(m,q)}(\mathfrak{H}, \mathbf{R}^k)) : B \to \mathbf{R}$$

непрерывна. Следовательно, непрерывна и функция $f_k^{(m,q)}(\mathfrak{H},\cdot) : B \to \mathbf{R}$, равная

$$\min_{\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(\cdot)} c_k{}^{(m,q)}(\mathfrak{H}, \mathbf{R}^k) = -\sup_{\mathbf{R}^k \in [p^{(k)}]^{-1}(\cdot)} (-c_k{}^{(m,q)}(\mathfrak{H}, \mathbf{R}^k)).$$

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *В пространстве B имеется всюду плотное множество C типа* G_δ *такое, что при всяком* $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ *функция*[12] $\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},\cdot)|_c : C \to \mathbf{R}$ *непрерывна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Теорема 2 непосредственно следует из теоремы VI [4, с. 250] (см. также [4], с. 162—164]) в силу доказанной выше теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *В пространстве B имеется всюду плотное множество D типа* G_δ *такое, что при всяком* $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ *функция* $\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},\cdot) : B \to \mathbf{R}$ *полунепрерывна сверху во всякой точке* $b \in D$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Прежде чем доказывать теорему 3, отметим, что в формулировке этой теоремы речь идет не о сужениях функций $\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},\cdot) : B \to \mathbf{R}$ на множество D, а о самих этих функциях и утверждается, что множество точек полунепрерывности сверху функций $\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},\cdot) : B \to \mathbf{R}$ содержит множество D, являющееся всюду плотным множеством типа G_δ в пространстве B.

Перейдем собственно к доказательству теоремы 3. При всяких $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, $m \in \mathbf{N}$ функция

$$\lim_{q\to\infty} f_k^{(m,q)}(\mathfrak{H},\cdot) : B \to \mathbf{R}$$

(ее значение в точке $b \in B$ стоит в формуле (1) справа от знака $\lim\limits_{\to\infty}$ есть функция первого класса Бэра, так как при всяких $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$ функция $f_k^{(m,q)}(\mathfrak{H},\cdot)$: непрерывна (это доказано в пп. 2, 3 доказательства теоремы 1). Поэтому (см. [4, с. 240—242, 162—164]) при всяких $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, $m \in \mathbf{N}$ множество $D_k^{(m)}$ точек непрерывности функции $\lim\limits_{q\to\infty} f_k^{(m,q)}(\mathfrak{H},\cdot) : B \to \mathbf{R}$ есть множество типа G_δ, всюду плотное в B.

Пересечение счетного множества всюду плотных множеств типа G_δ в полном метрическом пространстве B есть всюду плотное множество типа G_δ (теорема Бэра, см. [4, с. 163]), поэтому

$$D \underset{\text{def}}{=} \bigcap_{k\in\{1,\ldots,n-1\}} \bigcap_{m\in\mathbf{N}} D_k^{(m)}$$

есть всюду плотное множество типа G_δ в пространстве B. Из определения множества D следует, что при всяких $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, $m \in \mathbf{N}$ функция $\lim\limits_{q\to\infty} f_k^{(m,q)}(\mathfrak{H},\cdot) : B \to \mathbf{R}$ непрерывна во всякой точке $b \in D$. Так как при всяких $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, $b \in B$ имеет место равенство (см. формулу (1))

$$\mathcal{J}_k(\mathfrak{H}, b) = \inf_{m\in\mathbf{N}} \lim_{q\to\infty} f_k^{(m,q)}(\mathfrak{H}, b),$$

---

[12] Символом $g(\cdot)|_D$ обозначается сужение функции $g(\cdot) : A \to \mathbf{R}$ на множество $D \subset A$.

то в силу предложения 1 § 5 при всяком $k \in \{1,...,n-1\}$ функция $\mathcal{J}_k(\mathfrak{H},\cdot): B \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху во всякой точке $b \in D$. Теорема 3 доказана.

§8

Доказательство теоремы, сформулированной в § 1. Эта теорема следует из объединения теоремы § 3 и теоремы 3 § 7. Теорема § 1 доказана.

§9

1. Пусть на полном метрическом пространстве $\mathcal{B}$ задана динамическая система (т. е. непрерывное действие группы $\mathbf{R}$) f^t. Фиксируем в пространстве $\mathbf{R}^n$ скалярное произведение $\langle \cdot\, ,\, \cdot \rangle$. Множество всех непрерывных отображений $A(\cdot): \mathcal{B} \to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ (вместо $A(\cdot)$ пишем также A), удовлетворяющих условию $\sup\limits_{x \in \mathcal{B}} \|A(x)\| < +\infty$, наделим структурой метрического пространства, определив расстояние формулой:

$$d_S(A_1, A_2) \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{x \in \mathcal{B}} \|A_1(x) - A_2(x)\|.$$

Так определенное метрическое пространство обозначим через S. Как известно, пространство S полно.

Для всяких $A \in S$, $x \in \mathcal{B}$ рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x} \ (\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n).$$

Через $\mathfrak{X}(\theta, \tau; x, A)$ обозначим оператор Коши этой системы; напомним, что оператор Коши $\mathfrak{X}(\theta, \tau; x, A)$ по определению значению всякого решения системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$ в точке $t = \tau$ ставит в соответствие значение того же решения в точке $t = \theta$. Как известно, $\mathfrak{X}(\theta, \tau; x, A)$ при всяких $\theta \in \mathbf{R}$, $\tau \in \mathbf{R}$ непрерывно зависит от $(x, A) \in \mathcal{B} \times S$.

Положим

$$B = S \times \mathfrak{B},\ E = B \times \mathbf{R}^n,\ p = \mathrm{pr}_1 \tag{1}$$

(pr_1 — проекция произведения $B \times \mathbf{R}^n$ на первый сомножитель). Расстояние в B определяется формулой

$$d_B((A_1, x_1), (A_2, x_2)) \underset{\mathrm{def}}{=} d_S(A_1, A_2) + d_{\mathcal{B}}(x_1, x_2) \tag{2}$$

для всяких $A_1 \in S$, $A_2 \in S$, $x_1 \in \mathfrak{B}$, $x_2 \in \mathfrak{B}$ (где $d_{\mathfrak{B}}(\cdot,\cdot)$ — расстояние в метрическом пространстве $\mathfrak{B}$). Хорошо известно (и легко доказывается), что из полноты метрических пространств S и $\mathfrak{B}$ следует полнота метрического пространства B. Топологическое пространство E определяется как произведение топологических пространств B и $\mathbf{R}^n$ ($E = B \times \mathbf{R}^n$). E метризуемо и его топология индуцируется метрикой, определяемой по формуле

$$d_E((b_1, \mathfrak{x}_1), (b_2, \mathfrak{x}_2)) \underset{\mathrm{def}}{=} d_B(b_1, b_2) + |\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2| \tag{3}$$

(при всяких $b_1 \in B$, $b_2 \in B$, $\mathfrak{x}_1 \in \mathbf{R}^n$, $\mathfrak{x}_2 \in \mathbf{R}^n$).

