МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 36, № 4 (1984)

ТИПИЧНОСТЬ СТАБИЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

В. М. Миллионщиков

§ 1. Пусть в окрестности точки $x_0 \in \mathbf{R}^n$ задано автономное дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$, правая часть которого $f(\cdot)$ непрерывно дифференцируема и обращается в этой точке в нуль. Если действительные части всех собственных значений производной df_{x_0} отрицательны, то неподвижная точка x_0 уравнения $\dot{x} = f(x)$ экспоненциально устойчива (теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению [1]).

Из экспоненциальной устойчивости нулевого решения уравнения в вариациях автономного дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$ вдоль решения $x(\cdot)$ не всегда вытекает устойчивость решения $x(\cdot)$. В этом можно убедиться, рассматривая пример Перрона [2] (см. [3] гл. IV п. 9):

$$\begin{cases} \dot{u} = -\alpha u, \\ \dot{v} = (\sin\ln t + \cos\ln t - 2\alpha)v + u^2. \end{cases} \tag{1}$$

При $\alpha > 1/2$ нулевое решение системы уравнений в вариациях системы (1) в нуле

$$\begin{cases} \dot{u} = -\alpha u, \\ \dot{v} = (\sin\ln t + \cos\ln t - 2\alpha)v \end{cases} \tag{2}$$

экспоненциально устойчиво, так как старший показатель Ляпунова системы (2) равен $\max\{-\alpha,\ 1-2\alpha\}$; но при $\alpha \in \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\exp(-\pi)\right)$ нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Результат настоящей статьи состоит в следующем. Стабильная (т. е. сохраняющаяся при малых возмущениях уравнения и начального значения) устойчивость по первому приближению типична (напомним, что свойство называется типичным, если им обладает всюду плотное множество точек, имеющее тип G_δ). Точная формулировка такова.

Пусть V — замкнутое дифференцируемое многообразие класса C^3. Множество S всех диффеоморфизмов класса C^1, отображающих V на V, наделим C^1-топологией.

ТЕОРЕМА. *В пространстве $S \times V$ имеется всюду плотное множество A типа G_δ, обладающее свойством: если для некоторого $(f,\ x) \in A$ выполнено неравенство*

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln \| \mathrm{d}(f^m)_x \| < 0,$$

то множество тех $(g,\ y) \in S \times V$, для которых точка y экспоненциально устойчива относительно диффеоморфизма g, есть окрестность точки $(f,\ x)$.

Фигурирующая в формулировке теоремы норма $\|\cdot\|$ линейного отображения касательного пространства в касательное пространство определяется стандартным образом (как максимум нормы образа нормированного вектора) через нормы в касательных пространствах, индуцированные некоторой римановой метрикой на V. Сама эта норма зависит, конечно, от выбора римановой метрики на V, но показатель Ляпунова $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\|\mathrm{d}(f^m)_x\|$ от выбора римановой метрики на V не зависит, так как вследствие компактности многообразия V всякие две римановы метрики $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_1$ и $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_2$ на V эквивалентны в том смысле, что отношение $\langle\mathfrak{x},\,\mathfrak{x}\rangle_1\langle\mathfrak{x},\,\mathfrak{x}\rangle_2^{-1}$ заключено между двумя положительными числами, не зависящими от касательного вектора $\mathfrak{x}$.

Точку $y\in V$ называем здесь экспоненциально устойчивой относительно диффеоморфизма $g:V\to V$, если: 1) для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что для всякого $z\in V$, удовлетворяющего неравенству $\rho(z,\,y)<\delta$, имеет место неравенство $\sup\limits_{m\in\mathbf{N}}\rho(g^m z,\,g^m y)<\varepsilon$, 2) для некоторого $\delta_0>0$ выполнено неравенство

$$\sup_{z\in V:\rho(z,\,y)<\delta_0}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\rho(g^m z,\,g^m y)<0$$

($\ln 0$ считаем равным $-\infty$). В этом определении $\rho(\cdot,\,\cdot)$ — расстояние на V, индуцированное некоторой римановой метрикой. Свойство точки y быть экспоненциально устойчивой относительно диффеоморфизма $g:V\to V$ не зависит от выбора римановой метрики компактного многообразия V.

§ 2. Обозначим через $\mathfrak{J}$ множество последовательностей $\tilde{g}=\{g_k\}_{k\in\mathbf{N}}$, где $g_k:(E^n,\,0)\to(E^n,\,0)$. Формула $g_k:(E^n,\,0)\to(E^n,\,0)$ означает, что g_k — отображение $E^n\to E^n$ такое, что $g_k 0=0$. Через $\mathfrak{J}\mathcal{B}$ обозначим множество тех $\tilde{g}\in\mathfrak{J}$, для которых

$$|||\,\tilde{g}\,|||\overset{\text{def}}{=}\sup_{k\in\mathbf{N}}\|\,g_k\,\|<+\infty, \tag{3}$$

где

$$\|\,g_k\,\|\overset{\text{def}}{=}\sup_{a\in E^n_*}(|\,g_k a\,|\cdot|\,a\,|^{-1});$$

звездочка справа внизу здесь и далее означает выбрасывание нуля.

