УДК 517.938

О типичном поведении условной экспоненциальной устойчивости при возмущениях

Миллионщиков В. М.

Предисловие

Напомним, что линейная однородная система дифференциальных уравнений $\dot{x} = A(t)x$ ($x \in \mathbf{R}^n$) называется экспоненциально разделенной с индексом k, если найдется разложение $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^k \oplus \mathbf{R}^{n-k}$ и найдутся положительные вещественные числа α, β такие, что

$$\frac{|x(t)|}{|x(s)|} \geq \alpha \frac{|y(t)|}{|y(s)|} \exp(\beta(t-s))$$

для всяких $t \geqslant s \geqslant 0$ и всяких ненулевых решений $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ системы $\dot{x} = A(t)x$ таких, что $x(0) \in \mathbf{R}^{n-k}$, $y(0) \in \mathbf{R}^k$.

В предисловии к статье [1] дан краткий очерк истории возникновения этого понятия. Основной результат статьи [1] — типичность сохранения экспоненциальной разделенности при малых (в некотором смысле, точнее, в некоторых различных, не эквивалентных друг другу смыслах) возмущениях системы.

В настоящей статье изучается типичное поведение «медленного» подпространства $\mathbf{R}^k$, фигурирующего в приведенном выше определении экспоненциальной разделенности с индексом k, при малых возмущениях системы. Оказывается, и это составляет содержание основного результата этой статьи, что типична непрерывная зависимость $\mathbf{R}^k$ от системы.

Приводимые ниже (в предисловии) две теоремы являются формулировками наиболее простых частных случаев некоторых теорем статьи.

Пусть V^n — связное замкнутое n-мерное дифференцируемое многообразие. При всяком $k = \{0,...,n\}$ множество T^kV^n k-мерных векторных подпространств касательных пространств этого многообразия наделяется естественной топологией — топологией пространства расслоенного пространства со слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$ (грассманово многообразие k-мерных векторных подпространств пространства $\mathbf{R}^n$), ассоциированного с тем же локально тривиальным главным $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$-расслоением, с которым ассоциировано касательное расслоение многообразия V^n.

Обозначим через S_d множество диффеоморфизмов класса C^1, отображающих V^n на себя, наделенное C^1-топологией. Взяв целые степени диффеоморфизма $f \in S_d$, получают действие (класса C^1) группы $\mathbf{Z}$ на V^n — динамическую систему f^t с дискретным временем. Через S_v обозначим множество векторных полей класса C^1 на V^n, наделенное C^1-топологией. Всякое такое векторное поле F индуцирует поток f^t на V^n, т. е. действие (класса C^1) группы $\mathbf{R}$ на V^n — динамическую систему f^t с непрерывным временем.

Скажем, что уравнение в вариациях динамической системы f^t на V^n ($t \in \mathbf{Z}$ или $t \in \mathbf{R}$) вдоль траектории точки x экспоненциально разделено с индексом k, если касательное пространство T_xV^n представимо в виде прямой суммы k-мерного и $(n-k)$-мерного подпространств:

$$T_x V^n = \mathbf{R}^k\left(f^t, x\right) \oplus \mathbf{R}^{n-k}$$

таких, что для некоторых положительных вещественных чисел α, β имеет место неравенство

$$\left|f^t\mathfrak{x}\right|\left|f^s\mathfrak{y}\right| \geqslant \alpha\left|f^t\mathfrak{x}\right|\left|f^s\mathfrak{y}\right|\exp\left(\beta\left(t-s\right)\right)$$

для всяких $t \geqslant s \geqslant 0$ (соответственно, $t \in \mathbf{Z}$, $s \in \mathbf{Z}$ или $t \in \mathbf{R}$, $s \in \mathbf{R}$) и всяких $\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^{n-k}$, $\mathfrak{y} \in \mathbf{R}^k\left(f^t, x\right)$. Здесь $|\cdot|$ — норма, индуцированная римановой метрикой на V^n; легко видеть, что если уравнение в вариациях экспоненциально разделено с индексом k в одной римановой метрике, то оно обладает этим же свойством и во всякой другой римановой метрике замкнутого дифференцируемого многообразия.

Т е о р е м а 1. *В пространстве $S_d \times V^n$ имеется всюду плотное множество C_d типа G_δ такое, что при всяких $\left(f, x\right) \in C_d$, $k \in \{1,...,n-1\}$, имеет место утверждение: если уравнение в вариациях динамической системы f^t ($t \in \mathbf{Z}$) вдоль траектории точки x экспоненциально разделено с индексом k, то отображение*

$$\left(g, y\right) \mapsto \mathbf{R}^k\left(g^t, y\right)$$

непрерывно в точке $\left(f, x\right)$.

Т е о р е м а 2. *В пространстве $S_v \times V^n$ имеется всюду плотное множество C_v типа G_δ такое, что при всяких $\left(F, x\right) \in C_v$, $k \in \{1,...,n-1\}$, имеет место утверждение: если уравнение в вариациях динамической системы, индуцированной векторным полем F, вдоль траектории точки x экспоненциально разделено с индексом k, то отображение $\left(G, y\right) \mapsto \mathbf{R}^k\left(g^t, y\right)$ (где g^t — поток, индуцированный векторным полем G) непрерывно в точке $\left(F, x\right)$.*

Эти теоремы надо воспринимать в совокупности с теоремами, сформулированными в предисловии статьи [1], согласно которым экспоненциальная разделенность с индексом k в условиях теоремы 1 (2) имеет место для всякого $\left(g, y\right)$ (соответственно, $\left(G, y\right)$) из некоторой окрестности точки $\left(f, x\right)$ (соответственно, точки $\left(F, x\right)$), и потому отображение $\left(g, y\right) \mapsto \mathbf{R}^k\left(g^t, y\right)$ (соответственно, $\left(G, y\right) \mapsto \mathbf{R}^k\left(g^t, y\right)$ определено в некоторой окрестности точки $\left(f, x\right)$ (соответственно, $\left(F, x\right)$) в пространстве $S_d \times V^n$ (соответственно, $S_v \times V^n$).

Введение

1 Пусть $\left(E, p, B\right)$ — метризованное векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^n$ (база B — полное метрическое пространство, расстояние в котором обозначается через $d_B\left(\cdot,\cdot\right)$).

2. Пусть $\mathbf{G}$ есть группа $\mathbf{R}$ или группа $\mathbf{Z}$ и пусть $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\left(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\left(E, p, B\right)\right)$, где через $\mathrm{Hom}\left(\mathbf{G}, \mathrm{Aut}\left(E, p, B\right)\right)$ обозначается множество гомоморфизмов группы $\mathbf{G}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения $\left(E, p, B\right)$, обозначаемую через $\mathrm{Aut}\left(E, p, B\right)$. Напомним, что образом $\mathfrak{H}t$ точки $t \in \mathbf{G}$ при гомоморфизме $\mathfrak{H}$ является пара $\left(X^t, \chi^t\right)$, где X^t — гомеоморфизм E на E, χ^t — гомеоморфизм B на B, причем:

а) $pX^t = \chi^t p$ при всяком $t \in \mathbf{G}$, б) при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ сужение $X^t[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X^t есть линейное отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$,

в) $X^{t+s} = X^t X^s$, $\chi^{t+s} = \chi^t \chi^s$ при всяких $t \in \mathbf{G}$, $s \in \mathbf{G}$.

Потребуем от гомоморфизма $\mathfrak{H}$, чтобы для некоторой функции $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$, удовлетворяющей при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ равенству

$$a(\chi^t b) = a(b), \tag{1}$$

при всяких $b \in B$, $t \in \mathbf{G}$ выполнялось неравенство

$$\left\| X^t[b] \right\| \leqslant \exp(|t| a(b)). \tag{2}$$

3. Напомним определение Перрона в форме, удобной для дальнейшего изложения.

Определение. Гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \operatorname{Hom}(\mathbf{G}, \operatorname{Aut}(E, p, B))$ называется *экспоненциально разделенным* (на $\mathbf{G}^+$) *с индексом* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *в точке* $b \in B$, если найдется $\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))$ такое, что для всякого алгебраического дополнения $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}^k$ подпространства $\mathbf{R}^k$ существуют $\alpha \in \mathbf{R}^+_*$, $\beta \in \mathbf{R}^+_*$ такие, что для всяких $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}_*$, $\eta \in \mathbf{R}^k_*$, $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geq s$, имеет место неравенство

$$\left| X^t \xi \right| \left| X^s \xi \right|^{-1} \geqslant \alpha \left| X^t \eta \right| \left| X^s \eta \right|^{-1} \exp(\beta(t-s)). \tag{3}$$

Поясним обозначения: $\mathbf{G}^+$ — множество всех неотрицательных элементов группы $\mathbf{G}$; $\mathbf{R}^+_*$ — множество всех положительных действительных чисел; звездочка справа внизу означает выбрасывание нуля; $G_k(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие k-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$.