Расслоение (E, p, B), определенное формулами (1), естественным образом наделяется структурой (тривиального) векторного расслоения со слоем $\mathbf{R}^n$. Подробнее: пусть $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$, $b \in B$, $\xi = (b, \mathfrak{x}) \in p^{-1}(b)$, $\eta = (b, \mathfrak{h}) \in p^{-1}(b)$ ($\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathfrak{h} \in \mathbf{R}^n$). Тогда положим по определению

$$\alpha\xi + \beta\eta = \alpha(b, \mathfrak{x}) + \beta(b, \mathfrak{h}) = (b, \alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{h}); \tag{4}$$

тем самым при всяком $b \in B$ на слое $p^{-1}(b)$ возникает структура векторного пространства (над полем вещественных чисел) (эту же структуру можно определить так: при всяком

$b\in B$ сужение $p_{2,b}$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения pr_2 (pr_2 — проекция произведения $B\times\mathbf{R}^n$ на второй сомножитель) есть взаимно однозначное отображение слоя $p^{-1}(b)$ на пространство $\mathbf{R}^n$; зададим на $p^{-1}(b)$ структуру векторного пространства (над полем вещественных чисел) так, чтобы $p_{2,b}$ было изоморфизмом векторных пространств); так определенная структура векторного пространства на всяком слое $p^{-1}(b)$ и вторая из формул (1) превращают расслоение (E,p,B) в (тривиальное) векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$.

На так определенном векторном расслоении (E,p,B) зададим риманову метрику, положив для всякого $b\in B$ и всяких $\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n$, $\mathfrak{h}\in\mathbf{R}^n$ по определению

$$\beta\big((b,\mathfrak{x}),(b,\mathfrak{h})\big)=\langle\mathfrak{x},\mathfrak{h}\rangle. \tag{5}$$

При всяком $t\in\mathbf{R}$ определим морфизм $\left(X^t,\chi^t\right)$ построенного векторного расслоения (E,p,B) формулами:

$$X^t(A,x,\mathfrak{x})=\left(A,f^t x,\mathfrak{X}(t,0;x,A)\right), \tag{6}$$

$$\chi^t(A,x)=\left(A,f^t x\right) \tag{7}$$

(при всяких $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$, $\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n$).

Так как для всяких $t\in\mathbf{R}$, $s\in\mathbf{R}$ имеет место формула

$$f^{t+s}=f^t f^s, \tag{8}$$

то из (7) непосредственно следует, что для всяких $t\in\mathbf{R}$, $s\in\mathbf{R}$ имеет место формула

$$\chi^{t+s}=\chi^t\chi^s. \tag{9}$$

Напомним очевидные тождества:

$$\mathfrak{X}\left(\theta,0;f^\tau x,A\right)=\mathfrak{X}\left(\theta+\tau,\tau;x,A\right), \tag{10}$$

$$\mathfrak{X}\left(\theta,\sigma;x,A\right)\mathfrak{X}\left(\sigma,\tau;x,A\right)=\mathfrak{X}\left(\theta,\tau;x,A\right), \tag{11}$$

$$\mathfrak{X}\left(\theta,\theta;x,A\right)=1_{\mathbf{R}^n}, \tag{12}$$

которым удовлетворяет оператор Коши $\mathfrak{X}(\theta,\tau;x,A)$ системы $\dot{\mathfrak{x}}=A\left(f^t x\right)\mathfrak{x}$. Для всяких $t\in\mathbf{R}$, $s\in\mathbf{R}$, $A\in S$, $x\in\mathcal{B}$, $\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n$ имеют место равенства:

$$X^tX^s(A,x,\mathfrak{x})=X^t\left(A,f^s x,\mathfrak{X}(s,0;x,A)\mathfrak{x}\right)=\left(A,f^{t+s}x,\mathfrak{X}\left(t,0;f^s x,A\right)\mathfrak{X}(s,0;x,A)\mathfrak{x}\right)=$$
$$=\left(A,f^{t+s}x,\mathfrak{X}(t+s,s;x,A)\mathfrak{X}(s,0;x,A)\mathfrak{x}\right)=\left(A,f^{t+s}x,\mathfrak{X}(t+s,0;x,A)\mathfrak{x}\right)=X^{t+s}(A,x,\mathfrak{x}).$$

Таким образом, для всяких $t\in\mathbf{R}$, $s\in\mathbf{R}$ выполнено равенство

$$X^{t+s}=X^tX^s. \tag{13}$$

При всяком $t\in\mathbf{R}$ имеют место формулы:

$$X^tX^{-t}\underset{(13)}{=}X^0\underset{(6),(12)}{=}1_E,\quad X^{-t}X^t\underset{(13)}{=}X^0\underset{(6),(12)}{=}1_E,$$

$$\chi^t\chi^{-t}\underset{(9)}{=}\chi^0\underset{(7)}{=}1_B,\quad \chi^{-t}\chi^t\underset{(9)}{=}\chi^0\underset{(7)}{=}1_B,$$

т. е. X^{-t},χ^{-t} — морфизм векторного расслоения (E,p,B), обратный морфизму $\left(X^t,\chi^t\right)$; следовательно, $\left(X^t,\chi^t\right)$ — автоморфизм векторного расслоения (E,p,B).

Таким образом (см. формулы (9), (13)), построен гомоморфизм $\mathfrak{H}$ группы $\mathbf{R}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения (E,p,B); образом $\mathfrak{H}t$ точки $t\in\mathbf{R}$ при этом гомоморфизме является $\left(X^t,\chi^t\right)$.

Определим функцию $a(\cdot):B\to\mathbf{R}^+$ формулой

$$a\left(\left(A,x\right)\right)=\sup_{y\in\mathcal{B}}\left\|A\left(y\right)\right\|. \qquad (14)$$

Имеем

$$a\left(\chi^t\left(A,x\right)\right)=a\left(\left(A,f^t x\right)\right)=\sup_{y\in\mathcal{B}}\left\|A\left(y\right)\right\|=a\left(\left(A,x\right)\right).$$

Из формулы (6) в силу известного неравенства

$$\left\|\mathfrak{X}\left(t,0;x,A\right)\right\|\leqslant\exp\left|\int_0^t\left\|A\left(f^s x\right)\right\|ds\right|\leqslant\exp\left(\left|t\right|a\left(\left(A,x\right)\right)\right),$$

которому удовлетворяет оператор Коши системы $\dot{\mathfrak{x}}=A\left(f^t x\right)\mathfrak{x}$ при всяких $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$, $t\in\mathbf{R}$, следует, что при всяких $b\in B$ выполнено неравенство

$$\left\|X^t\left[b\right]\right\|\leqslant\exp\left(\left|t\right|a\left(b\right)\right).$$

Построив векторное расслоение $\left(E,p,B\right)$ с римановой метрикой $\beta\left(\cdot,\cdot\right)$ и гомоморфизм $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}\left(\mathbf{R},\mathrm{Aut}\left(E,p,B\right)\right)$ и проверив для них условия, сформулированные во введении, можем теперь применить к этим объектам результаты предыдущих параграфов.

В следующем пункте теорема § 1 сформулирована применительно к ситуации, описанной в этом пункте.

Эта формулировка дана так, чтобы ее можно было понять, не обращаясь к предшествующему ей тексту настоящей статьи.