Для всякого $\tilde{g}\in\mathfrak{J}$ определим показатель Ляпунова (ср. [1])

$$\lambda(\tilde{g})=\inf_{r\in\mathbf{R}^+_*}\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{1}{k}\ln\sup_{a\in S_{r*}}(|\,g_k\ldots g_1 a\,|\cdot|\,a\,|^{-1}) \tag{4}$$

и центральный показатель (ср. [4] § 7, 8, 13, 15).

$$\Omega(\tilde{g})=\inf_{r\in\mathbf{R}^+_*}\inf_{\tau\in\mathbf{N}}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\cdot\sum_{j=0}^{m-1}\ln\sup_{a\in S_{r*}}(|\,g_{j\tau+\tau}\ldots g_{j\tau+1}a\,|\cdot|\,a\,|^{-1}); \tag{5}$$

здесь

$$S_r=\{a\in E^n:|\,a\,|\leqslant r\},\quad \ln 0=-\infty,\quad \ln(+\infty)=+\infty.$$

Для всяких $\tilde{g}\in\mathfrak{J}\mathfrak{B}$, $r\in\mathbf{R}^+_*$, $\tau\in\mathbf{N}$ из (3) следует равенство

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{1}{k}\ln\sup_{a\in S_{r*}}(|\,g_k\ldots g_1 a\,|\cdot|\,a\,|^{-1})=$$

$$=\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\ln\sup_{a\in S_{r*}}(|\,g_{m\tau}\ldots g_1 a\,|\cdot|\,a\,|^{-1}),$$

из которого в силу формулы (4) вытекает, что для всяких $\tilde{g}\in\mathfrak{J}\mathfrak{B}$, $\tau\in\mathbf{N}$ выполнено равенство

$$\lambda(\tilde g)=\inf_{r\in\mathbf{R}_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\ln\sup_{a\in S_{r*}}(|g_{m\tau}\dots g_1 a|\cdot|a|^{-1}). \tag{6}$$

Л Е М М А 1. *Пусть* $\tilde f=\{f_k\}_{k\in\mathbf{N}}\in\mathfrak{JB}$ *таково, что*

$$[\tilde f]\overset{\text{def}}{=}\inf_{k\in\mathbf{N}}\inf_{c\in E_*^n}(|f_k c|\cdot|c|^{-1})>0, \tag{7}$$

и пусть $\tilde g=\{g_k\}_{k\in\mathbf{N}}\in\mathfrak{JB}$ *удовлетворяет условию*

$$\sup_{k\in\mathbf{N}}(|g_k c-f_k c|\circ|c|^{-1})\underset{c\to 0}{\to}0. \tag{8}$$

Тогда $\Omega(\tilde g)=\Omega(\tilde f)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для всяких $j\in\mathbf{Z}^+$, $\tau\in\mathbf{N}$ имеем

$$g_{j\tau+\tau}\dots g_{j\tau+1}-f_{j\tau+\tau}\dots f_{j\tau+1}=g_{j\tau+\tau}\dots g_{j\tau+2}(g_{j\tau+1}-f_{j\tau+1})+$$
$$+\sum\nolimits_{k=2}^{\tau-1}g_{j\tau+\tau}\dots g_{j\tau+k+1}(g_{j\tau+k}-f_{j\tau+k})f_{j\tau+k-1}\dots f_{j\tau+1}+(g_{j\tau+\tau}-f_{j\tau+\tau})f_{j\tau+\tau-1}\dots f_{j\tau+1},$$

откуда для всяких $j\in\mathbf{Z}^+$, $\tau\in\mathbf{N}$, $a\in E_*^n$ следует неравенство

$$\begin{gathered}|g_{j\tau+\tau}\dots g_{j\tau+1}a-f_{j\tau+\tau}\dots f_{j\tau+1}a|\cdot|f_{j\tau+\tau}\dots f_{j\tau+1}a|^{-1}\leqslant\\ \leqslant\sum\nolimits_{k=1}^{\tau}|||\tilde g|||^{\tau-k}\,(|(g_{j\tau+k}-f_{j\tau+k})f_{j\tau+k-1}\dots f_{j\tau+1}a|\cdot|f_{j\tau+k-1}\dots f_{j\tau+1}a|^{-1}\,[\tilde f]^{k-\tau-1}.\end{gathered} \tag{9}$$