Для всякого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ обозначим через $S^{(k)}(\mathfrak{H})$ множество тех $b \in B$, для которых гомоморфизм $\mathfrak{H}$ экспоненциально разделен с индексом k в точке b.

4. Лемма 1. *Для всяких $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $b \in B$ существует не более одного k-мерного векторного подпространства $\mathbf{R}^k$ слоя $p^{-1}(b)$, обладающего свойством: для всякого $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}^k$ существуют $\alpha \in \mathbf{R}^+_*$, $\beta \in \mathbf{R}^+_*$ такие, что для всяких $\xi \in \mathbf{R}^{n-k}_*$, $\eta \in \mathbf{R}^k_*$ для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство*

$$\left| X^t \xi \right| \left| X^s \xi \right|^{-1} \geqslant \alpha \left| X^t \eta \right| \left| X^s \eta \right|^{-1} \exp(\beta(t-s)). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть для некоторых $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $b \in B$ k-мерные векторные подпространства $\mathbf{R}^k_1$, $\mathbf{R}^k_2$ слоя $p^{-1}(b)$ обладают указанным в формулировке леммы свойством.

Пусть $\mathbf{R}^k_1 \neq \mathbf{R}^k_2$. Тогда $\mathbf{R}^k_1 \setminus \mathbf{R}^k_2 \neq \varnothing$, $\mathbf{R}^k_2 \setminus \mathbf{R}^k_1 \neq \varnothing$. Фиксируем $\xi_1 \in \mathbf{R}^k_1 \setminus \mathbf{R}^k_2$, $\xi_2 \in \mathbf{R}^k_2 \setminus \mathbf{R}^k_1$. Так как $\xi_1 \in \mathbf{R}^k_1 \setminus \mathbf{R}^k_2$ принадлежит некоторому алгебраическому дополнению $p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}^k_2$ подпространства $\mathbf{R}^k_2$, а $\xi_2 \in \mathbf{R}^k_2$, то найдутся $\alpha_1 \in \mathbf{R}^+_*$, $\beta_1 \in \mathbf{R}^+_*$ такие, что для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$\left| X^t \xi_1 \right| \left| X^s \xi_1 \right|^{-1} \geqslant \alpha_1 \left| X^t \xi_2 \right| \left| X^s \xi_2 \right|^{-1} \exp(\beta_1(t-s)). \tag{5}$$

Так как $\xi_2 \in \mathbf{R}^k_2 \setminus \mathbf{R}^k_1$ принадлежит некоторому алгебраическому дополнению $p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}^k_1$ подпространства $\mathbf{R}^k_1$, а $\xi_1 \in \mathbf{R}^k_1$, то найдутся $\alpha_2 \in \mathbf{R}^+_*$, $\beta_2 \in \mathbf{R}^+_*$ такие, что для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$\left|X^t\xi_2\right|\left|X^s\xi_2\right|^{-1} \geqslant \alpha_2 \left|X^t\xi_1\right|\left|X^s\xi_1\right|^{-1} \exp\left(\beta_2\left(t-s\right)\right). \tag{6}$$

Перемножив почленно неравенства (5), (6), получаем, что при всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$1 \geqslant \alpha_1, \alpha_2 \exp\left(\left(\beta_1+\beta_2\right)\left(t-s\right)\right),$$

что невозможно, так как правая часть этого неравенства стремится к $+\infty$ при $t-s \to +\infty$ (поскольку числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ положительны). Полученное противоречие доказывает, что $\mathbf{R}_1^k = \mathbf{R}_2^k$. Лемма 1 доказана.

5. Лемма 2. *Пусть для некоторых* $k \in \{1,...,n-1\}$, $b \in B$ *некоторое подпространство* $\mathbf{R}^k \in G_k\left(p^{-1}(b)\right)$ *обладает свойством: для всякого* $\mathbf{R}^{n-k} = p^{-1}(b) \ominus \mathbf{R}^k$ *существуют* $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*^+$ *такие, что для всяких* $\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k}$, $\eta \in \mathbf{R}_*^k$, *для всяких* $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ *таких, что* $t \geqslant s$, *выполнено неравенство*

$$\left|X^t\xi\right|\left|X^s\xi\right|^{-1} \geqslant \alpha \left|X^t\eta\right|\left|X^s\eta\right|^{-1} \exp\left(\beta\left(t-s\right)\right).$$

Тогда это подпространство $\mathbf{R}^k$ *удовлетворяет неравенству*

$$\varlimsup_{\substack{t-s\to+\infty \\ \left(t\in\mathbf{G}^+, s\in\mathbf{G}^+\right)}} \frac{1}{t-s} \ln\left\{\left\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}^k}\right\|\left\|X^{s-t}_{X^t\left(\left(\mathbf{R}^k\right)\perp\right)}\right\|\right\} < 0, \tag{7}$$

где $\left(\mathbf{R}^k\right)\perp$ — *ортогональное дополнение подпространства* $\mathbf{R}^k$ *в слое* $p^{-1}(b)$.

Доказательство. 1. При всяких $t \in \mathbf{G}$, $s \in \mathbf{G}$ имеют место формулы

$$\left\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}^k}\right\| = \sup_{n\in\mathbf{R}_*^k}\left\{\left|X^t\eta\right|\left|X^s\eta\right|^{-1}\right\}, \tag{8}$$

$$\left\|X^{s-t}_{X^t\left(\left(\mathbf{R}^k\right)\perp\right)}\right\| = \sup_{\xi\in\left(\mathbf{R}^k\right)_*^\perp}\left\{\left|X^t\xi\right|\left|X^s\xi\right|^{-1}\right\}. \tag{9}$$

При написании формул (8), (9) использованы, кроме стандартного определения нормы линейного оператора, свойства б), в) п. 2 и вытекающая из этих свойств невырожденность линейных операторов $X^r[b]$ ($r \in \mathbf{G}$).

2. Пусть даны $k \in \{1,...,n-1\}$, $b \in B$ и пусть $\mathbf{R}^k \in G_k\left(p^{-1}(b)\right)$ обладает свойством, указанным в формулировке доказываемой леммы. Тогда существуют $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*^+$ такие, что для всяких $\xi \in \left(\mathbf{R}^k\right)_*^\perp$, $\eta \in \mathbf{R}_*^k$, для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$\left|X^t\xi\right|\left|X^s\xi\right|^{-1} \geqslant \alpha \left|X^t\eta\right|\left|X^s\eta\right|^{-1} \exp\left(\beta\left(t-s\right)\right).$$

Отсюда вследствие формул (8), (9) вытекает: для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geqslant s$, выполнено неравенство

$$\left\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}^k}\right\|\left\|X^{s-t}_{X^t\left(\left(\mathbf{R}^k\right)\perp\right)}\right\| \leqslant \alpha^{-1}\exp\left(-\beta\left(t-s\right)\right),$$

из которого следует неравенство (7), так как $\beta > 0$. Лемма 2 доказана.

6. Лемма 3. *Пусть для некоторых* $k \in \{1,...,n-1\}$, $b \in B$ *некоторое подпространство* $\mathbf{R}^k \in G_k\left(p^{-1}(b)\right)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\varlimsup_{\substack{t-s\to+\infty \\ \left(t\in\mathbf{G}^+, s\in\mathbf{G}^+\right)}} \frac{1}{t-s} \ln\left\{\left\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}^k}\right\|\left\|X^{s-t}_{X^t\left(\left(\mathbf{R}^k\right)\perp\right)}\right\|\right\} < 0. \tag{10}$$

Тогда это подпространство $\mathbf{R}^k$ *обладает свойством: существуют* $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $\beta \in \mathbf{R}_*^+$

такие, что для всяких $\xi \in \left(\mathbf{R}^k\right)_*^\perp$, $\eta \in \mathbf{R}_*^k$, *для всяких* $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ *таких, что* $t \geqslant s$, *выполнено неравенство*

$$\left|X^t\xi\right|\left|X^s\xi\right|^{-1} \geqslant \alpha\left|X^t\eta\right|\left|X^s\eta\right|^{-1}\exp\left(\beta\left(t-s\right)\right). \tag{11}$$

Доказательство. Из условия леммы следует, что для некоторого $\beta \in \mathbf{R}_*^+$ (в качестве такого β годится любое число из интервала $\left(0,-\gamma\right)$, где γ — левая часть неравенства (10)) найдется $\tau \in \mathbf{G}^+$ такое, что для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t-s \geqslant \tau$, имеет место неравенство

$$\left\|X_{X^s\mathbf{R}^k}^{t-s}\right\|\left\|X_{X^t\left(\left(\mathbf{R}^k\right)\perp\right)}^{s-t}\right\| < \exp\left(-\beta\left(t-s\right)\right). \tag{12}$$

