В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. VIII

1. Пусть V_n — связное полное $n-$мерное риманово многообразие*). Через S обозначается множество всех диффеоморфизмов $f:V^n \to V^n$ класса C^1, отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию**)

$$\sup_{x\in V^n}\max\left\{\left\|df_x\right\|,\left\|(df_x)^{-1}\right\|\right\}<+\infty. \tag{1}$$

Для всякого $j\in S$ через S_j обозначается подмножество множества S, состоящее из диффеоморфизмов f, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{x\in V^n}\rho(fx,jx)<+\infty$, где $\rho(\cdot,\cdot)$ расстояние в V^n.

Для всякого $j\in S$ множество S_j наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния***)

$$\tilde d_1(f,g)=\sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(fx,gx)}\left\{s(u)+\left\|\varphi_u dg_x-df_x\right\|\right\}; \tag{2}$$

здесь $G(y,z)$ — множество всех кусочно-гладких путей u, идущих в многообразии V_n из точки z в точку $y, s(u)$ — длина пути u, φ_u — преобразование, состоящее в параллельном перенесении касательных векторов вдоль пути u.

З а м е ч а н и е. Пусть $V^n=E^n$ ($n-$мерное евклидово пространство). Тогда метрика $\tilde d_1(\cdot,\cdot)$ индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\tilde{\tilde d}_1(\cdot,\cdot)$, определяемая формулой****):

$$\tilde{\tilde d}(f,g)=\sup_{x\in V^n}\left(\left|fx-gx\right|+\left\|df_x-dg_x\right\|\right).$$

2. Для всяких $f\in S, x\in V^n, k\in\{1,\dots,n\}$, определяется *показатель Ляпунова*

$$\lambda_R((f,x))\underset{def}{=}\inf_{R^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(T_xV^n)}\ \sup_{\mathfrak{x}\in R_*^{n-k+1}}\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\ln\left|df^m\mathfrak{x}\right|, \tag{3}$$

где $G_j(T_xV^n)$ — множество всех $i-$мерных векторных подпространств касательного пространства $T_xV^n=\pi^{-1}(x)$ многообразия в V^n точке, x а через R_*^i обозначается $R^i\setminus\{0\}$.

3. *Центральный показатель* $\Omega_R((f,x))$ определяется при всяких $f\in S, x\in V^n, k\in\{1,\dots,n\}$, формулой

$$\Omega_R((f,x))\underset{def}{=}\inf_{R^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(T_xV^n)}\ \inf_{\tau\in N}\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{q=0}^{m-1}\ln\left\|df^\tau|_{df^{q\tau}R^{n-k+1}}\right\| \tag{4}$$

(где через $X|_C$ обозначается сужение отображения X на множество C).

---

*) Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^3, риманова метрика — классу C^2.

**) Через df_x обозначается производная отображения в f точке x. Через $\|\cdot\|$ обозначается норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой.

***) Здесь и в п. 6 напоминаются некоторые сведения из [1 — 3].

****) В случае $V^n=E^n$ касательные пространства стандартным образом отождествляются с E^n. После этого отождествления разность df_x-dg_x (и норма этой разности) приобретает смысл.

Центральный показатель $\Omega^{(k)}((f,x))$ определяется при всяких $f\in S, x\in V^n, k\in\{1,...,n\}$ формулой

$$\Omega^{(k)}((f,x)) \underset{def}{=} \inf_{\tau\in N} \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m\tau}\sum_{q=0}^{m-1}\ln\left\| df^{\tau}\,|_{df^{q\tau}E_{n-k+1}(f,x)}\right\|, \qquad (4')$$

где векторное подпространство $E_{n-k+1}(f,x)$ касательного пространства T_xV^n определено формулой

$$E_{n-k+1}(f,x) \underset{def}{=} \left\{\mathfrak{x}\in T_xV^n : \lambda(f,\mathfrak{x}) \leqslant \lambda_R((f,x))\right\}, \qquad (4'')$$

в которой

$$\lambda(f,\mathfrak{x}) \underset{def}{=} \begin{cases} \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{1}{m}\ln\left|df^m\mathfrak{x}\right| \; при \; |\mathfrak{x}|\neq 0, \\ -\infty \qquad при \;\; |\mathfrak{x}|=0 \end{cases} \qquad (4''')$$

($f\in S, \mathfrak{x}\in TV^n$; через TV^n обозначается пространство касательного расслоения многообразия) V^n.