Так как для всяких $j\in\mathbf{Z}^+$, $\tau\in\mathbf{N}$, $k\in\{1,\ \dots,\ \tau\}$, $a\in E_*^n$ имеет место неравенство

$$|f_{j\tau+k-1}\dots f_{j\tau+1}a|\leqslant|||\tilde f|||^{k-1}\cdot|a|,$$

а $\tilde f\in\mathfrak{JB}$, то из (8) следует, что при всяком $\tau\in\mathbf{N}$ при $a\to 0$ правая часть неравенства (9) стремится к нулю равномерно по $j\in\mathbf{Z}^+$. Из (9) следует поэтому, что для всякого $\tau\in\mathbf{N}$

$$|g_{j\tau+\tau}\dots g_{j\tau+1}a|\cdot|f_{j\tau+\tau}\dots f_{j\tau+1}a|^{-1}\underset{a\to 0}{\to}1$$

равномерно по $j\in\mathbf{Z}^+$. Отсюда вытекает, что для всякого $\tau\in\mathbf{N}$

$$[\sup_{a\in S_{r*}}(|g_{j\tau+\tau}\dots g_{j\tau+1}a|\cdot|a|^{-1})]\cdot[\sup_{a\in S_{r*}}(|f_{j\tau+\tau}\dots f_{j\tau+1}a|\cdot|a|^{-1})]^{-1}\underset{r\to 0}{\to}1$$

равномерно по $j\in\mathbf{Z}^+$. Поэтому для всякого $\tau\in\mathbf{N}$

$$\begin{gathered}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum\nolimits_{j=0}^{m-1}\ln\sup_{a\in S_{r*}}(|g_{j\tau+\tau}\dots g_{j\tau+1}a|\cdot|a|^{-1})-\\ -\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum\nolimits_{j=0}^{m-1}\ln\sup_{a\in S_{r*}}(|f_{j\tau+\tau}\dots f_{j\tau+1}a|\cdot|a|^{-1})\underset{r\to 0}{\to}0.\end{gathered}$$

Так как при всяком $\tau\in\mathbf{N}$ каждый из двух верхних пределов в последней формуле — монотонно неубывающая функция от $r\in\mathbf{R}_*^+$, то $\lim\limits_{r\to 0}$ от каждого из них существует и равен $\inf\limits_{r\in\mathbf{R}_*^+}$ и поэтому из последней формулы следует, что для всякого $\tau\in\mathbf{N}$

$$\begin{gathered}\inf_{r\in\mathbf{R}_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum\nolimits_{j=0}^{m-1}\ln\sup_{a\in S_{r*}}(|g_{j\tau+\tau}\dots g_{j\tau+1}a|\cdot|a|^{-1})=\\ =\inf_{r\in\mathbf{R}_*^+}\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum\nolimits_{j=0}^{m-1}\ln\sup_{a\in S_{r*}}(|f_{j\tau+\tau}\dots f_{j\tau+1}a|\cdot|a|^{-1}).\end{gathered}$$

Взяв от обеих частей последнего равенства $\inf\limits_{\tau\in\mathbf{N}}$ и поменяв этот символ местами с символом $\inf\limits_{r\in\mathbf{R}_+^*}$ получаем равенство, которое с помощью формулы (5) записывается в виде $\Omega(\tilde g)=\Omega(\tilde f)$. Лемма 1 доказана.

Л Е М М А 2. *Пусть* $\tilde g=\{g_k\}_{k\in\mathbf{N}}\in\mathfrak{JB}$ *и пусть* $\Omega(\tilde g)<0$. *Тогда* $\lambda(\tilde g)\leqslant\Omega(\tilde g)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дано $\alpha \in (\Omega(\tilde{g}),\ 0)$. В силу формулы (5) найдутся $r \in \mathbf{R}_+^*$, $\tau \in \mathbf{N}$, $\bar{m} \in \mathbf{N}$, такие, что

$$\sum_{j=0}^{m-1} \ln \sup_{a \in S_{r*}} (| g_{j\tau+\tau} \ldots g_{j\tau+1} a | \cdot | a |^{-1}) < \alpha m \tau. \tag{10}$$

для всякого $m \in \bar{m} + \mathbf{N}$. Положим

$$D \overset{\text{def}}{=} \max_{m \in \{1,\ \ldots,\ \bar{m}\}} \| g_{m\tau} \ldots g_1 \|, \tag{11}$$

$$p \overset{\text{def}}{=} r \min\{D^{-1},\ 1\}. \tag{12}$$

Из (11), (12) следует, что для всяких $m \in \{1,\ \ldots,\ \bar{m}\}$, $a \in S_{p*}$ выполнено неравенство $| g_{m\tau} \ldots g_1 a | \leqslant r$.