Для всяких $t \in \mathbf{G}$, $s \in \mathbf{G}$ имеют место формулы

$$\left\|X_{X^s\mathbf{R}^k}^{t-s}\right\| \leq \left\|X^{s-t}\left[\chi^s b\right]\right\| \leqslant \exp\left(\left|t-s\right|a\left(b\right)\right), \tag{13}$$

$$\left\|X_{X^t\left(\left(\mathbf{R}^k\right)\perp\right)}^{s-t}\right\| \leqslant \left\|X^{s-t}\left[\chi^t b\right]\right\| \leqslant \exp\left(\left|t-s\right|a\left(b\right)\right), \tag{14}$$

первое неравенство в каждой из этих двух цепочек — следствие того, что операторы $X_{X^s\mathbf{R}^k}^{t-s}$, $X_{X^t\left(\left(\mathbf{R}^k\right)\perp\right)}^{s-t}$ — сужения операторов $X^{s-t}\left[\chi^s b\right]$, $X^{s-t}\left[\chi^t b\right]$ соответственно, последнее неравенство в каждой из этих двух цепочек — следствие условия, наложенного на гомоморфизм $\mathfrak{H}$ в п. 2 (см. фразу, содержащую формулы (1), (2)).

При всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $0 \leqslant t-s \leqslant \tau$, из формул (13), (14) следует:

$$\left\|X_{X^s\mathbf{R}^k}^{t-s}\right\|\left\|X_{X^t\left(\left(\mathbf{R}^k\right)\perp\right)}^{s-t}\right\| \leqslant \exp\left(2\tau a\left(b\right)\right) \leqslant \exp\left(2\tau a\left(b\right)+\beta\tau\right)\exp\left(-\beta\left(t-s\right)\right). \tag{15}$$

Из фраз, содержащих формулы (12), (15), следует, что для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geq s$, имеет место неравенство

$$\left\|X_{X^s\mathbf{R}^k}^{t-s}\right\|\left\|X_{X^t\left(\left(\mathbf{R}^k\right)\perp\right)}^{s-t}\right\| \leqslant \alpha^{-1}\exp\left(-\beta\left(t-s\right)\right), \tag{16}$$

где $\alpha \underset{\text{def}}{=} \exp\left(-\left(2\tau\alpha\left(b\right)+\beta\tau\right)\right)$. Из формул (8), (9), (16) следует, что для всяких $\xi \in \left(\mathbf{R}^k\right)_*^\perp$, $\eta \in \mathbf{R}_*^k$ имеет место неравенство

$$\left|X^t\eta\right|\left|X^s\eta\right|^{-1}\left|X^t\xi\right|\left|X^s\xi\right|^{-1} \leqslant \alpha^{-1}\exp\left(-\beta\left(t-s\right)\right),$$

из которого следует неравенство (11). Лемма 3 доказана.

7. Лемма 4. *Для всяких* $k \in \{1,...,n-1\}$, $b \in B$, $\mathbf{R}^k \in G_k$ ($p^{-1}\left(b\right)$) *имеет место равенство*

$$\varlimsup_{\substack{t-s\to+\infty \\ \left(t\in\mathbf{G}^+,s\in\mathbf{G}^+\right)}} \frac{1}{t-s}\ln\left\{\left\|X_{X^s\mathbf{R}^k}^{t-s}\right\|\left\|X_{X^t\left(\left(\mathbf{R}^k\right)\perp\right)}^{s-t}\right\|\right\} = \varlimsup_{\substack{t-s\to+\infty \\ \left(t\in\mathbf{Z}^+,s\in\mathbf{Z}^+\right)}} \frac{1}{t-s}\ln\left\{\left\|X_{X^s\mathbf{R}^k}^{t-s}\right\|\left\|X_{X^t\left(\left(\mathbf{R}^k\right)\perp\right)}^{s-t}\right\|\right\}. \tag{17}$$

Доказательство. Левая и правая части равенства (17), справедливость которого утверждает доказываемая лемма, суть верхние пределы от одного и того же выражения, но верхний предел в правой части берется по более узкому множеству, чем в левой. Собственно говоря, это множество является строго более узким, если $\mathbf{G}=\mathbf{R}$, а в случае $\mathbf{G}=\mathbf{Z}$ оба множества совпадают, поэтому в случае $\mathbf{G}=\mathbf{Z}$ лемма 4 очевидна. Мы, впрочем, проведем доказательство так, что оно будет годиться в обоих случаях. Итак, верхний предел в левой части доказываемого равенства берется по более широкому множеству, чем в правой, и поэтому левая часть больше или равна правой. Для доказательства леммы остается доказать, что для всяких

$$k=1,2,...,n,\ b \in B,\ \mathbf{R}^k \in G_k\left(p^{-1}\left(b\right)\right)$$

имеет место неравенство
$$\varlimsup_{\substack{t-s\to+\infty\\ (t\in\mathbf{G}^+,s\in\mathbf{G}^+)}}\frac{1}{t-s}\ln\left\{\left\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}^k}\right\|\left\|X^{s-t}_{X^t\left((\mathbf{R}^k)\perp\right)}\right\|\right\}\leqslant\varlimsup_{\substack{t-s\to+\infty\\ (t\in\mathbf{Z}^+,s\in\mathbf{Z}^+)}}\frac{1}{t-s}\ln\left\{\left\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}^k}\right\|\left\|X^{s-t}_{X^t\left((\mathbf{R}^k)\perp\right)}\right\|\right\}. \qquad (18)$$

Пусть даны $k\in\{1,...,n-1\}$, $b\in B$, $\mathbf{R}^k\in G_k\left(p^{-1}(b)\right)$. Для всяких $t\in\mathbf{G}$, $s\in\mathbf{G}$ в силу свойства в) п. 2 имеем:
$$X^{t-s}=X^{t-[t]}X^{[t]-[s]}X^{[s]-s}$$
(через $[\tau]$ обозначается целая часть действительного числа τ), откуда
$$X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}^k}=X^{t-[t]}_{X^{[t]}\mathbf{R}^k}X^{[t]-[s]}_{X^{[s]}\mathbf{R}^k}X^{[s]-s}_{X^s\mathbf{R}^k},$$
следовательно,
$$\begin{gathered}\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}^k}\|\leqslant\|X^{t-[t]}_{X^{[t]}\mathbf{R}^k}\|\|X^{[t]-[s]}_{X^{[s]}\mathbf{R}^k}\|\|X^{[s]-s}_{X^s\mathbf{R}^k}\|\leqslant\\ \leqslant\|X^{t-[t]}[\chi^{[t]}b]\|\|X^{[t]-[s]}_{X^{[s]}\mathbf{R}^k}\|\|X^{[s]-s}[\chi^s b]\|.\end{gathered}\qquad (19)$$
Подставив в формулу (19) неравенства
$$\|X^{t-[t]}[\chi^{[t]}b]\|\leqslant\exp((t-[t])a(\chi^{[t]}b))=\exp((t-[t])a(b))\leqslant\exp(a(b)),$$
$$\|X^{[s]-s}[\chi^s b]\|\leqslant\exp((s-[s])a(\chi^s b))=\exp((s-[s])a(b))\leqslant\exp(a(b)),$$
вытекающие из формул (1), (2) и неравенств $0\leqslant t-[t]<1$, $0\leqslant s-[s]<1$, получаем, что при всяких $t\in\mathbf{G}$, $s\in\mathbf{G}$ выполнено неравенство
$$\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}^k}\|\leqslant\|X^{[t]-[s]}_{X^{[s]}\mathbf{R}^k}\|\exp(2a(b)). \qquad (20)$$

Аналогично (заменив в предыдущих выкладках $\mathbf{R}^k$ на $(\mathbf{R}^k)^\perp$, t на s, а s — на t) получаем, что при всяких $t\in\mathbf{G}$, $s\in\mathbf{G}$ имеет место неравенство
$$\|X^{s-t}_{X^t((\mathbf{R}^k)^\perp)}\|\leqslant\|X^{[s]-[t]}_{X^{[t]}((\mathbf{R}^k)^\perp)}\|\exp(2a(b)). \qquad (21)$$

Из формул (20), (21) следует, что при всяких $t\in\mathbf{G}$, $s\in\mathbf{G}$ таких, что $t>s+1$, имеет место неравенство
$$\begin{gathered}\frac{1}{t-s}\ln\{\|X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}^k}\|\|X^{s-t}_{X^t((\mathbf{R}^k)^\perp)}\|\}\leqslant\\ \leqslant\frac{[t]-[s]}{t-s}\frac{1}{[t]-[s]}\ln\{\|X^{[t]-[s]}_{X^{[s]}\mathbf{R}^k}\|\|X^{[s]-[t]}_{X^{[t]}((\mathbf{R}^k)^\perp)}\|\}+\frac{1}{t-s}4a(b).\end{gathered}\qquad (22)$$
Если $t-s\to+\infty$ ($t\in\mathbf{G}^+$, $s\in\mathbf{G}^+$), то $[t]-[s]\to+\infty$ ($[t]\in\mathbf{Z}^+$, $[s]\in\mathbf{Z}^+$), $\dfrac{[t]-[s]}{t-s}\to1$, $\dfrac{1}{t-s}4a(b)\to0$, поэтому из неравенства (22) следует неравенство (18). Лемма 4 доказана.