4.П р е д л о ж е н и е. *Для всякого* $j\in S$ *для всяких* $f\in S_j, x\in V_n, k\in\{1,...,n\}$ *имеют место неравенства* $\lambda_k((f,x)) \leqslant \Omega_k((f,x)) \leqslant \Omega^{(k)}((f,x))$.

Доказательство этого предложения см. ниже в п. 9.

5. Т е о р е м а. *Для всякого* $j\in S$ *в пространстве* $S_i\times V^n$ *имеется всюду плотное множество* D_j *типа* G_δ*, обладающее свойствами:*

а) при всяких $(f,x)\in D_j$, $k\in\{1,...,n\}$ *функция* $\Omega_k(\cdot): S_i\times V^n\to R$ *полунепрерывна сверху в точке* (f,x)*;*

б) при всяких $(f,x)\in D_j, k\in\{1,...,n\}$ *имеют место равенства* $\lambda_k((f,x))=\Omega_k((f,x))=\Omega^{(k)}((f,x))$;

в) при всяких $(f,x)\in D_j, k\in\{1,...,n-1\}$, *имеет место альтернатива: либо* $\lambda_{n-k}((f,x))=\lambda_{n-k+1}((f,x))$*, либо подпространство* $E_k(f,x)$ *экспоненциально отделено от всякого своего алгебраического дополнения в пространстве* T_xV^n*, т. е. для всякого алгебраического дополнения* l^{n-a} *подпространства* $E_k(f,x)$ *(в векторном пространстве* T_xV^n*) существуют вещественные числа* $\alpha>0$*,* $\beta>0$ *такие, что для всяких* $\mathfrak{x}\in l^{n-k}$*,* $\mathfrak{y}\in E_k(f,x)$ *и всяких целых чисел* $t\geqslant s\geqslant 0$ *выполнено неравенство*

$$\left|df^t\mathfrak{x}\right|\cdot\left|df^s\mathfrak{y}\right| \geqslant \alpha\left|df^s\mathfrak{x}\right|\cdot\left|df^t\mathfrak{y}\right|\exp(\beta(t-s)). \qquad (5)$$

Доказательство теоремы см. ниже в п. 10.

6. В этом пункте напоминаются некоторые сведения из статей [1-3].

а) При всяком $j\in S$ множество S_j можно наделить также другой, структурой метрического пространства, задав расстояние

$$d_1(f,g) \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(jx,gx)}\left\{s(u)+\left\|\varphi_u dg_x - df_x\right\| + \left\|(\varphi_u dg_x)^{-1}-(df_x)^{-1}\right\|\right\} \qquad (6)$$

(смысл обозначений разъяснен выше после формулы (2)). В [1, п. 5] доказано, что при всяком $j\in S$ формулы (2), (6) в самом деле определяют расстояния в S_j. В [1, п. 5] доказано, что при всяком $j\in S$ расстояние $d_1(\cdot,\cdot)$, определенное формулой (6) (в [1] ей соответствует формула (55)), индуцирует на S_j ту же топологию, что и расстояние $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$, определенное формулой (2) (которой в [1] соответствует формула (56)). В силу предложения 2 [2] метрическое пространство (S_j, d_1) полное (при всяком $j \in S$).

б) При всяком $j \in S$ положим

$$B_j \underset{def}{=} S_j \times V^n, E_j \underset{def}{=} S_j \times TV^n, p_j \underset{def}{=} 1_{S_j} \times \pi, \tag{7}$$

где TV^n — пространство касательного расслоения (TV^n, π, V^n) многообразия V^n, π — проекция этого расслоения (таким образом, $(T_x V^n) = \pi^{-1}(x)$ при всяком $x \in V^n$). При всяком $j \in S$ расстояние в B_j определяется формулой

$$\tilde{d}((f,x),(g,y)) \underset{def}{=} \tilde{d}_1(f,g) + \rho(x,y) \tag{8}$$

при всяких $f \in S_j, g \in S_j, x \in V^n, y \in V^n$. При всяком $j \in S$ можно определить другое расстояние в B_j формулой

$$d((f,x),(g,y)) \underset{def}{=} d_1(f,g) + \rho(x,y) \tag{9}$$

для всяких $f \in S_j, g \in S_j, x \in V^n, y \in V^n$.

Так как при всяком $j \in S$ расстояние $d_1(\cdot,\cdot)$ индуцирует на S_j ту же топологию, что и расстояние $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$, то при всяком $j \in S$ расстояние $d_1(\cdot,\cdot)$, определенное формулой (9), индуцирует на B_j ту же топологию, что и расстояние $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$, определенное формулой (8).