Докажем, что это неравенство выполнено для всяких $a \in S_{p*}$, $m \in \mathbf{N}$. Предположим противное: пусть для некоторого $\bar{a} \in S_{p*}$ множество тех $m \in \bar{m} + \mathbf{N}$, для которых $| g_{m\tau} \ldots g_1 \bar{a} | > r$, непусто. Обозначив через m_1 наименьший элемент этого множества, имеем

$$| \bar{a} | \leqslant r, \tag{13}$$

$$| g_{m\tau} \ldots g_1 \bar{a} | \leqslant r \quad (m \in \{1,\ \ldots,\ m_1 - 1\}), \tag{14}$$

$$| g_{m_1\tau} \ldots g_1 \bar{a} | > r; \tag{15}$$

формула (13) следует из неравенства $p \leqslant r$, вытекающего из (12). Имеем

$$\begin{aligned} | g_{m_1\tau} \ldots g_1 \bar{a} | \cdot | \bar{a} |^{-1} &= | g_{m_1\tau} \ldots g_1 \bar{a} | \cdot | g_{(m_1+1)\tau} \ldots g_1 \bar{a} |^{-1} \ldots | g_{\tau} \ldots g_1 \bar{a} | \cdot | \bar{a} |^{-1} \leqslant \\ &\leqslant \prod_{j=0}^{m_1-1} \sup_{b \in S_{r*}} (| g_{j\tau+\tau} \ldots g_{j\tau+1} b | \cdot | b |^{-1}); \end{aligned} \tag{16}$$

последнее неравенство — следствие формул (13), (14). Так как $m_1 \in \bar{m} + \mathbf{N}$, $\alpha < 0$, то из формул (10), (16) следует неравенство

$$| g_{m_1\tau} \ldots g_1 \bar{a} | \cdot | \bar{a} |^{-1} < 1,$$

противоречащее формулам (13), (15). Полученное противоречие доказывает, что для всяких $a \in S_{p*}$, $m \in \mathbf{N}$ выполнено неравенство $| g_{m\tau} \ldots g_1 a | \leqslant r$. Поэтому при всяких $a \in S_{p*}$, $m \in \mathbf{N}$ имеем

$$\begin{aligned} | g_{m\tau} \ldots g_1 a | \cdot | a |^{-1} &= | g_{m\tau} \ldots g_1 a | \cdot | g_{(m+1)\tau} \ldots g_1 a |^{-1} \ldots | g_{\tau} \ldots g_1 a | \cdot | a |^{-1} \leqslant \\ &\leqslant \prod_{j=0}^{m_1-1} \sup_{c \in S_{r*}} (| g_{j\tau+\tau} \ldots g_{j\tau+1} c | \cdot | c |^{-1}), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} &\varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m\tau} \ln \sup_{a \in S_{r*}} (| g_{m\tau} \ldots g_1 a | \cdot | a |^{-1}) \leqslant \\ &\leqslant \varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \sup_{c \in S_{r*}} (| g_{j\tau+\tau} \ldots g_{j\tau+1} c | \cdot | c |^{-1}) \leqslant \alpha; \end{aligned} \tag{17}$$

последнее неравенство цепочки (17) следует из (10). Итак, для всякого $\alpha \in (\Omega(\tilde{g}),\ 0)$ нашлись $r \in \mathbf{R}_*^+$, $\tau \in \mathbf{N}$, для которых

$$\varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m\tau} \ln \sup_{a \in S_{r*}} (| g_{m\tau} \ldots g_1 a | \cdot | a |^{-1}) \leqslant \alpha.$$

Отсюда следует неравенство

$$\inf_{\tau \in \mathbf{N}} \inf_{r \in \mathbf{R}_*^+} \varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m\tau} \ln \sup_{a \in S_{r*}} (| g_{m\tau} \ldots g_1 a | \cdot | a |^{-1}) \leqslant \Omega(\tilde{g}),$$

левая часть которого, в силу фразы, содержащей формулу (6), равна $\lambda(\tilde{g})$. Лемма 2 доказана.

Замечание. Если $\tilde{f} = \{f_k\}_{k\in\mathbf{N}} \in \mathfrak{J}$ таково, что f_k при всяком $k\in\mathbf{N}$ есть линейное отображение $E^n \to E^n$, то формула (5) может быть переписана в виде

$$\Omega(\tilde{f}) = \inf_{\tau\in\mathbf{N}} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \| f_{j\tau+\tau} \dots f_{j\tau+1} \|, \tag{18}$$

где $\|\cdot\|$ — норма линейного отображения $E^n \to E^n$.