8. Лемма 5. *Пусть для некоторых* $k\in\{1,\ldots,n-1\}$, $b\in B$ *некоторое подпространство* $\mathbf{R}^k\in G_k(p^{-1}(b))$ *обладает свойством: существуют* $\alpha\in\mathbf{R}^+_*$, $\beta\in\mathbf{R}^+_*$ *такие, что для всяких* $\xi\in(\mathbf{R}^k)^\perp_*$, $\eta\in\mathbf{R}^k_*$, *для всяких* $t\in\mathbf{G}^+$, $s\in\mathbf{G}^+$ *таких, что* $t\geqslant s$, *выполнено неравенство*
$$|X^t\xi|\,|X^s\xi|^{-1}\geqslant\alpha\,|X^t\eta|\,|X^s\eta|^{-1}\exp(\beta(t-s)). \qquad (23)$$
Тогда для всякого алгебраического дополнения $\mathbf{R}^{n-k}$ *этого подпространства* $\mathbf{R}^k$ *(в слое* $p^{-1}(b)$*) найдется* $\alpha(\mathbf{R}^{n-k})\in\mathbf{R}^k_*$ *такое, что для всяких* $\zeta\in\mathbf{R}^{n-k}_*$, $\eta\in\mathbf{R}^k_*$, *для всяких* $t\in\mathbf{G}^+$, $s\in\mathbf{G}^+$ *таких, что* $t\geqslant s$, *выполнено неравенство*
$$|X^t\zeta|\,|X^s\zeta|^{-1}\geqslant\alpha(\mathbf{R}^{n-k})\,|X^t\eta|\,|X^s\eta|^{-1}\exp(\beta(t-s)). \qquad (24)$$

Доказательство. 1. Пусть дано алгебраическое дополнение $\mathbf{R}^{n-k}$ подпространства $\mathbf{R}^k$ в слое $p^{-1}(b)$.

Пусть дано $\zeta\in\mathbf{R}^{n-k}_*$. Представим ζ в виде суммы $\zeta=\xi+\psi$, где $\xi\in(\mathbf{R}^k)^\perp$, $\psi\in\mathbf{R}^k$;

тогда $\xi \neq 0$, $|\psi||\xi|^{-1} \leqslant c$, где число $c = c(\mathbf{R}^{n-k})$ не зависит от вектора $\zeta \in \mathbf{R}_*^{n-k}$. Для всякого $t \in \mathbf{G}$ имеем

$$X^t\zeta = X^t\xi + X^t\psi,$$

откуда

$$|X^t\zeta| \geqslant |X^t\xi| - |X^t\psi| = |X^t\xi|(1 - |X^t\psi||X^t\xi|^{-1}). \tag{25}$$

Для всякого $s \in \mathbf{G}$ имеет место равенство

$$X^s\zeta = X^s\xi + X^s\psi,$$

из которого следует

$$|X^s\zeta| \leqslant |X^s\xi| + |X^s\psi| = |X^s\xi|(1 + |X^s\psi||X^s\xi|^{-1}). \tag{26}$$

Если $\psi \neq 0$, то, положив в неравенстве (23) $t = r$, $s = 0$, $\eta = \psi$ и воспользовавшись неравенством $|\psi||\xi|^{-1} \leqslant c$, получаем, что при всяком $r \in \mathbf{G}^+$ имеет место неравенство

$$|X^r\psi||X^r\xi|^{-1} \leqslant c\alpha^{-1}\exp(-\beta r). \tag{27}$$

Если $\psi = 0$, то неравенство (27), очевидно, тоже верно.

Разделив почленно неравенство (25) на неравенство (26), получаем, что при всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ имеет место неравенство

$$|X^t\zeta||X^s\zeta|^{-1} \geqslant |X^t\xi||X^s\xi|^{-1}(1 - |X^t\psi||X^t\xi|^{-1})(1 + |X^s\psi||X^s\xi|^{-1})^{-1},$$

из которого вследствие неравенства (27), примененного при $r = t$ и при $r = s$, следует формула

$$\begin{aligned} |X^t\zeta||X^s\zeta|^{-1} &\geqslant |X^t\xi||X^s\xi|^{-1}(1 - c\alpha^{-1}\exp(-\beta t))(1 + c\alpha^{-1}\exp(-\beta s))^{-1} \geqslant \\ &\geqslant |X^t\xi||X^s\xi|^{-1}(1 + c\alpha^{-1})^{-1}(1 - c\alpha^{-1}\exp(-\beta t)) \end{aligned} \tag{28}$$

для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$.

Возьмем $\theta \in \mathbf{G}^+$, удовлетворяющее неравенству

$$\theta > -\beta^{-1}\ln(\alpha c^{-1}).$$

Тогда для всяких $t \in \theta + \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ из формулы (28) следует неравенство

$$|X^t\zeta||X^s\zeta|^{-1} \geqslant \gamma|X^t\xi||X^s\xi|^{-1}, \tag{29}$$

где

$$\gamma = (1 + c\alpha^{-1})^{-1}(1 - c\alpha^{-1}\exp(-\beta\theta)) > 0.$$

Из определения числа γ видно, что оно не зависит от $\zeta \in \mathbf{R}_*^{n-k}$.

Для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ из формул (1), (2) следуют неравенства

$$|X^t\zeta||X^s\zeta|^{-1} \geqslant \exp(-|t-s|a(b)), \quad |X^t\xi||X^s\xi|^{-1} \leqslant \exp(-|t-s|a(b)),$$

из которых для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $s \leqslant t \leqslant \theta$, следует неравенство

$$|X^t\zeta||X^s\zeta|^{-1} \geqslant \delta|X^t\xi||X^s\xi|^{-1}, \tag{30}$$

где $\delta = \exp(-2\theta a(b)) > 0$. Из определения числа δ видно, что оно не зависит от $\zeta \in \mathbf{R}_*^{n-k}$. Положим

$$\alpha_1(\mathbf{R}^{n-k}) \underset{\text{def}}{=} \min\{\gamma,\ \delta\}. \tag{31}$$

Таким образом, для всякого $\zeta \in \mathbf{R}_*^{n-k}$ нашлось $\xi \in (\mathbf{R}^k)_*^{\perp}$ такое, что для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеем: либо $t \geqslant \theta$, и тогда выполнено неравенство (29), либо $s \leqslant t \leqslant \theta$, и тогда выполнено неравенство (30). Так как из любого из неравенств (29), (30) в силу формулы (31) следует неравенство

$$|X^t\zeta||X^s\zeta|^{-1} \geqslant \alpha_1(\mathbf{R}^{n-k})|X^t\xi||X^s\xi|^{-1}, \tag{32}$$

то мы доказали следующее утверждение: для всякого $\zeta \in \mathbf{R}_*^{n-k}$ найдется $\xi \in (\mathbf{R}^k)_*^{\perp}$ такое, что для всяких $t \in \mathbf{G}^+$, $s \in \mathbf{G}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство (32), из которого для всякого $\eta \in \mathbf{R}_*^k$ в силу неравенства (23) вытекает неравенство (24) с

$\alpha(\mathbf{R}^{n-k}) = \alpha\alpha_1(\mathbf{R}^{n-k})$. Лемма 5 доказана.