При всяком $j \in S$ топологическое пространство определяется E_j как произведение топологического пространства S_i (с топологией, индуцированной расстоянием $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$; напомним, что эта топология совпадает с топологией, индуцированной расстоянием $d_1(\cdot,\cdot)$) и топологического пространства TV^n.

Непрерывность отображения $p_j \underset{def}{=} 1_{s_j} \times \pi : E_j \to B_j$ вытекает (при всяком $j \in S$) в силу определения топологии на E_j и формулы (8) из непрерывности отображения $\pi : TV^n \to V^n$.

в) При всяком $j \in S$ расслоение, определенное формулой (7), естественным образом наделяется структурой векторного расслоения со слоем R^n; а именно векторное расслоение (E_j, p_j, B_j) определяется как векторное расслоение, индуцированное отображением $pr_2 : S_j \times V^n \to V^n$ (pr_2— проекция произведения на второй сомножитель) и векторным расслоением (TV^n, π, V^n) (библиографические указания и эквивалентное определение с помощью атласов см. в [3, п. 1 § 1]).

г) При всяком $j \in S$ на так определенном векторном расслоении (E_j, p_j, B_j) зададим риманову метрику $\Delta_j(\cdot,\cdot)$, положив для всяких $\xi \in E_j, \eta \in E_j$ таких, что $p_j\xi = p_j\eta$, по определению

$$\Delta_j(\xi,\eta) \underset{def}{=} \delta(pr_2\xi, pr_2\eta), \tag{10}$$

где pr_2 — проекция произведения $E_j \underset{(7)}{=} S_j \times TV^n$ на второй сомножитель, а $\delta(\cdot,\cdot)$ — риманова метрика, имеющаяся на как V^n на римановом многообразии. Легко доказывается (это доказательство подробно изложено в п. 1 § 1 [3]), что $\Delta_j(\cdot,\cdot)$, определенное формулой (10), является римановой метрикой векторного расслоения (E_j, p_j, B_j), определенного в подпунктах б), в).

д) При всяком $j \in S$ при всяком $j \in Z$ положим

$$\mathfrak{H}_j t = (X_j^t, \chi_j^t), \tag{11}$$

где отображения $X_j : E_j \to E_j, \chi_j : B_j \to B_j$ определены следующим образом: всякое $\xi \in E_j$ есть, согласно формуле (7), пара $(f, \mathfrak{x})$ где $f \in S_j, \mathfrak{x} \in TV^n$; полагаем

$$X_j \xi = X_j(f, \mathfrak{x}) \underset{def}{=} (f, df\mathfrak{x}); \tag{12}$$

всякое $b \in B_j$ есть, согласно формуле (7), пара (f, x), где $f \in S_j, x \in V^n$; полагаем

$$\chi_{j^b} = \chi_j(f, x) \underset{def}{=} (f, fx). \tag{13}$$

При всяком $j \in S$ пара отображений, (X_j, χ_j), определенных формулами (12), (13), есть автоморфизм векторного расслоения (E_j, p_j, B_j) (это доказано в [3]; см. п. 2 § 1 и замечание 2 в конце § 1 цитируемой статьи).

Поэтому при всяком $j \in S$ формула (11) имеет смысл и определяет гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Z}, \mathrm{Aut}(E_j, p_j, B_j)$ (гомоморфизм группы Z в группу автоморфизмов векторного расслоения (E_j, p_j, B_j).

е) При всяком $j \in S$ отображение $X_j : E_j \to E_j$ (соответственно $\chi_j : B_j \to B_j$) является, как видно из сравнения формулы (12) с формулой (11) [4] (соответственно формулы (13) с формулой (12) [4]), сужением на множество*)

$$E_j \underset{(7)}{=} S_j \times TV^n \subset S \times TV^n \underset{(4.6)}{=} E$$

отображения $X : E \to E$, определенного формулой (11) [4] (соответственно сужением на множество $B_j \underset{(7)}{=} S_j \times V^n \subset S \times V^n \underset{(4.6)}{=} B$ отображения $\chi : B \to B$, определенного формулой (12) [4]).

В п. 6 е) [4] доказано, что для функции $a(\cdot) : B \to R^+$, определенной формулой (13) [4], и отображений $X : E \to E,\ \chi : B \to B$, определенных формулами (11) [4], (12) [4], при всяком $b \in B$ имеют место: равенство $a(\chi b) = a(b)$ (это — формула (14) [4]) и неравенство

$$\max\left\{\left\|X[b]\right\|, \left\|X([b])^{-1}\right\|\right\} \leqslant \exp(a(b))$$

(это — формула (15) [4]).