§ 3. Доказательство теоремы. 1. Фиксируем на V произвольную риманову метрику $\delta(\cdot,\ \cdot)$ класса C^2. Определяемое ею расстояние на V будем обозначать через $\rho(\cdot,\ \cdot)$. Напомним, что через S у нас обозначается множество всех диффеоморфизмов класса C^1, отображающих V на себя. Так как V компактно, то для всякого $f\in S$ имеем

$$\sup_{x\in V} \max\{\| \mathrm{d}f_x \|,\ \| (\mathrm{d}f_x)^{-1} \|\} < +\infty; \tag{19}$$

здесь $\mathrm{d}f_x$ — производная отображения f в точке x; $\|\cdot\|$ — норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой.

C^1- топология в S индуцируется метрикой

$$\tilde{\mathrm{d}}_1(f,\ g) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V} \inf_{u\in G(fx,\ gx)} \{s(u) + \| \varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x \|\}; \tag{20}$$

здесь $G(y,\ z)$ — множество всех кусочно-гладких путей, идущих в многообразии V из точки z в точку y, $s(u)$ — длина пути u, φ_u — параллельный перенос касательных векторов вдоль пути u. В [5] доказано, что формула (20) в самом деле определяет расстояние в S.

а) Множество S можно наделить также другой структурой метрического пространства, задав расстояние

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_S(f,\ g) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V} \inf_{u\in G(fx,\ gx)} \{ & \min\{s(u),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\} + \\ & + \| \varphi_u \mathrm{d}g_x - \mathrm{d}f_x \| + \| (\varphi_u \mathrm{d}g_x)^{-1} - (\mathrm{d}f_x)^{-1} \| \}. \end{aligned} \tag{21}$$

В [5] доказано, что формула (21) в самом деле определяет расстояние в S и что для компактного многообразия V расстояние $\mathrm{d}_S(\cdot,\ \cdot)$, определенное формулой (21), индуцирует на S ту же топологию, что и расстояние $\tilde{\mathrm{d}}_1(\cdot,\ \cdot)$, определенное формулой (20). В силу предложения 1 [б] метрическое пространство $(S,\ \mathrm{d}_S)$ полно.

б) Положим

$$B = S\times V, \quad E = S\times TV, \quad p = 1_S \times \pi, \tag{22}$$

где $(TV,\ \pi,\ V)$ — касательное расслоение многообразия V. Расстояния в B определяются формулами

$$\tilde{\mathrm{d}}_B((f,\ x),\ (g,\ y)) = \tilde{\mathrm{d}}_1(f,\ g) + \rho(x,\ y),$$

$$\mathrm{d}_B((f,\ x),\ (g,\ y)) = \mathrm{d}_S(f,\ g) + \rho(x,\ y)$$

для всяких $f\in S$, $g\in S$, $x\in V$, $y\in V$. Так как расстояния $\tilde{\mathrm{d}}_1(\cdot,\ \cdot)$ и $\mathrm{d}_S(\cdot,\ \cdot)$ индуцируют на S одну и ту же топологию, то расстояния $\tilde{\mathrm{d}}_B(\cdot,\ \cdot)$ и $\mathrm{d}_B(\cdot,\ \cdot)$ индуцируют на B одну и ту же топологию. При этом метрическое пространство $(B,\ \mathrm{d}_B)$ полно, так как метрические пространства $(S,\ \mathrm{d}_S)$ и $(V,\ \rho)$ полны (последнее — вследствие компактности многообразия V). Непрерывность отображения $p = 1_S\times\pi : E\to B$ вытекает, в силу формулы (22), из непрерывности отображения $\pi : TV \to V$.

в) Расслоение $(E,\ p,\ B)$, определенное формулой (22) естественным образом наделяется структурой векторного расслоения со слоем $\mathbf{R}^n$; а именно векторное расслоение $(E,\ p,\ B)$ определяется как векторное расслоение, индуцированное отображением $pr_2 : S \times V \to V$ (pr_2— проекция произведения на второй сомножитель) и касательным расслоением $(TV,\ \pi,\ V)$ многообразия V.

г) На так определенном векторном расслоении $(E,\ p,\ B)$ зададим риманову метрику $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$, положив для всяких $\xi \in E$, $\eta \in E$ таких, что $p\xi = p\eta$,

$$\langle \xi,\ \eta\rangle = \delta\,(pr_2\xi,\ pr_2\eta), \tag{23}$$

где pr_2 — проекция произведения $E = S \times TV$ на второй сомножитель. Доказано ([7], п. 1, § 1), что $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$, определенное формулой (23), является римановой метрикой векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$.