9. Теорема (см. [1, § 1]). *В пространстве* B *имеется всюду плотное множество* D *типа* G_δ *такое, что при всяком* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *имеет место включение*

$$S^{(k)}(\mathfrak{H}) \bigcap D \subset \operatorname{Int} S^{(k)}(\mathfrak{H}).$$

§ 1

Фиксируем произвольное $k \in \{1, \ldots, n\}$. Для всякого $b \in B$ обозначим через $E_b^{(k)}$ множество всех k-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$ векторного расслоения (E, p, B). Через $E^{(k)}$ обозначим объединение всех этих множеств:

$$E^{(k)} = \bigcup_{b \in B} E_b^{(k)}.$$

Пусть дана произвольная точка $\hat{b} \in B$ и произвольное k-мерное векторное подпространство $\widehat{\mathbf{R}}^k$ слоя $p^{-1}(\hat{b})$ векторного расслоения (E, p, B). Всякому базису $\{\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_k\}$ векторного пространства $\widehat{\mathbf{R}}^k$ и всякому набору окрестностей $U(\hat{\xi}_i)$ точек $\hat{\xi}_i$ ($i \in \{1, \ldots, k\}$) ($\hat{\xi}_i$ при всяком $i \in \{1, \ldots, k\}$ есть точка топологического пространства E, а $U(\hat{\xi}_i)$ есть окрестность этой точки в топологическом пространстве E) поставим в соответствие множество всех тех k-мерных подпространств $\mathbf{R}^k$ слоев $p^{-1}(b)$ векторного расслоения (E, p, B), для которых

$$\mathbf{R}^k \bigcap U(\hat{\xi}_i) \neq \varnothing \text{ при всяком } i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Объявив сопоставленную таким образом каждой точке $\widehat{\mathbf{R}}^k$ множества $E^{(k)}$ совокупность содержащих эту точку подмножеств множества $E^{(k)}$ базисом окрестностей этой точки, мы наделяем $E^{(k)}$ структурой топологического пространства. Далее через $E^{(k)}$ обозначается это топологическое пространство.

Определим отображение $p^{(k)} : E^{(k)} \to B$, положив для всякого $b \in B$, для всякого $\mathbf{R}^k \in E_b^{(k)}$ по определению $p^{(k)}\mathbf{R}^k = b$.

Непосредственно из определений вытекает, что так определенное расслоение $(E^{(k)}, p^{(k)}, B)$ является локально тривиальным расслоением со слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$. При всяком $k \in \{1, \ldots, n\}$ грассманово многообразие $G_k(\mathbf{R}^n)$ естественно наделяется структурой левого $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$-пространства: если $\mathbf{R}^k \in G_k(\mathbf{R}^n)$, $\varphi \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, то $\varphi\mathbf{R}^k$ есть по определению образ множества $\mathbf{R}^k$ при отображении φ. Непосредственно из определений вытекает, что локально тривиальное расслоение $(E^{(k)}, p^{(k)}, B)$ есть расслоенное пространство со слоем $G_k(\mathbf{R}^n)$, ассоциированное с тем же локально тривиальным главным $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$-расслоением, с которым ассоциировано векторное расслоение (E, p, B) (см. [2, с. 69, 72—73, 97—98]).

Из доказанной во введении леммы 1 следует, что для всякого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, для всякого $b \in S^{(k)}(\mathfrak{H})$ существует единственное подпространство $\mathbf{R}^k \in G_k(p^{-1}(b))$, обладающее свойством, указанным в определении п. 3 введения. Обозначив его через $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H}, b)$, получаем, что при всяком $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ определено отображение $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H}, \cdot) : S^{(k)}(\mathfrak{H}) \to E^{(k)}$ такое, что $p^{(k)}\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H}, \cdot) = 1_{S^{(k)}(\mathfrak{H})}$.

Теорема. *В пространстве* B *имеется всюду плотное множество* D *типа* G_δ *такое, что при всяком* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *множество* $S^{(k)}(\mathfrak{H}) \bigcap D$ *содержится в* *множестве точек непрерывности отображения*

$$\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\ \cdot): S^{(k)}(\mathfrak{H}) \to E^{(k)}.$$

Доказательству этой теоремы предпошлем вспомогательный материал, составляющий содержание § 2.

§ 2

Как известно (см. [2, с. 25]), грассмановы многообразия компактны и имеют счетный базис, следовательно, метризуемы (см. [3, с. 45, предложение 16]). При всяком $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$ фиксируем на грассмановом многообразии $G_k(\mathbf{R}^n)$ некоторое расстояние; разделив это расстояние на какое-нибудь число, превышающее точную верхнюю грань этого расстояния (которая конечна, будучи точной верхней гранью непрерывной на компакте $G_k(\mathbf{R}^n) \times G_k(\mathbf{R}^n)$ функции), получим расстояние $d_k(\cdot,\ \cdot)$ на $G_k(\mathbf{R}^n)$, удовлетворяющее неравенству

$$\sup_{\substack{x \in G_k(\mathbf{R}^n) \\ y \in G_k(\mathbf{R}^n)}} d_k(x,\ y) < 1. \tag{1}$$

Пусть даны $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$, $m \in \mathbf{N}$. Всевозможные открытые шары радиуса $1/m$ образуют покрытие метрического пространства $(G_k(\mathbf{R}^n), d_k)$. Так как $G_k(\mathbf{R}^n)$ компактно, то из этого покрытия можно выбрать конечное покрытие. Обозначим через $F_{k,\,m}^1,\ \dots,\ F_{k,\,m}^{s(k,\,m)}$ замкнутые шары радиуса $1/m$, центры которых совпадают с центрами выбранных открытых шаров. Будем считать, что $s(k,\ 1) = 1$; это можно сделать без ограничения общности — вследствие неравенства (1).

Векторное расслоение $(E,\ p,\ B)$ имеет счетный атлас. В самом деле, всякое векторное расслоение над паракомпактной базой имеет счетный атлас — это доказано в [2]: см. предложение п. 5.4 главы 3 и п. п. 2.1, 2.3 главы 5 цитируемой книги; паракомпактность всякого метрического пространства (в данном случае речь идет о пространстве B) доказана в [3] (п. 5, § 4 главы IX).

Фиксируем этот счетный атлас:

$$\{U_i,\ h_i: U_i \times \mathbf{R}^n \to p^{-1}(U_i)\}_{i \in \mathbf{N}}. \tag{2}$$

Пусть дано $k \in \{1,\ \dots,\ n\}$. По атласу (2) построим атлас расслоения $(E^{(k)},\ p^{(k)},\ B)$, определенного в предыдущем параграфе. Для этого возьмем те же координатные окрестности U_i ($i \in \mathbf{N}$), а координатные отображения

$$h_i^{(k)}: U_i \times G_k(\mathbf{R}^n) \to [p^{(k)}]^{-1}(U_i) \tag{3}$$

определим так:

$$h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k) = \{h_i(b,\ \mathfrak{x})\}_{\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^k} \tag{4}$$

для всякого $b \in U_i$. Для того чтобы убедиться в корректности этого определения, достаточно заметить, что: 1) множество, стоящее в правой части последнего равенства, есть k-мерное векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$ векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$; это замечание очевидно, поскольку $h_i(b,\ \cdot)$ (сужение координатного отображения h_i) переводит k-мерное векторное подпространство пространства $\mathbf{R}^n$ в векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$, имеющее ту же размерность k; 2) отображение (3), определенное формулой (4), есть гомеоморфизм $U_i \times G_k(\mathbf{R}^n)$ на $[p^{(k)}]^{-1}(U_i)$; это следует из формулы (4) в силу определения расслоения $(E^{(k)},\ p^{(k)},\ B)$, так как h_i — гомеоморфизм $U_i \times \mathbf{R}^n$ на $p^{-1}(U_i)$.

Для всяких $k \in \{1,\ \dots,\ n-1\}$, $i \in \mathbf{N}$, $F \subset G_k(\mathbf{R}^n)$ рассмотрим функцию

$$\mathcal{I}_{k,\,i}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot):U_i\to\mathbf{R},$$

определенную формулой ($b\in U_i$):

$$\mathcal{I}_{k,\,i}(\mathfrak{H};\ F;\ b)=\inf_{R^k\in F}\ \overline{\lim_{\substack{t-s\to+\infty\\(t\in Z^+,\,s\in Z^+)}}}\ \frac{1}{t-s}\times$$
$$\times\ln\left\{\left\|X^{t-s}_{X^{s}h_i^{(k)}(b,R^k)}\right\|\left\|X^{s-t}_{X^{t}((h_i^{(k)}(b,R^k))\perp)}\right\|\right\}. \tag{5}$$

Л е м м а 1. *Для всяких* $k\in\{1,\ \dots,\ n-1\}$, $i\in\mathbf{N}$, $s\in\mathbf{Z}^+$, $t\in s+\mathbf{N}$ *формула*

$$a_{s,\,t}^{(i,\,k)}(\mathfrak{H};\ b,\ \mathbf{R}^k)=\frac{1}{t-s}\ln\{\|\ X^{t-s}_{X^s h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k)}\ \|\|\ X^{s-t}_{X^t((h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k))^{\perp})}\ \|\}, \tag{6}$$