Следовательно, при всяком $j \in S$ для функции $a_j(\cdot) : B_j \to R+$, определяемой как сужение на B_j функции $a(\cdot) : B \to R^+$, определенной формулой (13) [4], и отображений $X_j : E_j \to E_j,\ \chi_j : B_j \to B_j$, определенных формулами (12), (13), при всяком $b \in B_j$ имеют место: равенство

$$a_j(\chi_j b) = a_j(b) \tag{14}$$

и неравенство

$$\max\left\{\left\|X_j[b]\right\|, \left\|X_j([b])^{-1}\right\|\right\} \leqslant \exp(a_j(b)). \tag{15}$$

Таким образом, при всяком $j \in S$ автоморфизм $(X_j, \chi_j) \in Aut(E_j, p_j, B_j)$, определенный формулами (12), (13), удовлетворяет условиям п. 1.2 введения [3] (формулам (В.1.1), (В.1.2) цитируемой статьи соответствуют формулы (14), (15)). В п. 1.4 введения [3] доказано: из того, что для автоморфизма $(X_j, \chi_j) \in \mathrm{Aut}(E_j, p_j, B_j)$ при всяком

*) Ссылка на формулу $(4, N)$ есть краткая запись ссылки на формулу (N) статьи [4].

$b\in B_j$ имеют место формулы (14), (15), следует, что для гомоморфизма $\mathfrak{H}\in \mathrm{Hom}(\mathrm{Z},\ \mathrm{Aut}(E_j,p_j,B_j)$, определенного формулой (11), имеют место: формула**)

$$\max\left\{\left\|X_j\left[m,b\right]\right\|,\left\|(X_j(m,b))^{-1}\right\|\right\}\leqslant \exp(ma_j(b))$$

(при всяких $b\in B_j$, $m\in N$) (в цитируемой статье этой формуле соответствует формула (В.1.4)) и формула $a_j(\chi^m b)=a_j(b)$ (при всяких $b\in B_j$, $m\in Z$) (в цитируемой статье этой формуле соответствует формула (В. 1.6)), т. е. выполнены условия п. 2 введения [5].

ж) При всяком $j\in S$ для гомоморфизма $\mathfrak{H}\in \mathrm{Hom}(\mathrm{Z},\ \mathrm{Aut}(E_j,p_j,B_j)$ определенного формулами (11) — (13), при всяких $b\in B_j, k\in\{1,...,n\}$ показатель Ляпунова определяется формулой (см. в [5] формулу (2) и соглашение об обозначениях перед леммой 2):

$$\lambda_k(\mathfrak{H}_j,b)\underset{def}{=}\min_{k^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(\rho_j^{-1}(b))}\ \max_{\xi\in R_*^{n-k+1}}\ \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\ln\left|X_j^t\xi\right|, \tag{16}$$

где $G_i(p_j^{-1}(b))$ — множество i-мерных векторных подпространств слоя $p_j^{-1}(b),|\eta|\underset{def}{=}(\Delta_j(\eta,\eta))^{1/2}$ для всякого $\eta\in E$. В § 1 [5] доказана корректность этого определения (т. е. доказано, что в формуле (16) можно писать $\max$, а не $\sup$ и $\min$, а не $\inf$).

При всяком $j\in S$ рассмотрим семейство автоморфизмов

$$(X_j(m),\chi_j(m))\underset{def}{=}(X_j^m,\chi_j^m)\quad (m\in N)$$

векторного расслоения (E_j,p_j,B_j)

В силу лемм 2, 3 [5] (в которых надо положить теперь $\tau=1$ при всяких $b\in B_j$, $k\in\{1,...,n\}$ показатель Ляпунова этого семейства, определенный в [6] на с. 1408, равен показателю $\lambda_k(\mathfrak{H}_j,b)$, определенному формулой (16).

Сравнивая формулу (16) с формулой (21) [4], видим (см. первую фразу подпункта е)), что при всяком $j\in S$ при всяких $b\in B_j, k\in\{1,...,n\}$ имеет место равенство

$$\lambda_k(\mathfrak{H}_j,b)=\lambda_k(\mathfrak{H},b), \tag{17}$$

т. е. функция $\lambda_k(\mathfrak{H}_{j,}\cdot):B_j\to R$ есть сужение на множество B_j функции $\lambda_k(\mathfrak{H}_,\cdot):B\to R$, определенной формулой (21) [4].