д) При всяком $t \in \mathbf{Z}$ положим

$$\mathfrak{H}t = (X^t,\ \chi^t), \tag{24}$$

где отображения $X : E \to E$, $\chi : B \to B$ определены следующим образом. Всякое $\xi \in E$ есть, согласно формуле (22), пара $(f,\ \mathfrak{x})$, где $f \in S$, $\mathfrak{x} \in TV$; полагаем

$$X\xi = X(f,\ \mathfrak{x}) = (f,\ \mathrm{d}f\mathfrak{x}). \tag{25}$$

Всякое $b \in B$ есть, согласно формуле (22), пара $(f,\ x)$, где $f \in S$, $x \in V$; полагаем

$$\chi b = \chi(f,\ x) = (f,\ fx). \tag{26}$$

Пара $(X,\ \chi)$ отображений, определенных формулами (25), (26), есть автоморфизм векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ (см. [7], § 1, п. 2). Поэтому формула (24) имеет смысл и определяет гомоморфизм $\mathfrak{H}$ группы $\mathbf{Z}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$.

е) Определим функцию $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$ формулой

$$a(f,\ x) = \ln \sup_{y\in V} \max\,\{\|\,\mathrm{d}f_y\,\|,\ \ \|\,(\mathrm{d}f_y)^{-1}\,\|\}. \tag{27}$$

Для всяких $t \in \mathbf{Z}$, $b \in B$ имеют место равенство $a\,(\chi^t b) = a\,(b)$, вытекающее из формул (26), (27), и неравенство

$$\|\,X^t[b]\,\| \leqslant \exp(|\,t\,|\,a(b)), \tag{28}$$

где через $X^t[b]$ обозначается сужение отображение X^t на слой $p^{-1}(b)$. Докажем неравенство (28). Для всякого $b \in B$ имеем: $b = (f,\ x)$, где $f \in S$, $x \in V$; всякое $\xi \in p^{-1}(b)$ есть, согласно формуле (22), пара $(f,\ \mathfrak{x})$, где $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x)$; для всяких $t \in \mathbf{Z}$, $b \in B$ из (25) следует равенство $X^t\xi = X^t(f,\ \mathfrak{x}) = (f,\ \mathrm{d}f^t\mathfrak{x})$, подставив которое в формулу

$$\|\,X^t[b]\,\| = \sup_{\xi\in p_*^{-1}(b)} (\langle X^t\xi,\ X^t\xi\rangle^{1/2}\langle \xi,\ \xi\rangle^{-1/2}),$$

определяющую норму линейного отображения $X^t[b]$, и воспользовавшись равенством (23), получаем цепочку

$$\begin{gathered}\|\,X^t[b]\,\| = \sup_{\mathfrak{x}\in\pi_*^{-1}(x)} ((\delta(\mathrm{d}f^t\mathfrak{x},\ \mathrm{d}f^t\mathfrak{x})^{1/2}(\delta(\mathfrak{x},\ \mathfrak{x}))^{-1/2}) = \\ = \|\,\mathrm{d}(f^t)_x\,\| \leqslant \exp(|\,t\,|\,a(f,\ x)) = \exp(|\,t\,|\,a(b)),\end{gathered} \tag{29}$$

неравенство в которой — следствие формулы (27). Формула (28) доказана.

2. Функция $\Omega(\mathfrak{H},\ \cdot) : B \to \mathbf{R}$ (центральный показатель гомоморфизма $\mathfrak{H}$) определяется формулой

$$\Omega(\mathfrak{H},\ b) = \inf_{\tau\in\mathbf{N}} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|\,X^\tau[\chi^{j\tau}b]\,\|, \tag{30}$$

из которой видно, что функция $\Omega(\mathfrak{H},\ \cdot) : B \to \mathbf{R}$ совпадает с функцией $\Omega_1(\mathfrak{H},\ \cdot) : B \to \mathbf{R}$ (см. [9], (3)).

В силу теоремы [9], в пространстве $B = S \times V$ имеется всюду плотное множество D типа G_δ, такое, что функция $\Omega(\mathfrak{H}, \cdot): B \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху во всякой точке $b \in D$. В силу леммы 1 [8] гомоморфизм $\mathfrak{H}$ является насыщенным (в смысле определения [10] п. 7 введения) и потому удовлетворяет условиям теоремы [10], в силу которой в пространстве $B = S \times V$ имеется всюду плотное множество C типа G_δ, такое, что для всякого $b \in C$ имеет место равенство $\Omega(\mathfrak{H}, b) = \lambda(\mathfrak{H}, b)$, где

$$\lambda(\mathfrak{H}, b) \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln \| X^m[b] \|.$$

В силу теоремы Бэра $A = C \bigcap D$ есть всюду плотное множество типа G_δ в пространстве $B = S \times V$.