2. Пусть на полном метрическом пространстве $\mathfrak{B}$ задана динамическая система f^t (т. е. непрерывное действие группы $\mathbf{R}$). Фиксируем в пространстве $\mathbf{R}^n$ какую-нибудь евклидову структуру. Рассмотрим непрерывное отображение $A\left(\cdot\right):\mathfrak{B}\to\mathrm{Hom}\left(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n\right)$, удовлетворяющее условию

$$\sup_{x\in\mathcal{B}}\left\|A\left(x\right)\right\|<+\infty.$$

Множество всех таких отображений $A\left(\cdot\right)$ (вместо $A\left(\cdot\right)$ пишем также A) наделим структурой метрического пространства, определив расстояние формулой

$$d\left(A_1,A_2\right)=\sup_{x\in\mathcal{B}}\left\|A_1\left(x\right)-A_2\left(x\right)\right\|.$$

Так определенное полное метрическое пространство обозначим через S. При всяких $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$ рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathfrak{x}}=A\left(f^t x\right)\mathfrak{x}\ (\mathfrak{x}\in\mathbf{R}^n). \qquad (*)$$

Согласно Перрону, решения системы (*) называются *экспоненциально разделенными*[13] *с индексом* $k\in\{1,...,n-1\}$, если найдется k-мерное векторное подпространство $L^k\left(A,x\right)$ векторного пространства $L\left(A,x\right)$ всех решений системы (*) такое, что для всякого алгебраического дополнения L^{n-k} подпространства $L^k\left(A,x\right)$ пространства $L\left(A,x\right)$ существуют $t\in\mathbf{R}_*^+$, $\alpha\in\mathbf{R}_*^+$, $\beta\in\mathbf{R}_*^+$ такие, что для всяких ненулевых решений $\mathfrak{x}\left(\cdot\right)\in L^{n-k}$, $\mathfrak{h}\left(\cdot\right)\in L^k\left(A,x\right)$, для всяких вещественных чисел $t\geq s\geq 0$ имеет место неравенство

$$\left|\mathfrak{x}\left(t\right)\right|\left|\mathfrak{x}\left(s\right)\right|^{-1}\geqslant\alpha\left|\mathfrak{h}\left(t\right)\right|\left|\mathfrak{h}\left(s\right)\right|^{-1}\exp\left(\beta\left(t-s\right)\right).$$

Для всякого $k\in\{1,...,n-1\}$ обозначим через $S^{(k)}$ множество тех $\left(A,x\right)\in S\times\mathcal{B}$, для которых решения системы (*) экспоненциально разделены с индексом k.

[13] Подробнее: экспоненциально разделенными на $\mathbf{R}^+$.

Т е о р е м а. *В пространстве* $S\times\mathfrak{B}$ *имеется всюду плотное множество* D *типа* G_δ *такое, что*

$$S^{(k)}\bigcap D\subset \operatorname{Int}S^{(k)}$$

при всяком $k\in\{1,\ldots,n-1\}$.

§10

1. Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие (риманову метрику на нем обозначаем через $\delta(\cdot,\cdot)$ [14]. Через S обозначается множество всех диффеоморфизмов $f:V^n\to V^n$ класса C^1, отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию[15]

$$\sup_{x\in V^n}\max\left\{\left\|df_x\right\|,\left\|\left(df_x\right)^{-1}\right\|\right\}+\infty. \tag{1}$$

Множество S наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния

$$\tilde{d}_S\left(f,g\right)=\sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(fx,gx)}\left\{\min\left\{s\left(u\right),\left[1+\rho\left(x,x_0\right)\right]^{-1}\right\}+\left\|\varphi_u dg_x-df_x\right\|+\left\|\varphi_u dg_x-df_x\right\|\right\}, \tag{2}$$

здесь: x_0 — некоторая фиксированная точка многообразия V^n, $G\left(y,z\right)$ — множество всех кусочно-гладких путей, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y, $s\left(u\right)$ — длина пути u, $\rho\left(\cdot,\cdot\right)$ — расстояние между точками многообразия V^n, φ_u — преобразование, состоящее в параллельном перенесении касательных векторов вдоль пути u.

З а м е ч а н и е 1. Если V^n компактно (т. е. V^n — замкнутое многообразие), то метрика $\tilde{d}_S\left(\cdot,\cdot\right)$ индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\tilde{d}_1\left(\cdot,\cdot\right)$, определяемая формулой

$$\tilde{d}_1\left(f,g\right)=\sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(fx,gx)}\left\{s\left(u\right)+\left\|\varphi_u dg_x-df_x\right\|\right\}. \tag{3}$$

З а м е ч а н и е 2. Пусть $V^n=E^n$ (n-мерное евклидово пространство). Тогда метрика $\tilde{d}_S\left(\cdot,\cdot\right)$ индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\tilde{\tilde{d}}_S\left(\cdot,\cdot\right)$, определяемая формулой[16]:

$$\tilde{\tilde{d}}_1\left(f,g\right)=\left|fx_0-gx_0\right|+\sup_{x\in E^n}\left\|df_x-dg_x\right\|. \tag{4}$$

а) Множество S можно наделить также другой структурой метрического пространства, задав расстояние

$$d_S\left(f,g\right)\underset{\text{def}}{=}\sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(fx,gx)}\left\{\min\left\{s\left(u\right),\left[1+\rho\left(x,x_0\right)\right]^{-1}\right\}+\left\|\varphi_u dg_x-df_x\right\|+\left\|\left(\varphi_u dg_x\right)^{-1}-\left(df_x\right)^{-1}\right\|\right\} \tag{5}$$

(смысл обозначений разъяснен выше после формулы (2)). В [5, п. 3] доказано, что формула (5) (в [5] ей соответствует формула (5)) в самом деле определяет расстояние в S. В [5, п. 4а)] доказано, что формула (2) (которой в [5] соответствует формула (38)) тоже определяет расстояние в S. В [5, п. 4б)] доказано, что расстояние $d_S\left(\cdot,\cdot\right)$, определенное формулой (5), индуцирует на S ту же топологию, что и расстояние $\tilde{d}_S\left(\cdot,\cdot\right)$, определенное формулой (2).

---

[14] Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^3, риманова метрика $\delta(\cdot,\cdot)$ — классу C^2.

[15] Через df_x обозначается производная отображения f в точке x. Через $\|\cdot\|$ обозначается норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой.

[16] В случае $V^n=E^n$ касательные пространства стандартным образом отождествляются с E^n. После этого отождествления разность df_x-dg_x (и норма этой разности) приобретает смысл.

В силу предложения 1 [6] метрическое пространство (S, d_S) — полное.

б) Положим

$$B = S \times V^n, \; E = S \times TV^n, \; p = 1_S \times \pi, \tag{6}$$

где TV^n (соответственно π) — пространство (соответственно проекция) касательного расслоения (TV^n, π, V^n) многообразия V^n (таким образом, $T_x V^n = \pi^{-1}(x)$ при всяком $x \in V^n$).

Расстояние в B определяется формулой

$$\tilde{d}_B((f,x),(g,y)) = \tilde{d}_S((f,g) + \rho(x,y)) \tag{7}$$

для всяких $f \in S$, $g \in S$, $x \in V^n$, $y \in V^n$.

Можно определить другое расстояние в B формулой

$$d_B((f,x),(g,y)) = d_S((f,g) + \rho(x,y)) \tag{8}$$

для всяких $f \in S$, $g \in S$, $x \in V^n$, $y \in V^n$.