где $b\in U_i$, $\mathbf{R}^k\times G_k(\mathbf{R}^n)$, *определяет непрерывное отображение*

$$a_{s,\,t}^{(i,\,k)}(\mathfrak{H};\ \cdot,\ \cdot):U_i\times G_k(\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R},$$

удовлетворяющее при всяких $b\in U_i$, $\mathbf{R}^k\times G_k(\mathbf{R}^n)$ *неравенству*

$$|\ a_{s,\,t}^{(i,\,k)}(\mathfrak{H};\ b,\ \mathbf{R}^k)\,|\leqslant 2a(b). \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть дано $q\in\{1,\ \dots,\ n\}$. Определим топологическое пространство $\mathcal{E}^{(q)}$ как подпространство произведения $E^{(q)}\times E$, состоящее из пар $(\mathbf{R}^q,\ \xi)$ таких, что $\mathbf{R}^q\in E^{(q)}$, $\xi\in\mathbf{R}^q$, причем $|\,\xi\,|=1$. Положим $\mathfrak{B}^{(q)}\in E^{(q)}$. Определим отображение $\pi^{(q)}:\mathcal{E}^{(q)}\to\mathfrak{B}^{(q)}$ как сужение на $\mathcal{E}^{(q)}$ проекции произведения $E^{(q)}\times E$ на первый сомножитель. Так определенная тройка $(\mathcal{E}^{(q)},\ \pi^{(q)},\ \mathfrak{B}^{(q)})$ является локально тривиальным расслоением ($\mathcal{E}^{(q)}$ — пространство, $\pi^{(q)}$ — проекция, $\mathfrak{B}^{(q)}$ — база) со слоем S^{q-1} ($(q-1)$- мерная сфера).

При всяком $t\in\mathbf{G}$ формула

$$f_t^{(q)}(\mathbf{R}^q,\ \xi)=|\,X^t\xi\,|$$

определяет функцию $f_t^{(q)}:\mathcal{E}^{(q)}\to\mathbf{R}_*^+$ (напомним, что при всяких $r\in\mathbf{G}$, $b\in B$ сужение $X^r[b]$ отображения X^r на слой $p^{-1}(b)$ невырождено; это следует из условий б), в) п. 2 введения). Эта функция непрерывна, будучи суперпозицией непрерывных отображений $|\cdot|:E\to\mathbf{R}$, $X^t:E\to E$, $\mathrm{pr}_2|_{\mathcal{E}^{(q)}}:\mathcal{E}^{(q)}\to E$ где $\mathrm{pr}_2|_{\mathcal{E}^{(q)}}$ — сужение на $\mathcal{E}^{(q)}$ проекции произведения $E^{(q)}\times E$ на второй сомножитель. Поэтому в силу известного предложения, воспроизведенного в [1] в виде предложения 2, § 5, при всяком $t\in\mathbf{G}$ функция $\varphi_t^{(q)}:E^{(q)}\to\mathbf{R}_*^+$, определенная формулой

$$\varphi_t^{(q)}\mathbf{R}^q\underset{\mathrm{def}}{=}\|\,X^t_{\mathbf{R}^q}\,\|=\sup_{\substack{\xi\in\mathbf{R}^q\\|\xi|=1}}|\,X^t\xi\,|=\sup_{\substack{\xi\in\mathbf{R}^q\\|\xi|=1}}f_t^{(q)}(\mathbf{R}^q,\ \xi),$$

непрерывна.

2. Для всякого $k\in\{1,\ \dots,\ n-1\}$ отображение $\psi_k:E^{(k)}\to E^{(n-k)}$, определенное формулой

$$\psi_k\mathbf{R}^k=(\mathbf{R}^k)^{\perp},$$

т. е. переводящее всякое k-мерное векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$ в его ортогональное дополнение в этом слое, непрерывно; его непрерывность — следствие непрерывности римановой метрики векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$.

3. При всяких $q\in\{1,\ \dots,\ n\}$, $r\in\mathbf{G}$ отображение $(X^r)^{(q)}:E^{(q)}\to E^{(q)}$, определенное формулой

$$(X^r)^{(q)}\mathbf{R}^q=\{X^r\xi\}_{\xi\in\mathbf{R}^q},$$

непрерывно; это следует из определения топологического пространства $E^{(q)}$ в силу того, что $(X^r,\ \chi^r)$ — автоморфизм векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$.

4. Пусть даны $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $i \in \mathbf{N}$, $s \in \mathbf{Z}^+$, $t \in s+\mathbf{N}$. Отображение

$$a_{s,\,t}^{(i,\,k)}(\mathfrak{H};\ \cdot,\ \cdot): U_i \times G_k(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}, \tag{8}$$

определенное формулой (6), является суперпозицией непрерывного отображения $\frac{1}{t-s}\ln: \mathbf{R}_*^+ \to \mathbf{R}$, отображений, непрерывность которых доказана в пп. 1 — 3, и непрерывного отображения $h_i^{(k)}: U_i \times G_k(\mathbf{R}^n) \to [p^{(k)}]^{-1}(U_i)$. Следовательно, отображение (8) непрерывно.

5. Пусть даны $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $i \in \mathbf{N}$, $s \in \mathbf{Z}^+$, $t \in s+\mathbf{N}$, $b \in U_i$, $\mathbf{R}^k \times G_k(\mathbf{R}^n)$. Имеем

$$h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k) \subset p^{-1}(b), \quad (h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k))^\perp \subset p^{-1}(b);$$

следовательно, при всяком $r \in \mathbf{G}$ имеют место включения

$$X^r h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k) \subset p^{-1}(\chi^r b), \tag{9}$$

$$X^r((h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k))^\perp) \subset p^{-1}(\chi^r b). \tag{10}$$

Из формулы (9) при $r = s$ следует неравенство

$$\| X^{t-s}_{X^s h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k)} \| \leqslant \| X^{t-s}[\chi^s b] \|,$$

из которого в силу формул (1), (2) введения следует неравенство

$$\| X^{t-s}_{X^s h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k)} \| \leqslant \exp(|\,t-s\,|\,a(b)). \tag{11}$$

Из формулы (10) при $r = t$ следует неравенство

$$\| X^{s-t}_{X^t((h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k))^\perp)} \| \leqslant \| X^{s-t}[x^t b] \|,$$

из которого в силу формул (1), (2) введения следует неравенство

$$\| X^{s-t}_{X^t((h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k))^\perp)} \| \leqslant \exp(|\,t-s\,|\,a(b)). \tag{12}$$

Учитывая, что $t \in s+\mathbf{N}$, из формул (6), (11), (12) получаем неравенство

$$a_{s,\,t}^{(i,\,k)}(\mathfrak{H};\ b,\ \mathbf{R}^k) \leqslant 2a(b). \tag{13}$$

Имеем, далее,

$$\| X^{t-s}_{X^s h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k)} \| \geqslant \| {X^{t-s}_{X^s h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k)}}^{-1} \|^{-1} = \| X^{s-t}_{X^t h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k)} \|^{-1} \geqslant \| X^{s-t}[\chi^t b] \|^{-1}; \tag{14}$$

последнее неравенство написанной цепочки следует из формулы (9), взятой при $r = t$. Продолжив цепочку (14) неравенством

$$\| X^{s-t}[\chi^t b] \|^{-1} \geqslant \exp(-(t-s)a(b)),$$

вытекающим из формул (1), (2) введения, получаем неравенство

$$\| X^{t-s}_{X^s h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k)} \| \geqslant \exp(-(t-s)a(b)). \tag{15}$$

Имеем также

$$\begin{aligned} &\| X^{s-t}_{X^t((h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k))^\perp)} \| \geqslant \| {X^{s-t}_{X^t((h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k))^\perp)}}^{-1} \|^{-1} = \\ &= \| X^{t-s}_{X^s((h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k))^\perp)} \|^{-1} \geqslant \| X^{t-s}[\chi^s b] \|^{-1}; \end{aligned} \tag{16}$$

последнее неравенство этой цепочки — следствие формулы (10), взятой при $r = s$. Соединив с цепочкой (16) неравенство

$$\| X^{t-s}[\chi^s b] \|^{-1} \geqslant \exp(-(t-s)a(b)),$$

вытекающее из формул (1), (2) введения, получаем неравенство

$$\| X^{s-t}_{X^t((h_i^{(k)}(b,\ \mathbf{R}^k))^\perp)} \| \geqslant \exp(-(t-s)a(b)). \tag{17}$$