3. Пусть для некоторого $b = (f, x) \in A$ выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln \| \mathrm{d}(f^m)_x \| < 0.$$

Так как $\| \mathrm{d}(f^m)_x \| = \| X^m[b] \|$ для всякого $m \in \mathbf{Z}$ (см. (29)), то это неравенство переписывается в виде $\lambda(\mathfrak{H}, b) < 0$. Так как $b \in A \subset C$, то $\Omega(\mathfrak{H}, b) = \lambda(\mathfrak{H}, b)$. Следовательно, $\Omega(\mathfrak{H}, b) < 0$. А так как $b \in A \subset D$, то найдется окрестность U точки $b = (f, x)$ (в пространстве $B = S \times V$), такая, что для всякого $(g, y) \in U$ имеет место неравенство

$$\Omega(\mathfrak{H}, (g, y)) < 0. \tag{31}$$

Фиксируем произвольное $(g, y) \in U$.

Так как при всяких $\tau \in \mathbf{N}$, $s \in \mathbf{Z}^+$ имеют место равенства

$$\chi^s(g, y) = (g, g^s y), \quad \| X^\tau[\chi^s(g, y)] \| = \| \mathrm{d}\,(g^\tau)_{g^s y} \|$$

(первое равенство следует из (26), второе — из (29) (с (g, y) вместо $b = (f, x)$), то из формулы (30) (с (g, y) вместо b) следует формула

$$\Omega(\mathfrak{H}, (g, y)) = \inf_{\tau\in\mathbf{N}} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum\nolimits_{j=0}^{m-1} \ln \| \mathrm{d}\,(g^\tau)_{g^{j\tau} y} \|. \tag{32}$$

4. Вследствие компактности многообразия V существуют $r_0 \in \mathbf{R}_*^+$, $r_1 \in \mathbf{R}_*^+$ такие, что для всякого $u \in V$ сужение экспоненциального геодезического отображения $\exp_u$ на множество

$$W_{u,\, r_0} \underset{\text{def}}{=} \{ \mathfrak{x} \in \pi^{-1}(u) : | \mathfrak{x} | < r_0 \}$$

(r_0 — окрестность нуля в касательном пространстве в точке u) есть диффеоморфизм этой окрестности на множество, содержащее замкнутую r_1 — окрестность точки u (в метрическом пространстве (V, ρ)). Для всякого $u \in V$ фиксируем некоторый изоморфизм ψ_u касательного пространства $\pi^{-1}(u)$ (как евклидова пространства) на фиксированное евклидово пространство E^n.

Отображения

$$g_{k,\, p} \overset{\text{def}}{=} \psi_{g^k y} \exp_{g^k y}^{-1} g \exp_{g^{k-1} y} \psi_{g^{k-1} y}^{-1} |_{S_p} : (S_p,\ 0) \to (E^n,\ 0) \tag{33}$$

вследствие компактности многообразия V определены при некотором $p \in \mathbf{R}_*^+$, не зависящем от $k \in \mathbf{N}$, и удовлетворяют неравенству

$$\sup_{k\in\mathbf{N}} \sup_{a\in S_{p*}} (| g_{k,\, p} a | \cdot | a |^{-1}) < +\infty;$$

поэтому каждое из них можно продолжить на E^n так, чтобы они образовали последовательность отображений $\tilde{g} = \{ g_k \}_{k\in\mathbf{N}} \in \mathfrak{IB}$ (напомним, что множество $\mathfrak{IB}$

определено в начале § 2). Из формулы (33) в силу непрерывной дифференцируемости отображения g и компактности многообразия V следует, что отображения g_k ($k \in \mathbf{N}$) равностепенно дифференцируемы в нуле, т. е.

$$\sup_{k \in \mathbf{N}} (| g_k a - f_k a | \cdot | a |^{-1}) \underset{a \to 0}{\to} 0,$$

где f_k — производная отображения g_k в нуле. Из формулы (33) вследствие компактности V и непрерывной дифференцируемости g вытекает, что $\tilde{f} = \{f_k\}_{k \in \mathbf{N}} \in \mathfrak{FB}$, а из той же формулы (33) в силу компактности V и непрерывной дифференцируемости g^{-1} следует, что

$$[\tilde{f}] = (\sup_{k \in \mathbf{N}} \| f_k^{-1} \|)^{-1} > 0.$$

Отсюда в силу леммы 1 следует равенство

$$\Omega(\tilde{g}) = \Omega(\tilde{f}). \tag{34}$$

5. Из формулы (33) следует, что для всяких $\tau \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}^+$ имеет место равенство

$$\| f_{k+\tau} \dots f_{k+1} \| = \| \mathrm{d}(g^\tau)_{g^k y} \|$$

(напомним, что через f_k мы обозначили производную отображения g_k в нуле). Поэтому из формулы (18) § 2 и формулы (32) следует равенство $\Omega(\tilde{f}) = \Omega(\mathfrak{H},\ (g,\ y))$. Отсюда в силу (31) следует неравенство $\Omega(\tilde{f}) < 0$, из которого в силу (34) вытекает, что $\Omega(\tilde{g}) < 0$, откуда в силу леммы 2 следует неравенство $\lambda(\tilde{g}) < 0$.