Так как расстояния $\tilde{d}_S(\cdot,\cdot)$ и $d_S(\cdot,\cdot)$ индуцируют на S одну и ту же топологию, то расстояния $\tilde{d}_B(\cdot,\cdot)$ и $d_B(\cdot,\cdot)$, определенные формулами (7) и (8), индуцируют на B одну и ту же топологию.

Топологическое пространство E определяется как произведение топологического пространства S (с топологией, индуцированной расстоянием $\tilde{d}_S(\cdot,\cdot)$; напомним, что эта топология совпадает с топологией, индуцированной расстоянием $d_S(\cdot,\cdot)$) и топологического пространства TV^n (TV^n стандартным образом наделено структурой дифференцируемого многообразия класса C^2, поскольку V^n — дифференцируемое многообразие класса C^3; структура дифференцируемого многообразия индуцирует топологию на TV^n).

Непрерывность отображения

$$p = 1_S \times \pi : E \to B$$

вытекает, в силу определения топологии на E и формулы (7), из непрерывности отображения $\pi : TV^n \to V^n$.

в) Расслоение (E, p, B), определенное формулой (6), естественным образом наделяется структурой векторного расслоения со слоем $\mathbf{R}^n$; а именно, векторное расслоение (E, p, B) определяется как векторное расслоение, индуцированное отображение $\mathrm{pr}_2 : S \times V^n \to V^n$ (pr_2 — проекция произведения на второй сомножитель) и касательным расслоением (TV^n, π, V^n) многообразия V^n.

г) На так определенном векторном расслоении (E, p, B) зададим риманову метрику $\Delta(\cdot,\cdot)$, положив для всяких $\xi \in E$, $\eta \in E$ таких, что $p\xi = p\eta$, по определению

$$\Delta(\xi, \eta) = \delta(\mathrm{pr}_2 \xi, \mathrm{pr}_2 \eta), \tag{9}$$

где pr_2 — проекция произведения $E = S \times TV^n$ на второй сомножитель, а $\delta(\cdot,\cdot)$ — риманова метрика, имеющаяся на V^n как на римановом многообразии. В [7, п. 1, § 1] доказано, что $\Delta(\cdot,\cdot)$, определенное формулой (9), является римановой метрикой векторного расслоения (E, p, B), определенного в подпунктах б), в).

д) При всяком $t \in \mathbf{Z}$ положим

$$\mathfrak{H} t \underset{\mathrm{def}}{=} (X^t, \chi^t), \tag{10}$$

где отображения $X:E\to E$, $\chi:B\to B$ определены следующим образом. Всякое $\xi\in E$ есть, согласно формуле (6), пара $(f,\mathfrak{x})$, где $f\in S$; $\mathfrak{x}\in TV^n$; полагаем

$$X\xi=X(f,\mathfrak{x})=(f,df\mathfrak{x}). \tag{11}$$

Всякое $b\in B$ есть, согласно формуле (6), пара (f,x), где $f\in S$, $x\in V^n$; полагаем

$$\chi b=\chi(f,x)=(f,fx). \tag{12}$$

Пара отображений (X,χ), определенных формулами (11), (12), есть автоморфизм векторного расслоения (E,p,B) (это доказано в [7, § 1, п. 2]). Поэтому формула (10) имеет смысл и определяет гомоморфизм $\mathfrak{H}\in\operatorname{Hom}(\mathbf{Z},\operatorname{Aut}(E,p,B))$, где через $\operatorname{Hom}(\mathbf{Z},\operatorname{Aut}(E,p,B))$ обозначается множество гомоморфизмов группы $\mathbf{Z}$ в группу $\operatorname{Aut}(E,p,B)$ автоморфизмов векторного расслоения (E,p,B).

e) Положим

$$a(f,x)\underset{\text{def}}{=}\sup_{y\in V^n}\max\left\{\left\|df_y\right\|,\left\|df_y\right\|^{-1}\right\} \tag{13}$$

для всяких $f\in S$, $x\in V^n$; в [7, § 1, п. 3] доказано, что формула (13) (в цитируемой статье эта формула имеет номер (1.53)) определяет отображение $a(\cdot):B\to\mathbf{R}^+$. Для так определенной функции $a(\cdot):B\to\mathbf{R}^+$ и отображения $\chi:B\to B$, определенного формулой (12), для всякого $b\in B$ выполнено равенство

$$a(\chi b)=a(b) \tag{14}$$

(докажем это: для всякого $b\in B$ имеем $b=(f,x)$, где $f\in S$, $x\in V^n$; поэтому

$$\chi b=\chi(f,x)=(f,fx);$$

но $a((f,x))=a((f,fx))$, так как $a((f,x))=a((f,y))$ для всяких $f\in S$, $x\in V^n$, $y\in V^n$, что и требовалось доказать). Далее, для функции $a(\cdot):B\to\mathbf{R}^+$, определенной формулой (13), и отображения $X:E\to E$, определенного формулой (11), для всякого $b\in B$ выполнено неравенство[17]

$$\max\left\{\left\|X[b]\right\|,\left\|X[b]\right\|^{-1}\right\}\leqslant\exp(a(b)). \tag{15}$$

Докажем это. Для всякого $b\in B$ имеем $b(f,x)$, где $f\in S$, $x\in V^n$; всякое $\xi\in p^{-1}(b)$ есть, согласно формуле (6), пара $(f,\mathfrak{x})$, где $\mathfrak{x}\in\pi^{-1}(x)$; поэтому

$$\left\|X(b)\right\|=\sup_{\xi\in p_*^{-1}(b)}\left(\left|X\xi\right|\left|\xi\right|^{-1}\right)=\sup_{\xi\in p_*^{-1}(b)}\left(\left(\Delta(X\xi,X\xi)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\Delta(\xi,\xi)\right)^{-\frac{1}{2}}\right); \tag{16}$$

подставив в формулу (16) равенства

$$\xi=(f,\mathfrak{x}),\ X\xi=X(f,\mathfrak{x})=(f,df\mathfrak{x}) \tag{17}$$

и воспользовавшись равенством (9), получаем

$$X(b)\|=\sup_{\mathfrak{x}\in\pi_*^{-1}(x)}\left(\left(\delta(df\mathfrak{x},df\mathfrak{x})\right)^{\frac{1}{2}}\left(\delta(\mathfrak{x},\mathfrak{x})\right)^{-\frac{1}{2}}\right)=\left\|df_x\right\|\leqslant\exp(a((f,x)))=\exp(a(b)). \tag{18}$$

Далее, так как (X,χ) — автоморфизм векторного расслоения (E,p,B), то $(X[b])^{-1}$ существует при всяком $b\in B$ и

[17] Напомним, что через $X[b]$ обозначается сужение X на слой $p^{-1}(b)$.

$$\left\| \left(X[b] \right)^{-1} \right\| = \sup_{\xi \in p_*^{-1}(b)} \left(|\xi| |X\xi|^{-1} \right) = \sup_{\xi \in p_*^{-1}(b)} \left(\left(\Delta(\xi,\xi) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\Delta(X\xi, X\xi) \right)^{-\frac{1}{2}} \right). \tag{19}$$

Подставив в формулу (19) равенства (17) и воспользовавшись равенством (9), получаем

$$\begin{gathered} \left\| \left(X[b] \right)^{-1} \right\| = \sup_{\mathfrak{x} \in \pi_*^{-1}(x)} \left(\left(\delta(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\delta(df\mathfrak{x}, df\mathfrak{x}) \right)^{-\frac{1}{2}} \right) = \\ = \left\| \left(df_x \right)^{-1} \right\| \leqslant \exp\left(a\left((f,x) \right) \right) = \exp\left(a(b) \right). \end{gathered} \tag{20}$$

Объединением неравенств (18), (20) заканчивается доказательство неравенства (15).