Из формул (6), (15), (17) следует неравенство

$$a_{s,\,t}^{(i,\,k)}(\mathfrak{H};\ b,\ \mathbf{R}^k) \geqslant -2a(b).$$

Соединив последнее неравенство с неравенством (13), получаем неравенство (7). Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Для всяких* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $i \in \mathbf{N}$, *для всякого замкнутого множества* $F \subset G_k(\mathbf{R}^n)$ *отображения*

$$a_{s,\,t}^{(i,\,k)}(\mathfrak{H};\ \cdot,\ \cdot): U_i \times G_k(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R},$$

определенные формулой (6), *удовлетворяют при всяком* $b \in U_i$ *равенствам*

$$\begin{gathered}\inf_{\mathbf{R}^k \in F} \overline{\lim_{t-s \to +\infty}} a_{s,\,t}^{(i,\,k)}(\mathfrak{H};\ b,\ \mathbf{R}^k) = \lim_{m\to\infty}\lim_{q\to\infty} f_{i,\,k}^{(m,\,q)}(\mathfrak{H};\ F;\ b) = \\ = \inf_{m\in\mathbf{N}}\lim_{q\to\infty} f_{i,\,k}^{(m,\,q)}(\mathfrak{H};\ F;\ b),\end{gathered} \tag{18}$$

где функции

$$f_{i,\,k}^{(m,\,q)}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot): U_i \to \mathbf{R} \quad (m \in \mathbf{N},\ q \in \mathbf{N},\ i \in \mathbf{N},\ k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\})$$

определены формулой (в которой $b \in U_i$*):*

$$f_{i,\,k}^{(m,\,q)}(\mathfrak{H};\ F;\ b) = \min_{\mathbf{R}^k \in F}\ \max_{l\in\{0,\,\ldots,\,q\}}\ \max_{j\in\{l,\,\ldots,\,q\}} a_{l,\,m+j}^{(i,\,k)}(\mathfrak{H};\ b,\ \mathbf{R}^k). \tag{19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $i \in \mathbf{N}$ и замкнутое множество $F \subset G_k(\mathbf{R}^n)$.

Так как грассманово многообразие $G_k(\mathbf{R}^n)$ компактно, то множество F компактно; следовательно, множество $\{b\} \times F$ компактно при всяком $b \in U_i$. Из леммы 1 следует, что при всяких $s \in \mathbf{Z}^+$, $t \in s + \mathbf{N}$, $b \in U_i$ сужение

$$a_{s,\,t}^{(i,\,k)}(\mathfrak{H};\ \cdot,\ \cdot)|_{\{b\}\times F}$$

отображения, определенного формулой (6), на множество $\{b\} \times F$ есть непрерывная функция

$$\{b\} \times F \to [-2a(b),\ 2a(b)].$$

Применим к этим функциям предложение из § 4 статьи [1]; роль компакта F, фигурирующего в цитируемом предложении, играет сейчас компакт $\{b\} \times F$, роль функций

$$a_{s,\,t}(\cdot): F \to [-a,\ a] \quad (s \in \mathbf{Z}^+, t \in s + \mathbf{N})$$

— функции

$$a_{s,\,t}^{(i,\,k)}(\mathfrak{H};\ \cdot,\ \cdot)|_{\{b\}\times F}: \{b\} \times F \to [-2a(b),\ 2a(b)].$$

Из цитированного предложения при всяком $b \in U_i$ следуют равенства;

$$\begin{gathered}\inf_{(b,\,\mathbf{R}^k)\in\{b\}\times F}\ \overline{\lim_{t-s\to+\infty}} a_{s,\,t}^{(i,\,k)}(\mathfrak{H};\ b,\ \mathbf{R}^k) = \\ = \lim_{m\to\infty}\lim_{q\to\infty}\ \min_{(b,\,\mathbf{R}^k)\in\{b\}\times F}\ \max_{l\in\{0,\,\ldots,\,q\}}\ \max_{j\in\{l,\,\ldots,\,q\}} a_{l,\,m+j}^{(i,\,k)}(\mathfrak{H};\ b,\ \mathbf{R}^k) = \\ = \inf_{m\in\mathbf{N}}\lim_{q\to\infty}\ \min_{(b,\,\mathbf{R}^k)\in\{b\}\times F}\ \max_{l\in\{0,\,\ldots,\,q\}}\ \max_{j\in\{l,\,\ldots,\,q\}} a_{l,\,m+j}^{(i,\,k)}(\mathfrak{H};\ b,\ \mathbf{R}^k),\end{gathered}$$

эквивалентные равенствам (18), в которых функции $f_{i,\,k}^{(m,\,q)}$ определены формулой (19). Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. *Для всяких* $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$, $i \in \mathbf{N}$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, *для всякого замкнутого множества* $F \subset G_k(\mathbf{R}^n)$ *функция*

$$f_{i,\,k}^{(m,\,q)}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot): U_i \to \mathbf{R},$$

определенная формулой (19), *непрерывна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны $m \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$, $i \in \mathbf{N}$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ и дано замкнутое множество $F \subset G_k(\mathbf{R}^n)$.

1. Начнем с того, что максимум конечного числа непрерывных функций — непрерывная функция. Доказательство этого хорошо известного утверждения для

полноты изложения приведено в статье [1] — см. п. 2 доказательства теоремы 1 в § 7 цитируемой статьи. Так как в силу леммы 1 при всяких $s \in \mathbf{Z}^+$, $t \in s + \mathbf{N}$ функция $a_{s,t}^{(i,k)}(\mathfrak{H};\ \cdot,\ \cdot) : U_i \times G_k(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ непрерывна, то функция

$$\max_{l \in \{0,\ \dots,\ q\}} \max_{j \in \{l,\ \dots,\ q\}} a_{l,\, m+j}^{(i,k)}(\mathfrak{H};\ \cdot,\ \cdot) : U_i \times G_k(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R} \tag{20}$$

непрерывна.

2. Напомним, что для всякой непрерывной функции $f(\cdot,\ \cdot) : T \times F \to \mathbf{R}$ где T, F — топологические пространства, причем пространство F компактно, функция

$$\min_{x \in F} f(\cdot,\ x) : T \to \mathbf{R}$$

непрерывна. Это утверждение хорошо известно и легко доказывается; впрочем, оно есть частный случай другого, также известного утверждения, приведенного в [1] в качестве предложения 2, § 5 для полноты изложения вместе с доказательством; роль локального расслоения $(\mathcal{E},\ \pi,\ \mathfrak{B})$, фигурирующего в цитируемом предложении, играет сейчас тривиальное расслоение $(T \times F,\ \mathrm{pr}_1,\ T)$; правда в цитируемом предложении вместо $\min$ стоит $\sup$, т. е. $\max$ (напомним, что $\sup$ берется там от непрерывной функции по компактному множеству и потому совпадает с $\max$), но одно к другому сводится заменой знака у функции f.

Положив $T = U_i$ и взяв в качестве функции $f(\cdot,\ \cdot) : U_i \times F \to \mathbf{R}$ сужение функции (20) на множество $U_i \times F$, получаем, что функция

$$f_{i,k}^{(m,q)}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot) : U_i \to \mathbf{R},$$

равная в силу формулы (19) $\min\limits_{\mathbf{R}^k \in F}$ от функции (20), непрерывна. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для всяких* $m \in \mathbf{N}$, $i \in \mathbf{N}$, $k \in \{1,\ \dots,\ n-1\}$, *для всякого замкнутого множества* $F \subset G_k(\mathbf{R}^n)$ *функция*

$$f_{i,k}^{(m)}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot) \underset{\mathrm{def}}{=} \lim_{q \to \infty} f_{i,k}^{(m,q)}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot) : U_i \to \mathbf{R} \tag{21}$$

принадлежит первому классу Бэра.

Доказательство. Пусть даны $m \in \mathbf{N}$, $i \in \mathbf{N}$, $k \in \{1,\ \dots,\ n-1\}$ и дано замкнутое множество $F \subset G_k(\mathbf{R}^n)$. Отметим, что $\lim\limits_{q \to \infty}$ в формуле (21) существует в силу леммы 2. Согласно определению классов Бэра (см. [4], [5, § 39]) функции первого класса Бэра — это пределы (счетных) последовательностей непрерывных функций. Поэтому утверждение доказываемой леммы — следствие леммы 3. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для всяких* $m \in \mathbf{N}$, $i \in \mathbf{N}$, $k \in \{1,\ \dots,\ n-1\}$, *для всякого замкнутого множества* $F \subset G_k(\mathbf{R}^n)$ *множество точек непрерывности функции* $f_{i,k}^{(m)}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot) : U_i \to \mathbf{R}$, *определенной формулой* (21), *есть множество типа* G_δ, *всюду плотное в* U_i.