6. Из формулы (4) § 2, определяющей $\lambda(\tilde{g})$, следует, что для всякого $\lambda > \lambda(\tilde{g})$ существует $r(\lambda) \in \mathbf{R}_*^+$, такое, что найдется $k(r(\lambda)) \in \mathbf{N}$, обладающее свойством: для всяких $k \in k(r(\lambda)) + \mathbf{N}$, $a \in S_{r(\lambda)}$ выполнено неравенство

$$| g_k \dots g_1 a | < | a | \exp (\lambda k). \tag{35}$$

Фиксируем произвольное $\lambda \in (\lambda(\tilde{g}),\ 0)$.

7. Вследствие компактности многообразия V имеем

$$\begin{aligned} R \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{u \in V} \{ &\sup_{\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(u) : |\mathfrak{x}| \leqslant p} [\rho(\exp_u \mathfrak{x},\ u) | \mathfrak{x} |^{-1}] + \\ &+ \sup_{v \in V : \rho(v,\ u) \leqslant r_1} [| \exp_u^{-1} v | \cdot (\rho(u,\ v))^{-1}] \} < +\infty. \end{aligned} \tag{36}$$

8. Пусть дано $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$. Пользуясь непрерывностью отображений g_k в нуле, возьмем $r \in (0,\ \min \{p,\ r(\lambda),\ \varepsilon R^{-1}\})$, такое, что для всяких $k \in \{1,\ \dots,\ k(r(\lambda))\}$, $a \in S_r$ имеет место неравенство $| g_k \dots g_1 a | < \min\{p,\ \varepsilon R^{-1}\}$. Тогда для всяких $k \in \mathbf{N}$, $a \in S_r$ имеем

$$| a | < \min\{p,\ \varepsilon R^{-1}\}, \quad | g_k \dots g_1 a | < \min\{p,\ \varepsilon R^{-1}\} \tag{37}$$

так как правая часть неравенства (35) меньше $| a |$. Следовательно, для всяких $k \in \mathbf{N}$, $a \in S_r$ имеет место равенство

$$g_k \dots g_1 a = g_{k,\,p} \dots g_{1,\,p} a.$$

В силу формулы (33) отсюда вытекает, что

$$g^k \exp_y \psi_y^{-1} a = \exp_{g^k y} \psi_{g^k y}^{-1} g_k \dots g_1 a \tag{38}$$

для всяких $k \in \mathbf{N}$, $a \in S_r$.

Положим

$$\delta = \min \{r R^{-1},\ r_1\}. \tag{39}$$

9. Пусть дано $z \in V$, такое, что $\rho(z,\ y) < \delta$. Тогда из (36), (39) следует

$$c \underset{\mathrm{def}}{=} \psi_y \exp_y^{-1} z \in S_r. \tag{40}$$

Из (37), (40) следует, что

$$|g_k \dots g_1 c| < \min\{p,\ \varepsilon R^{-1}\} \tag{41}$$

для всякого $k \in \mathbf{N}$, а из (38), (40) следует

$$g^k z = \exp_{g^k y} \psi_{g^k y}^{-1} g_k \dots g_1 c \tag{42}$$

для всякого $k \in \mathbf{N}$. Из (36), (41), (42) вытекает, что $\rho(g^k z,\ g^k y) < \varepsilon$ для всякого $k \in \mathbf{N}$. Из (35), (36), (41), (42) следует неравенство

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{1}{k} \ln \rho(g^k z,\ g^k y) < \lambda.$$

Теорема доказана.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
17.IV. 1984

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляпунов А. М., Собрание сочинений, т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1956.

[2] Perron O., Üeber Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen. Math. Z. 29 (1928), 129—160.

[3] Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1954.

[4] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., «Наука», 1966.

[5] Миллионщиков В. М., Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VI, Дифф. уравнения, 18, № 5 (1982), 804—821.

[6] Миллионщиков В. М., Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VII, Дифф. уравнения, 18, № 6 (1982), 957—978.

[7] Миллионщиков В. М., Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VIII, Дифф. уравнения, 18, № 8 (1982), 1330—1345.|

[8] Миллионщиков В. М., Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. IX, Дифф. уравнения, 18, № 9 (1982), 1507—1548.

[9] Миллионщиков В. М., О типичных свойствах условной экспоненциальной устойчивости. II, Дифф. уравнения, 19, № 9 (1983), 1503—1510.

[10] Миллионщиков В.М., О типичных свойствах условной экспоненциальной устойчивости. IV, Дифф. уравнения, 20, № 2 (1984), 241—257.