Таким образом, автоморфизм $(X,\chi) \in \mathrm{Aut}(E,p,B)$, определенный формулами (11), (12), удовлетворяет условиям п. 1.2 введения [7] (формулы (В.1.1), (В.1.2) цитируемой статьи совпадают с формулами (14), (15) соответственно). В п. 1.4 введения [7] доказано: из того, что автоморфизм (X,χ) удовлетворяет условиям п. 1.2 введения [7], следует, что для гомоморфизма $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\left(\mathbf{Z}, \mathrm{Aut}(E,p,B)\right)$, определенного формулой (10), имеют место формула (В.1.4) из [7] (при всяких $b \in B$, $m \in \mathbf{N}$) и формула (В.1.6) из [7] (при всяких $b \in B$, $m \in \mathbf{Z}$), т. е. выполнены условия п. 2 введения. Результаты §§ 1—8 можно применить к построенному в этом пункте векторному расслоению (E,p,B) с римановой метрикой $\Delta(\cdot,\cdot)$ и гомоморфизму $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\left(\mathbf{Z}, \mathrm{Aut}(E,p,B)\right)$, так как эти объекты удовлетворяют условиям, сформулированным во введении. В следующем пункте теорема § 1 формулируется для объектов, построенных в этом пункте. Формулировка дана так, чтобы ее можно было понять, не обращаясь к предшествующему ей тексту статьи.

2. Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие[18]. Через S обозначается множество всех диффеоморфизмов $f: V^n \to V^n$ класса C^1, отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in V^n} \max\left\{ \|df_x\|, \left\| (df_x)^{-1} \right\| \right\} < +\infty .$$

В множестве S определяется расстояние

$$\tilde{d}_S(f,g) = \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(fx,gx)} \left\{ \min\left\{ s(u), \left[1 + \rho(x,x_0) \right]^{-1} \right\} + \left\| \varphi_u dg_x - df_x \right\| \right\};$$

здесь x_0 — некоторая фиксированная точка многообразия V^n; $G(y,z)$ — множество всех кусочно-гладких путей u, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y, $s(u)$ — длина пути u; $\rho(\cdot,\cdot)$ — расстояние между точками многообразия V^n; φ_u — преобразование, состоящее в параллельном перенесении касательных векторов вдоль пути u.

Согласно Перрону, диффеоморфизм $f \in S$ называется *экспоненциально разделенным*[19] *с индексом* $k \in \{1,\dots,n-1\}$ *в точке* $x \in V^n$, если найдется k-мерное векторное подпространство $l^k(f,x)$ касательного пространства T_xV^n многообразия V^n в точке x такое, что для всякого алгебраического дополнения l^{n-k} подпространства $l^k(f,x)$ пространства T_xV^n существуют $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*^+$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\mathfrak{x} \in l^{n-k}$, $\mathfrak{h} \in l^k(f,x)$ и всяких целых чисел $t \geqslant s \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\left| df^t \mathfrak{x}(t) \right| \left| df^s \mathfrak{x}(s) \right|^{-1} \geqslant \alpha \left| df^t \mathfrak{h} \right| \left| df^s \mathfrak{h} \right|^{-1} \exp\left(\beta(t-s) \right).$$

---

[18] Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^3, риманова метрика — классу C^2.

[19] Подробнее: экспоненциально разделенным на $\mathbf{Z}^+$.

Для всякого $k \in \{1,...,n-1\}$ через $S^{(k)}$ обозначим множество тех $(f,x) \in S \times V^n$, для которых диффеоморфизм f экспоненциально разделен с индексом k в точке x.

Теорема. *В пространстве $S \times V^n$ имеется всюду плотное множество D типа G_δ такое, что*

$$S^{(k)} \bigcap D \subset \mathrm{Int} S^{(k)}$$

при всяком $k \in \{1,...,n-1\}$.

§11

1. Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие[20]. Через S обозначается множество всех диффеоморфизмов $f: V^n \to V^n$ класса C^1, отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in V^n} \max\left\{\|df_x\|, \left\|(df_x)^{-1}\right\|\right\} < +\infty. \tag{1}$$

Для всякого $j \in S$ через S_j обозначается подмножество множества S, состоящее из диффеоморфизмов f, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in V^n} \rho(fx, jx) < +\infty,$$

где $\rho(\cdot,\cdot)$ — расстояние в V^n.

Для всякого $j \in S$ множество S_j наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния

$$\widetilde{d}_1(f,g) = \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(fx,gx)} \left\{s(u) + \|\varphi_u dg_x - df_x\|\right\}; \tag{2}$$

здесь: $G(y,z)$ — множество всех кусочно-гладких путей u, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y, $s(u)$ — длина пути u, φ_u — преобразование, состоящее в параллельном перенесении касательных векторов вдоль пути u.

Замечание. Пусть $V^n = E^n$ (n-мерное евклидово пространство). Тогда метрика $\widetilde{d}_1(\cdot,\cdot)$ индуцирует на S_j ту же топологию, что и метрика $\widetilde{\widetilde{d}}_S(\cdot,\cdot)$, определяемая формулой[21]:

$$\widetilde{\widetilde{d}}_1(f,g) = \sup_{x \in V^n}\left(|fx - gx| + |df_x - dg_x|\right).$$

а) При всяком $j \in S$ множество S_j можно наделить также другой структурой метрического пространства, задав расстояние

$$d_1(f,g) \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(fx,gx)} \left\{s(u) + \|\varphi_u dg_x - df_x\| + \left\|(\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1}\right\|\right\} \tag{3}$$

(смысл обозначений разъяснен выше после формулы (2)). В [5, п. 5] доказано, что при всяком $j \in S$ формулы (2), (3) в самом деле определяют расстояния в S_j. В [5, п. 5] доказано, что при всяком $j \in S$ расстояние $d_1(\cdot,\cdot)$, определенное формулой (3) (в [5] ей соответствует формула (55)), индуцирует на S_j ту же топологию, что и расстояние $\widetilde{d}_1(\cdot,\cdot)$, определенное формулой (2) (которой в [5] соответствует формула (56)). В силу предложения 2 из [6] метрическое пространство (S_j, d_1) — полное (при всяком $j \in S$).

---

[20] Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^3, риманова метрика — классу C^2.

[21] В случае $V^n = E^n$ касательные пространства стандартным образом отождествляются с E^n. После этого отождествления разность $df_x - dg_x$ (и норма этой разности) приобретает смысл.