з) При всяком $j\in S$ при всяких $b\in B_j$, $k\in\{1,...,n\}$ центральный показатель $\Omega_k(\mathfrak{H}_j,b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H}_j\in \mathrm{Hom}(\mathrm{Z},\ \mathrm{Aut}(E_j,p_j,B_j))$ определяется формулой

$$\Omega_R(\mathfrak{H}_j,b)\underset{def}{=}\inf_{R^{n-k+1}\in G_{n-R+1}(p_j^{-1}(b))}\ \inf_{\tau\in N}\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m\tau}\sum_{q=0}^{m-1}\ln\left\|X_j^\tau\mid x_j^{q\tau}R^{n-k+1}\right\|, \tag{18}$$

где $X_j^\tau\mid l$ — сужение на множество L отображения X_j^τ; для всяких $\tau\in N,b\in B_j$, для всякого векторного подпространства L слоя $p_j^{-1}(b)$ норма $\left\|X_j^\tau\mid L\right\|$ определяется стандартным образом через нормы в слоях, индуцированные римановой метрикой $\Delta_j(\cdot,\cdot)$, определенной формулой (10).

Сравнивая формулу (18) с формулой (22) [4], видим (см. первую фразу подпункта е)), что при всяком $j\in S$ при всяких $b\in B_j$, $k\in\{1,...,n\}$ имеет место равенство

**) $X_j(m,b)\underset{def}{=}X_j^m\left[b\right]$ — сужение отображения на X_j^m слой $p_j^{-1}(b)$.

$$\Omega_R(\mathfrak{H}_j, b) = \Omega_R(\mathfrak{H}, b), \tag{19}$$

т. е. функция $\Omega_R(\mathfrak{H}_1, \cdot): B_j \to R$ есть сужение на множество B_j функции $\Omega_R(\mathfrak{H}_j \cdot): B \to R$, определенной формулой (22) [4].

7. Лемма 1. *При всяком* $j \in S$ *при всяких* $f \in S_j, x \in V^n, k \in \{1, ..., n\}$ *имеет место равенство* $\lambda_R((f,x)) = \lambda_R(\mathfrak{H}_j, ((f,x))$, *левая часть которого определена формулой (3), а правая — формулой (16).*

Доказательство. Эта лемма следует из леммы 1 [4] в силу фразы, содержащей формулу (17). Лемма 1 доказана.

8. Лемма 2. *При всяком* $j \in S$ *при всяких* $f \in S_j, x \in V^n, k \in \{1, ..., n\}$ *имеет место равенство*

$$\Omega_k((f,x)) = \Omega_R(\mathfrak{H}_j, (f,x)),$$

левая часть которого определена формулой (4), а правая — формулой (18).

Доказательство. Эта лемма следует из леммы 2 [4] в силу фразы, содержащей формулу (19). Лемма 2 доказана.

При всяком $j \in S$ при всяких $b \in B_j, k \in \{1, ..., n\}$ центральный показатель $\Omega^{(R)}(\mathfrak{H}_j, b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Z}, \ \mathrm{Aut}(E_j, p_j, B_j))$ определяется формулой

$$\Omega^{(R)}(\mathfrak{H}_j, b) \underset{def}{=} \inf_{\tau \in N} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{q=0}^{m-1} \ln \left\| X_j^{\tau} \mid x_j^{q\tau} E_{n-k+1}(\mathfrak{H}_j, b) \right\|, \tag{20}$$

в которой

$$E_{n-k+1}(\mathfrak{H}_j, b) \underset{def}{=} \left\{ \xi \in p_j^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H}_j, \xi) \leqslant \lambda_R(\mathfrak{H}_j, b) \right\}, \tag{21}$$

где показатель Ляпунова $\lambda(\mathfrak{H}_j, \xi)$ при всяком $\xi \in E_j$ определен формулой

$$\lambda(\mathfrak{H}_j, \xi) \underset{def}{=} \begin{cases} \overline{\lim\limits_{m \to +\infty}} \dfrac{1}{m} \ln \left| X_j^m \xi \right| & при \left| \xi \right| \neq 0, \\ -\infty & при \left| \xi \right| = 0 \end{cases} \tag{22}$$

(в [5, § 1] доказано, что $E_{n-k+1}(\mathfrak{H}_j, b)$ — векторное подпространство слоя $p_j^{-1}(b)$).