б) При всяком $j \in S$ положим

$$B_j = S_j \times V^n, \; E_j = S_j \times TV^n, \; p_j = 1_{S_j} \times \pi, \tag{4}$$

где TV^n — пространство касательного расслоения $\left(TV^n, \pi, V^n\right)$ многообразия V^n, π — проекция этого расслоения (таким образом, $T_x V^n = \pi^{-1}(x)$ при всяком $x \in V^n$). При всяком $j \in S$ расстояние в B_j определяется формулой

$$\tilde{d}\left((f,x),(g,y)\right) = \tilde{d}_1\left((f,g) + \rho(x,y)\right) \tag{5}$$

при всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$, $x \in V^n$, $y \in V^n$. При всяком $j \in S$ можно определить другое расстояние в B_j формулой

$$d\left((f,x),(g,y)\right) = d_1\left((f,g) + \rho(x,y)\right) \tag{6}$$

для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$, $x \in V^n$, $y \in V^n$.

Так как при всяком $j \in S$ расстояние $d_1(\cdot,\cdot)$ индуцирует на S_j ту же топологию, что и расстояние $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$, то при всяком $j \in S$ расстояние $d(\cdot,\cdot)$, определенное формулой (6), индуцирует на B_j ту же топологию, что и расстояние $\tilde{d}(\cdot,\cdot)$, определенное формулой (5).

При всяком $j \in S$ топологическое пространство E_j определяется как произведение топологического пространства S_j (с топологией, индуцированной расстоянием $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$; напомним, что эта топология совпадает с топологией, индуцированной расстоянием $d_1(\cdot,\cdot)$) и топологического пространства TV^n.

Непрерывность отображения

$$p_j = 1_{S_j} \times \pi : E_j \to B_j$$

вытекает (при всяком $j \in S$) в силу определения топологии на E_j и формулы (5) из непрерывности отображения $\pi : TV^n \to V^n$.

в) При всяком $j \in S$ расслоение, определенное формулой (4), естественным образом наделяется структурой векторного расслоения со слоем $\mathbf{R}^n$; а именно, векторное расслоение $\left(E_j, p_j, B_j\right)$ определяется как векторное расслоение, индуцированное отображением $\mathrm{pr}_2 : S_j \times V^n \to V^n$ (pr_2 — проекция произведения на второй сомножитель) и касательным расслоением $\left(TV^n, \pi, V^n\right)$ многообразия V^n (библиографические указания и эквивалентное определение с помощью атласов см. в [7, п. 1, § 11]).

г) При всяком $j \in S$ на так определенном векторном расслоении $\left(E_j, p_j, B_j\right)$ зададим риманову метрику $\Delta_j(\cdot,\cdot)$, положив для всяких $\xi \in E_j$, $\eta \in E_j$ таких, что $p_j\xi = p_j\eta$, по определению

$$\Delta_j(\xi,\eta) = \delta\left(\mathrm{pr}_2\xi, \mathrm{pr}_2\eta\right), \tag{7}$$

где pr_2 — проекция произведения $E_j = S \times TV^n$ на второй сомножитель, а $\delta(\cdot,\cdot)$ — риманова метрика, имеющаяся на V^n как на римановом многообразии. Легко доказывается (это доказательство подробно изложено в п. 1 § 1 [7]), что $\Delta_j(\cdot,\cdot)$, определенное формулой (7), является римановой метрикой векторного расслоения $\left(E_j, p_j, B_j\right)$, определенного в подпунктах б), в).

д) При всяком $j \in S$, при всяком $t \in \mathbf{Z}$ положим

$$\mathfrak{H}_j t = \left(X_j^t, \chi_j^t\right), \tag{8}$$

где отображения $X_j : E \to E$, $\chi_j : B \to B$ определены следующим образом:

всякое $\xi \in E_j$ есть, согласно формуле (4), пара $(f, \mathfrak{x})$, где $f \in S_j$; $\mathfrak{x} \in TV^n$; полагаем

$$X_j \xi = X_j(f, \mathfrak{x}) = (f, df\mathfrak{x}); \tag{9}$$

всякое $b \in B_j$ есть, согласно формуле (4), пара (f, x), где $f \in S_j$, $x \in V^n$; полагаем

$$\chi_j b = \chi_j(f, x) = (f, fx). \tag{10}$$

При всяком $j \in S$ пара отображений (X_j, χ_j), определенных формулами (9), (10), есть автоморфизм векторного расслоения (E_j, p_j, B_j) (это доказано в [7] — см. п. 2 § 1 и замечание 2 в конце § 1 цитируемой статьи).

Поэтому при всяком $j \in S$ формула (8) имеет смысл и определяет гомоморфизм $\mathfrak{H}_j \in \mathrm{Hom}\big(\mathbf{Z}, \mathrm{Aut}(E_j, p_j, B_j)\big)$ (гомоморфизм группы $\mathbf{Z}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения (E_j, p_j, B_j)).

е) При всяком $j \in S$ отображение $X_j : E_j \to E_j$ (соответственно $\chi_j : B_j \to B_j$) является, как видно из сравнения формулы (9) с формулой (11) § 10 (соответственно, формулы (10) с формулой (12) § 10), сужением на множество[22]

$$E_j = S_j \times TV^n \subset S \times TV^n \underset{(10.6)}{=} E$$

отображения $X : E \to E$, определенного формулой (11) § 10 (соответственно, сужением на множество

$$B_j = S_j \times V^n \subset S \times V^n \underset{(10.6)}{=} B$$

отображения $\chi : B \to B$, определенного формулой (12) § 10).

В п. 1е § 10 доказано, что для функции $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$, определенной формулой (13) § 10, и отображений $X : E \to E$, $\chi : B \to B$, определенных формулами (11) § 10, (12) § 10, при всяком $b \in B$ имеют место равенство

$$a(\chi b) = a(b)$$

(это — формула (14) § 10) и неравенство

$$\max\left\{\left\|X[b]\right\|, \left\|X[b]\right\|^{-1}\right\} \leqslant \exp\big(a(b)\big)$$

(это — формула (15) § 10).

Следовательно, при всяком $j \in S$ для функции $a_j(\cdot) : B_j \to \mathbf{R}^+$, определяемой как сужение на B_j функции $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$, определенной формулой (13) § 10), и отображений $X_j : E_j \to E_j$, $\chi_j : B_j \to B_j$, определенных формулами (9), (10), при всяком $b \in B_j$ имеют место равенство

$$a_j(\chi_j b) = a_j(b) \tag{11}$$

и неравенство

$$\max\left\{\left\|X_j[b]\right\|, \left\|X_j[b]\right\|^{-1}\right\} \leqslant \exp\big(a_j(b)\big). \tag{12}$$

Таким образом, при всяком $j \in S$ автоморфизм $(X_j, \chi_j) \in \mathrm{Aut}(E_j, p_j, B_j)$, определенный формулами (9), (10), удовлетворяет условиям пп. 1, 2 введения [7] (формулам (В.1.1), (В.1.2) цитируемой статьи соответствуют формулы (11), (12)). В п. 1.4 введения [7] доказано: из того, что для автоморфизма $(X_j, \chi_j) \in \mathrm{Aut}(E_j, p_j, B_j)$ при

---

[22] Ссылка на формулу (M, N) есть краткая запись ссылки на формулу $(\mathrm{N})\S\mathrm{M}$.

всяком $b \in B_j$ имеют место формулы (11), (12), следует, что для гомоморфизма $\mathfrak{H}_j \in \mathrm{Hom}\left(\mathbf{Z}, \mathrm{Aut}\left(E_j, p_j, B_j\right)\right)$, определенного формулой (8), имеет место формула[23]

$$\max\left\{\left\|X_j\left(m,b\right)\right\|, \left\|X_j\left(m,b\right)\right\|^{-1}\right\} \leqslant \exp\left(ma_j\left(b\right)\right)$$

(при всяких $b \in B_j$, $m \in \mathbf{N}$) (в цитируемой статье этой формуле соответствует формула (В. 1.4)) и формула

$$a_j\left(\chi^m b\right) = a_j\left(b\right)$$

(при всяких $b \in B_j$, $m \in \mathbf{Z}$) (в цитируемой статье этой формуле соответствует формула (В.1.6)), т. е. выполнены условия п. 2 введения.

При всяком $j \in S$ к векторному расслоению $\left(E_j, p_j, B_j\right)$ с римановой метрикой $\Delta_j\left(\cdot,\cdot\right)$ и гомоморфизму $\mathfrak{H}_j \in \mathrm{Hom}\left(\mathbf{Z}, \mathrm{Aut}\left(E_j, p_j, B_j\right)\right)$, построенным в этом пункте, применимы результаты §§ 1—8, так как построенные объекты удовлетворяют условиям, сформулированным во введении. В следующем пункте теорема § 1 формулируется применительно к этим объектам, притом так, чтобы формулировку можно было понять, прочитав только п. 2 § 10.

2. Для всякого $j \in S$ через S_j обозначается подмножество множества S, состоящее из диффеоморфизмов f, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{x \in V^n} \rho\left(fx, jx\right) < +\infty$ (если V^n компактно (т. е. замкнутое многообразие), то $S_j = S$ для всякого $j \in S$).

Через $\widetilde{d}_1$ обозначается расстояние в S_j, определяемое формулой

$$\widetilde{d}_1\left(f,g\right) = \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G\left(fx, gx\right)} \left\{s\left(u\right) + \left\|\varphi_u dg_x - df_x\right\|\right\}.$$

Через $S_j \times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S_j (с топологией, индуцированной метрикой $\widetilde{d}_1\left(\cdot,\cdot\right)$) и топологического пространства V^n. Для всяких $j \in S$, $k \in \left\{1,...,n-1\right\}$ положим $S_j^{(k)} = S^{(k)} \bigcap \left(S_j \times V^n\right)$, т. е. обозначим через $S_j^{(k)}$ множество тех $\left(f,x\right) \in S_j \times V^n$, для которых диффеоморфизм f экспоненциально разделен с индексом k в точке x.

Для всякого $j \in S$ имеет место следующая

Теорема. *В пространстве $S_j \times V^n$ имеется всюду плотное множество D_j типа G_δ такое, что*

$$S_j^{(k)} \bigcap D_j \subset \mathrm{Int} S_j^{(k)}$$

при всяком $k \in \left\{1,...,n-1\right\}$.

§12

Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие[24]. Через S обозначается множество всех векторных полей F класса C^1 на V^n, удовлетворяющих условию[25]

---

[23] $X_j\left(m,b\right) \underset{\mathrm{def}}{=} X_j^m\left(b\right)$ — сужение отображения X_j^m на слой $p_j^{-1}\left(b\right)$.

[24] Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^3, риманова метрика — классу C^2.

[25] Через $\nabla F\left(x\right)$ обозначается ковариантный дифференциал векторного поля F в точке x. Через $\|\cdot\|$ обозначается норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой.

$$\sup_{x\in V^n}\left\|\nabla F(x)\right\| < +\infty .$$

В множестве S определяется расстояние

$$d(F,G) = \left|F(x_0) - G(x_0)\right| + \sup_{x\in V^n}\left\|\nabla F(x) - \nabla G(x)\right\|,$$

где x_0 — некоторая фиксированная точка многообразия V^n.

Всякое векторное поле $F \in S$ индуцирует гладкое (класса C^1) действие f^t группы $\mathbf{R}$ на V^n.

Через $S \times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S (с топологией, индуцированной метрикой $d(\cdot,\cdot)$) и топологического пространства V^n.

Для всякого $J \in S$ через S_J обозначается подмножество множества S, состоящее из векторных полей, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{x\in V^n}\left|F(x) - J(x)\right| < +\infty$ (если V^n компактно (т. е. — замкнутое многообразие), то $S_J = S$ для всякого $J \in S$).

Через $d_1(\cdot,\cdot)$ обозначается расстояние в S_J, определяемое формулой

$$d_1(F,G) \underset{\text{def}}{=} \sup_{y\in V^n}\left|F(x) - G(x)\right| + \sup_{y\in V^n}\left\|\nabla(F-G)(x)\right\|.$$

Для всякого $J \in S$ через $S_J = V^n$ обозначается произведение топологического пространства S_J (с топологией, индуцированной метрикой $d_1(\cdot,\cdot)$) и топологического пространства V^n.

Согласно определению Перрона, гладкое действие f^t группы $\mathbf{R}$ на V^n индуцированное векторным полем $F \in S$, называется э к с п о н е н ц и а л ь н о р а з д е л е н н ы м с и н д е к с о м $k \in \{1,...,n-1\}$ в т о ч к е $x \in V^n$, если в касательном пространстве T_xV^n многообразия V^n в точке x найдется k-мерное векторное подпространство $L^k(F,x)$ такое, что для всякого алгебраического дополнения L^{n-k} подпространства $L^k(F,x)$ (в касательном пространстве T_xV^n) существуют $\alpha \in \mathbf{R}^+_*$, $\beta \in \mathbf{R}^+_*$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\mathfrak{x}(\cdot) = L^{n-k}$, $\mathfrak{h}(\cdot) \in L^k(F,x)$, для всяких $t \in \mathbf{R}^+$, $s \in \mathbf{R}^+$ таких, что $t \geq s$, имеет место неравенство

$$\left|f^t\mathfrak{x}(t)\right|\left|f^s\mathfrak{x}(s)\right|^{-1} \geqslant \alpha\left|f^t\mathfrak{h}\right|\left|f^s\mathfrak{h}\right|^{-1}\exp\left(\beta(t-s)\right).$$

Для всякого $k \in \{1,...,n-1\}$ обозначим через $S^{(k)}$ множество тех $(F,x) \in S \times V^n$, для которых гладкое действие f^t группы $\mathbf{R}$ на V^n, индуцированное векторным полем F, экспоненциально разделено с индексом k в точке x. Для всяких $k \in \{1,...,n-1\}$, $J \in S$ положим $S_j^{(k)} = S^{(k)} \bigcap \left(S_j \times V^n\right)$. Имеет место следующая

Т е о р е м а. *В пространстве* $S \times V^n$ *имеется всюду плотное множество* D *типа* G_δ *такое, что*

$$S^{(k)} \bigcap D \subset \operatorname{Int} S^{(k)}$$

при всяком $k \in \{1,...,n-1\}$.

Для всякого $J \in S$ имеет место следующая

Т е о р е м а $_J$. *В пространстве* $S_J \times V^n$ *имеется всюду плотное множество* D_J *типа* G_δ *такое, что*

$$S_J^{(k)} \bigcap D_J \subset \operatorname{Int} S_J^{(k)}$$

при всяком $k \in \{1,...,n-1\}$.

Сформулированные теоремы выводятся из теоремы § 1 с помощью следующих конструкций.