Сравнивая формулы (20) — (22) с формулами (22′) — (22‴) [4] (учитывая при этом сравнении, что, как отмечено в подпункте е), X_j есть сужение на множество $E_j \subset E$ отображения $X: E \to E$, определенного формулой (11) [4]), видим, что функция $\Omega^{(R)}(\mathfrak{H}_j, \cdot): B_j \to R$, есть сужение на множество $B_j \subset B$ функции, $\Omega^{(R)}(\mathfrak{H}, \cdot): B \to R$ определенной формулой (22) [4]. Поэтому из леммы 3 [4] следует

Лемма 3. *При всяком* $j \in S$ *при всяких* $f \in S_j, x \in V^n, s \in \{1, ..., n\}$ *имеет место равенство* $\Omega^{(s)}((f,x)) = \Omega^{(s)}(\mathfrak{H}_j, (f,x))$, *левая часть которого определена формулой (4'), а правая — формулой (20).*

9. Доказательство предложения, сформулированного в п. 4. Это предложение следует из предложений 2, 5 [7] в силу лемм 1 — 3. Предложение доказано.

10. Доказательство теоремы, сформулированной в п. 5. Пусть дано произвольное $j \in S$.

А. В силу теоремы [8] и леммы 2 в пространстве $B_j \underset{(7)}{=} S_j \times V^n$ найдется всюду плотное множество $D_j^{(1)}$ типа G_δ такое, что при всяких $(f,x) \in D_j^{(1)}$, $k \in \{1, ..., n\}$ функция $\Omega_k(\cdot): S_j \times V^n \to R$ полунепрерывна сверху в точке (f,x).

Б. В силу леммы 2 [9] (см. также терминологические пояснения в сносках в п. 7 введения [10]) гомоморфизм $\mathfrak{H}_j \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Z},\ \mathrm{Aut}(E_j, p_j, B_j))$, определенный формулами (11) — (13), является насыщенным. Поэтому в силу теоремы [10] в пространстве $B_j = S_j \times V^n$ найдется всюду плотное множество $D_j^{(2)}$ типа G_δ, обладающее свойствами:

а) при всяких $(f,x) \in D_j^{(2)}$, $k \in \{1,...,n\}$ имеет место цепочка равенств $\lambda_k(\mathfrak{H}_j,(f,x)) = \Omega_R(\mathfrak{H}_j,(f,x)) = \Omega^{(k)}(\mathfrak{H}_j,(f,x))$, которая в силу лемм 1 — 3 эквивалентна цепочке равенств

$$\lambda_k((f,x)) = \Omega_k((f,x)) = \Omega^{(k)}((f,x)); \tag{23}$$

б) при всяких $(f,x) \in D_j^{(2)}$, $k \in \{1,...,n-1\}$ имеет место альтернатива: либо выполнено равенство $\lambda_{n-R}(\mathfrak{H}_j,(f,x)) = \lambda_{n-R+1}(\mathfrak{H}_j,(f,x))$, которое в силу леммы 1 эквивалентно равенству

$$\lambda_{n-k}((f,x)) = \lambda_{n-k+1}((f,x)), \tag{24}$$

либо гомоморфизм $\mathfrak{H}_j$ экспоненциально разделен с индексом k в точке (f,x), т. е. выполнена следующая совокупность условий:

i) имеет место строгое неравенство $\lambda_{n-k}(\mathfrak{H}_j,(f,x)) > \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H}_j,(f,x))$, которое в силу леммы 1 эквивалентно строгому неравенству

$$\lambda_{n-R}((f,x)) > \lambda_{n-R+1}((f,x)); \tag{25}$$

ii) для всякого алгебраического дополнения

$$R^{n-R} = p_j^{-1}((f,x))\theta R_0^R(\mathfrak{H}_j,(f,x)) \tag{26}$$

векторного подпространства $R_0^k(\mathfrak{H}_j,(f,x))$ слоя $p_j^{-1}((f,x))$ существуют вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\xi \in R^{n-k}$, $\eta \in R_0^k(\mathfrak{H}_j,(f,x))$ для всяких, таких $t \in Z^+, s \in Z^+$ что, $t \geqslant s$ имеет место неравенство

$$\left|X^t\xi\right| \cdot \left|X^s\xi\right|^{-1} \geqslant \alpha \left|X^t\eta\right| \cdot \left|X^s\eta\right|^{-1} \exp(\beta(t-s)). \tag{27}$$

Напомним, что если выполнено строгое неравенство $\lambda_{n-R}(\mathfrak{H}_j,b) > \lambda_{n-R+1}(\mathfrak{H}_j,b)$, то через $R_0^k(\mathfrak{H}_j,b)$ обозначается векторное пространство

$$E_k(\mathfrak{H}_j,b) \underset{def}{=} \left\{\xi \in p_j^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H}_j,\xi) \leqslant \lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H}_j,b)\right\}, \tag{28}$$

где

$$\lambda(\mathfrak{H}_j,\xi) \underset{def}{=} \begin{cases} \overline{\lim\limits_{m\to+\infty}} \dfrac{1}{m}\ln\left|X_j^m\xi\right| & npu\left|\xi\right| \neq 0, \\ -\infty & npu\left|\xi\right| = 0 \end{cases} \tag{29}$$

(напомним, что $\left|\eta\right| \underset{def}{=} (\Delta(\eta,\eta))^{1/2}$ при всяком $\eta \in E_j$, где $\Delta_j(\cdot,\cdot)$ определено формулой (10).