Положим $B = S \times V^n$. Так как S и V^n — полные метрические пространства, то B — полное метрическое пространство. Положим

$$E = S \times TV^n,\ p = 1_S \times \pi.$$

Так определенное расслоение (E, p, B) наделяется структурой векторного расслоения (со слоем $\mathbf{R}^n$) заданием атласа (см. [2, гл. 3, раздел 1; гл. 5, раздел 2])

$$\left\{g_i : (S \times U_i) \times \mathbf{R}^n \to p^{-1}(S \times U_i)\right\}_{i \in I}$$

определенного по атласу

$$\left\{h_i : U_i \times \mathbf{R}^n \to \pi^{-1}(U_i)\right\}_{i \in I}$$

(где I — некоторое множество) векторного расслоения (TV^n, π, V^n) формулой $g_i = 1_S \times h_i$ (чтобы придать смысл этой формуле, надо рассмотреть $(S \times U_i) \times \mathbf{R}^n$ как $S \times (U_i \times \mathbf{R}^n)$). Так определенное векторное расслоение (E, p, B) можно эквивалентным образом определить как векторное расслоение, индуцированное отображением $\mathrm{pr}_2 : S \times V^n \to V^n$ (pr_2 — проекция произведения на второй сомножитель) и векторным расслоением (TV^n, π, V^n) (см. [2, гл. 2, п. 5.3 и гл. 3, п. 3.1]).

Векторное расслоение (E, p, B) со слоем $\mathbf{R}^n$ и базой B, являющейся полным метрическим пространством, построено. На векторном расслоении (TV^n, π, V^n) имеется риманова метрика (класса C^2), т. е. гладкое (класса C^2) отображение δ подпространства прямого произведения $TV^n \times TV^n$, состоящего из всех тех точек $(\mathfrak{x}, \mathfrak{h})$, для которых $\pi\mathfrak{x} = \pi\mathfrak{h}$, в $\mathbf{R}$ такое, что для всякого $x \in V^n$ сужение на векторное пространство $\pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x)$ отображения δ является скалярным произведением на слое $\pi^{-1}(x)$. Рассмотрим подпространство прямого произведения $E \times E$, состоящее из всех тех точек (ξ, η), для которых $p\xi = p\eta$. Зададим отображение этого подпространства в $\mathbf{R}$ формулой

$$\Delta(\xi, \eta) = \delta(\mathrm{pr}_2 \xi, \mathrm{pr}_2 \eta)$$

где через pr_2 обозначаем проекцию произведения $E = S \times TV^n$ на второй сомножитель. Обозначим через p_2 проекцию произведения $B = S \times V^n$ на второй сомножитель. Обозначим через $\mathrm{pr}_{2,b}$ сужение pr_2 на слой $p^{-1}(b)$. Так как для всякого $b \in B$ отображение $\mathrm{pr}_{2,b}$ есть изоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство $\pi^{-1}(p_2 b)$, а сужение δ на $\pi^{-1}(p_2 b) \times \pi^{-1}(p_2 b)$ является скалярным произведением на слое $\pi^{-1}(p_2 b)$, то для всякого $b \in B$ сужение Δ на $p^{-1}(b) \times p^{-1}(b)$ является скалярным произведением на слое $p^{-1}(b)$. Так как отображения pr_2 и δ непрерывны, то отображение Δ непрерывно. Таким образом, мы зафиксировали риманову метрику Δ на векторном расслоении (E, p, B).

Пусть $F \in S$; векторное поле F индуцирует дифференцируемое (класса C^1) действие f^t группы $\mathbf{R}$ на многообразии V^n.

Через df^t обозначим производную отображения f^t. При всяком $t \in \mathbf{R}$ пара отображений

$$(df^t, f^t) : (TV^n, \pi, V^n) \to (TV^n, \pi, V^n)$$

является автоморфизмом касательного расслоения $\left(TV^n, \pi, V^n\right)$ многообразия V^n.

Для всяких $t \in \mathbf{R}$, $F \in S$, $\mathfrak{x} \in TV^n$ полагаем

$$X^t\left(F, \mathfrak{x}\right) = \left(F, df^t \mathfrak{x}\right).$$

Для всяких $t \in \mathbf{R}$, $F \in S$, $x \in V^n$ полагаем

$$\chi^t\left(F, x\right) = \left(F, f^t x\right)$$

Гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \operatorname{Hom}\left(\mathbf{R}, \operatorname{Aut}\left(E, p, B\right)\right)$ определяется формулой $\mathfrak{H}t = \left(X^t, \chi^t\right)$ (для всякого $t \in \mathbf{R}$).

Определим функцию $a(\cdot)$ следующим образом: всякое $b \in B$ есть пара $\left(F, x\right)$, где $F \in S$, $x \in V^n$. Положим

$$a\left(b\right) = a\left(F, x\right) = \left\|\nabla F\right\| = \sup_{x \in V^n}\left\|\nabla F\left(x\right)\right\|.$$

Из определения пространства S следует, что только что определенная функция $a(\cdot)$ отображает B в $\mathbf{R}^+$.

Так определенные объекты удовлетворяют условиям, сформулированным во введении (см. § 1 в [8]), а сформулированная выше теорема является конкретизацией теоремы § 1 для этих объектов.

Для всякого $J \in S$ по определенному выше в этом параграфе векторному расслоению строится (сужением базы, вместо базы $B = S \times V^n$, берется база $B_J = S_J \times V^n$) векторное расслоение $\left(E_j, p_j, B_j\right)$ с римановой метрикой $\Delta_J\left(\cdot,\cdot\right)$, определяемой как сужение римановой метрики $\Delta\left(\cdot,\cdot\right)$. Гомоморфизм $\mathfrak{H}_j \in \operatorname{Hom}\left(\mathbf{Z}, \operatorname{Aut}\left(E_j, p_j, B_j\right)\right)$ определяем формулой

$$\mathfrak{H}_J t = \left(X_J^t, \chi_J^t\right) \ (t \in \mathbf{R}),$$

где X_J^t — сужение на E_J отображения $X^t : E \to E$, а χ_J^t — сужение на B_J отображения $\chi^t : B \to B$.

Сформулированная выше теорема $_J$ является конкретизацией теоремы § 1 для так определенного гомоморфизма $\mathfrak{H}_J$.

З а м е ч а н и е. От каждого из пространств S, S_j, S_J, рассмотренных в §§ 9—12, можно перейти к любому замкнутому подмножеству. Так получаются аналоги теорем §§ 9—12 для систем с инвариантной мерой, гамильтоновых систем (симплектических диффеоморфизмов), вообще для систем с заданным множеством интегральных инвариантов, а также для любой индивидуальной системы (последнее — если от пространств типа S перейти к их одноточечным подмножествам).

Литература

1. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. X. — Дифф. уравнения, 1982, т. 18, № 12, с. 2132—2148.

2. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.

3. *Baire R.* Legons sur les fonctions discontinues. Paris: Gauthier — Villars, 1905.

4. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.-Л.: ОНТИ, 1937.

5. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VI. — Дифф. уравнения, 1982, т. 18, № 5, с. 804—821.

6. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VII. — Дифф. уравнения, 1982, т. 18, № 6, с. 957—978.

7. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VIII. — Дифф. уравнения, 1982, т. 18, № 8, с. 1330—1345.
8. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. III. — Дифф. уравнения, 1980, т. 16, № 10, с. 1766—1785.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
19.IX.1983