Так как отображение $pr_{2(f,x)}$ (сужение на слой $p_j^{-1}((f,x))$ проекции pr_2 произведения $S_j \times TV^n$ на второй сомножитель) при всяком $(f,x) \in B_j$ есть изоморфизм векторного пространства $p_j^{-1}((f,x))$ на векторное пространство $\pi^{-1}(x)$ (см. п. 1, § 1, [3]), то формула (26) эквивалентна формуле

$$pr_{2(f,x)}R^{n-k} = \pi^{-1}(x)\theta\, pr_{2(f,x)}R_0^k(\mathfrak{H}_j,(f,x)). \tag{30}$$

При всяких $f \in S_i, x \in V^n, k \in \{1,...n-1\}$, для которых выполнено (25), имеем

$$R_0^k(\mathfrak{H}_j,(f,x)) \underset{(28)}{\overset{(25)}{=}} E_k(\mathfrak{H}_j,(f,x)). \tag{31}$$

Так как (см. п. 6 е)) отображение X_j^m при всяком $m \in N$ является сужением отображения $X^m : E \to E$ на множество $E_j \subset E$, то, сравнивая формулу (22) с формулой (22''') [4], видим, что $\lambda((\mathfrak{H}_j,\xi) = \lambda(\mathfrak{H},\xi)$ для всякого $\xi \in E_j$. Отсюда в силу формулы (37) [4] следует, что при всяких $f \in S_j, x \in V^n, \xi \in p_j^{-1}((f,x))$ имеет место равенство

$$\lambda(\mathfrak{H}_j,\xi) = \lambda(f, pr_{2,(f,x)}\xi), \tag{32}$$

где $\lambda(f,\mathfrak{x})$ определено формулой (4''') *[4],* совпадающей с формулой (4''') настоящей статьи.

Из леммы 1 и формулы (32) следует, что для всяких $f \in S_j, x \in V^n, k \in \{1,...,n\}$ имеет место равенство

$$pr_{2(f,x)}E_k(\mathfrak{H}_j,(f,x)) = E_k(f,x), \tag{33}$$

где $E_k(\mathfrak{H}_j,b)$ определено формулой (21), а — $E_k(f,x)$ формулой (4'').

Из формул (31), (33) следует, что при всяких $f \in S_j, x \in V^n, k \in \{1,...,n-1\}$, при которых выполнено строгое неравенство (25), имеем

$$pr_{2(f,x)}R_0^k(\mathfrak{H}_j,(f,x)) = E_k(f,x). \tag{34}$$

В силу формулы (34) равенство (30) переписывается в виде

$$pr_{2(f,x)}R^{n-k} = \pi^{-1}(x)\theta E_k(f,x).$$

Поэтому условие *ii)* можно переписать в виде: для всякого алгебраического дополнения $l^{n-R} = \pi^{-1}(x)\theta E_k(f,x)$ векторного подпространства $E_k(f,x)$ (в векторном пространстве $\pi^{-1}(x)$) существуют вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\mathfrak{x} \in l^{n-k}, \mathfrak{y} \in E_k(f,x)$ для всяких $t \in Z^+, s \in Z^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$\left|X^t(f,\mathfrak{x})\right| \cdot \left|X^s(f,\mathfrak{x})\right|^{-1} \geqslant \alpha \left|X^t(f,\mathfrak{y})\right| \cdot \left|X^s(f,\mathfrak{y})\right|^{-1} \exp(\beta(t-s))$$

(где $|\xi| \underset{def}{=} (\Delta_j(\xi,\xi))^{1/2}$ для всякого $\xi \in E$), которое с помощью формул (10), (12) переписывается в виде

$$\left|df^t\mathfrak{x}\right| \cdot \left|df^s\mathfrak{x}\right|^{-1} \geqslant \alpha \left|df^t\mathfrak{y}\right| \cdot \left|df^s\mathfrak{y}\right|^{-1} \exp(\beta(t-s))$$

(где $|\mathfrak{z}| \underset{def}{=} (\delta(\mathfrak{z},\mathfrak{z}))^{1/2}$ для всякого $\mathfrak{z} \in TV^n$). Последнее неравенство при $|\mathfrak{x}| \neq 0, |\mathfrak{y}| \neq 0$ эквивалентно неравенству

$$\left|df^t\mathfrak{x}\right| . \left|df^s\mathfrak{y}\right| \geqslant \alpha \left|df^s\mathfrak{x}\right| . \left|df^s\mathfrak{y}\right|^{-1} \exp(\beta(t-s)). \tag{35}$$

Если $|\mathfrak{x}| = 0$ или $|\mathfrak{y}| = 0$, то левая и правая части нестрогого неравенства (35) равны нулю, следовательно, неравенство (35) верно и в том случае, когда $|\mathfrak{x}| = 0$ или $|\mathfrak{y}| = 0$.

Поэтому из условия *ii)* следует: для всякого алгебраического дополнения l^{n-k} векторного подпространства*) $E_k(f,x)$ (в касательном пространстве T_xV^n) существуют вещественные числа, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие что для всяких $\mathfrak{x} \in l^{n-R}$, $\mathfrak{y} \in E_k(f,x)$ для всяких $t \in Z^+$, таких $s \in Z^+$, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство (35).

---

*) Напомним, что, согласно принятым в этой статье обозначениям, $\pi^{-1}(x) = T_xV^n$ для всякого $x \in V^n$.

В. Положим $D_j = D_j^{(1)} \bigcap D_j^{(2)}$ (множество $D_j^{(1)}$ введено в подпункте А, множество $D_j^{(2)}$ — в начале подпункта Б). Так как $D_j^{(1)}$ и $D_j^{(2)}$ — всюду плотные множества типа G_δ в полном метрическом пространстве (B_j, d) (полнота метрического пространства (B_j, d) (см. формулы (7), (9) следует из полноты метрических пространств (S_j, d_1) (см. п. 6а)) (V^n, ρ) (см. п. 1) G_υ то в силу теоремы Бэра множество $D_j = D_j^{(1)} \bigcap D_j^{(2)}$ есть всюду плотное множество типа G_δ в метрическом пространстве (B_j, d), а следовательно (см. п. 6б)), и в метрическом пространстве $(B_j, \tilde{d})$.

Имеем: а) при всяких $(f, x) \in D_j = D_j^{(1)} \bigcap D_j^{(2)}, k \in \{1, ..., n\}$ функция: $\Omega_R(\cdot) : S_j \times V^n \to R$ полунепрерывна сверху в точке (f, x) (доказано в подпункте А);

б) при всяких $(f, x) \in D_j = D_j^{(1)} \bigcap D_j^{(2)}, k \in \{1, ..., n\}$ имеют место равенства $\lambda_k((f, x)) = \Omega_k((f, x)) = \Omega^{(k)}((f, x))$ (см. равенства (23));

в) при всяких $(f, x) \in D_j = D_j^{(1)} \bigcap D_j^{(2)}, k \in \{1, ..., n-1\}$ имеет место альтернатива: либо выполнено равенство $\lambda_{n-k}((f, x)) = \lambda_{n-k+1}((f, x)))$ (см. равенство (24)), либо (см. последнюю фразу подпункта Б) векторное подпространство $E_k(f, x)$ касательного пространства $T_x V^n$ обладает следующим свойством: для всякого алгебраического дополнения l^{n-R} векторного подпространства $E_k(f, x)$ (в векторном пространстве: $T_x V_n$) существуют вещественные числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что для всяких $\mathfrak{x} \in l^{n-k}, \mathfrak{y} \in E_k(f, x)$, для всяких целых чисел $t \geqslant s \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\left|df^t \mathfrak{x}\right| \cdot \left|df^s \mathfrak{y}\right| \geqslant \alpha \left|df^s \mathfrak{x}\right| \cdot \left|df^s \mathfrak{y}\right| \exp(\beta(t-s)).$$

Теорема, сформулированная в п. 5, доказана.

Литература

1. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 5,. с. 804 — 821.
2. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 6, с. 957 — 978.
3. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения 1982, т. 18, № 8,. с. 1330 — 1345.
4. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1984 т. 20, № 8г с. 1366 — 1376.
5. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 12, с. 2132 — 2148.
6. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № *8,* с. 1408 — 1416.
7. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 8, с. 1344 — 1356.
8. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 9, с. 1503 — 1510.
9. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 9, с. 1507 — 1548.
10. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 5, с. 753 — 779.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 24 февраля 1983 г.