Доказательство. Эта лемма следует из теоремы Бэра (см. [5, с. 240 — 242, 162 — 164]) в силу леммы 4, так как U_i ($i \in \mathbf{N}$) — открытые множества в полном метрическом пространстве B. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для всяких* $i \in \mathbf{N}$, $k \in \{1,\ \dots,\ n-1\}$, *для всякого замкнутого множества* $F \subset G_k(\mathbf{R}^n)$ *в открытом множестве* U_i *имеется всюду плотное подмножество* $D_{i,k}(F)$ *типа* G_δ *такое, что функция*

$$f_{i,k}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot) \underset{\mathrm{def}}{=} \lim_{m \to \infty} f_{i,k}^{(m)}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot) : U_i \to \mathbf{R} \tag{22}$$

полунепрерывна сверху во всякой точке $b \in D_{i,k}(F)$.

Доказательство. Пусть даны $i \in \mathbf{N}$, $k \in \{1,\ \dots,\ n-1\}$ и дано замкнутое множество

$F \subset G_k(\mathbf{R}^n)$. Предел $\lim\limits_{m\to\infty}$ в формуле (22) существует в силу леммы 2. В силу леммы 5 для всякого $m \in \mathbf{N}$ множество $D_{i,k}^{(m)}(F)$ точек непрерывности функции $f_{i,k}^{(m)}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot): U_i \to \mathbf{R}$ есть множество типа G_δ, всюду плотное в открытом множестве U_i полного метрического пространства B. Пересечение счетного множества всюду плотных в U подмножеств открытого множества U, имеющих тип G_δ, есть всюду плотное в U подмножество типа G_δ этого открытого множества (теорема Бэра, см. [5, с. 162 — 163]). Поэтому

$$D_{i,k}(F) \underset{\text{def}}{=} \bigcap_{m\in\mathbf{N}} D_{i,k}^{(m)}(F)$$

есть множество типа G_δ, всюду плотное в U_i. Из определения множества $D_{i,k}(F)$ следует, что при всяком $m \in \mathbf{N}$ функция $f_{i,k}^{(m)}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot): U_i \to \mathbf{R}$ непрерывна во всякой точке $b \in D_{i,k}(F)$.

Из формул (21), (22) следует, что при всяком $b \in U_i$ имеет место равенство

$$f_{i,k}(\mathfrak{H};\ F;\ b) = \lim_{m\to\infty}\lim_{q\to\infty} f_{i,k}^{(m,q)}(\mathfrak{H};\ F;\ b),$$

из которого в силу формулы (18) следует равенство

$$f_{i,k}(\mathfrak{H};\ F;\ b) = \inf_{m\in\mathbf{N}}\lim_{q\to\infty} f_{i,k}^{(m,q)}(\mathfrak{H};\ F;\ b).$$

Из последнего равенства в силу формулы (21) следует формула

$$f_{i,k}(\mathfrak{H};\ F;\ b) = \inf_{m\in\mathbf{N}} f_{i,k}^{(m)}(\mathfrak{H};\ F;\ b). \tag{23}$$

Хорошо известно (см., например, [5, с. 237 — 238]; цитируемое утверждение воспроизведено с доказательством — в несколько более общем виде — в [1] в виде предложения 1, § 5), что точная нижняя грань множества функций, каждая из которых непрерывна в некоторой точке, полунепрерывна сверху в этой точке. Поэтому из формулы (23) следует, что функция $f_{i,k}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot): U_i \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху во всякой точке $b \in D_{i,k}(F)$. Лемма 6 доказана.

Л е м м а 7. *Для всяких* $i \in \mathbf{N}$, $k \in \{1,\ \dots,\ n-1\}$, *для всякого замкнутого множества* $F \subset G_k(\mathbf{R}^n)$ *в открытом множестве* U_i *имеется всюду плотное подмножество* $D_{i,k}(F)$ *типа* G_δ *такое, что функция* $\mathfrak{I}_{k,i}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot): U_i \to \mathbf{R}$, *определенная формулой* (5), *полунепрерывна сверху во всякой точке* $b \in D_{i,k}(F)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны $i \in \mathbf{N}$, $k \in \{1,\ \dots,\ n-1\}$ и дано замкнутое множество $F \subset G_k(\mathbf{R}^n)$. Формулу (5), определяющую функцию $\mathfrak{I}_{k,i}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot): U_i \to \mathbf{R}$, можно с помощью формулы (6) переписать в виде

$$\mathfrak{I}_{k,i}(\mathfrak{H};\ F;\ b) = \inf_{\mathbf{R}^k\in F}\ \overline{\lim_{t-s\to+\infty}}\ a_{s,t}^{(i,k)}(\mathfrak{H};\ F;\ \mathbf{R}^k).$$

В свою очередь, последнее равенство в силу леммы 2 эквивалентно равенству

$$\mathfrak{I}_{k,i}(\mathfrak{H};\ F;\ b) = \lim_{m\to\infty}\lim_{q\to\infty} f_{i,k}^{(m,q)}(\mathfrak{H};\ F;\ b),$$

правая часть которого в силу формул (21), (22) равна $f_{i,k}(\mathfrak{H};\ F;\ b)$. Итак,

$$\mathfrak{I}_{k,i}(\mathfrak{H};\ F;\ b) = f_{i,k}(\mathfrak{H};\ F;\ b)$$

при всяком $b \in U_i$, поэтому заключение доказываемой леммы совпадает с заключением леммы 6. Лемма 7 доказана.

Л е м м а 8. *Пусть* U *— открытое множество в метрическом пространстве* $(B,\ d_B)$. *Пусть* $D \subset U$ *— множество типа* G_δ *в* U, *всюду плотное в* U. *Тогда* $D \bigcup (B \setminus U)$ *— множество типа* G_δ *в* B, *всюду плотное в* B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как U — открытое в B множество, то всякое множество, открытое в U, открыто в пространстве B.

1. Согласно условию доказываемой леммы,
$$D = \bigcap_{m\in\mathbf{N}} W_m, \tag{24}$$
где $W_m \subset U$ ($m \in \mathbf{N}$) — открытые множества. Перепишем формулу (24) в виде
$$D = \bigcap_{m\in\mathbf{N}} V_m, \tag{25}$$
где
$$V_m \underset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{m} W_k \ \ (m \in \mathbf{N}). \tag{26}$$
Множества V_m ($m \in \mathbf{N}$), определенные формулой (26), открыты, так как являются конечными пересечениями открытых множеств W_k. Из формулы (26) следует также, что последовательность множеств $\{V_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ — убывающая:
$$V_{m+1} \subset V_m \ \ (m \in \mathbf{N}). \tag{27}$$

2. Так как U — открытое множество в метрическом пространстве $(B,\ d_B)$, то
$$B \setminus U = \bigcap_{m\in\mathbf{N}} U^{(m)}, \tag{28}$$
где
$$U^{(m)} \underset{\text{def}}{=} \left\{ x \in B : \inf_{y\in B\setminus U} d_B(x,\ y) < \frac{1}{m} \right\}$$
($m \in \mathbf{N}$) — открытая $1/m$-окрестность множества $B \setminus U$. Очевидно,
$$U^{(m+1)} \subset U^{(m)} \ \ (m \in \mathbf{N}). \tag{29}$$

3. Пусть $\{A_m\}_{m\in\mathbf{N}}$, $\{B_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ — убывающие последовательности множеств:
$$A_1 \supset \ldots \supset A_m \supset \ldots, \tag{30}$$
$$B_1 \supset \ldots \supset B_m \supset \ldots. \tag{31}$$
Тогда имеет место формула
$$\Big(\bigcap_{m\in\mathbf{N}} A_m\Big) \bigcup \Big(\bigcap_{m\in\mathbf{N}} B_m\Big) = \bigcap_{m\in\mathbf{N}} (A_m \bigcup B_m). \tag{32}$$
Докажем это.

А. При всяком $m \in \mathbf{N}$ имеют место включения
$$A_m \subset A_m \bigcup B_m, \quad B_m \subset A_m \bigcup B_m.$$
Следовательно, имеют место включения
$$\bigcap_{m\in\mathbf{N}} A_m \subset \bigcap_{m\in\mathbf{N}} (A_m \bigcup B_m), \ \bigcap_{m\in\mathbf{N}} B_m \subset \bigcap_{m\in\mathbf{N}} (A_m \bigcup B_m),$$
из которых следует включение
$$\Big(\bigcap_{m\in\mathbf{N}} A_m\Big) \bigcup \Big(\bigcap_{m\in\mathbf{N}} B_m\Big) \subset \bigcap_{m\in\mathbf{N}} (A_m \bigcup B_m). \tag{33}$$

Б. Пусть
$$x \notin \Big(\bigcap_{m\in\mathbf{N}} A_m\Big) \bigcup \Big(\bigcap_{m\in\mathbf{N}} B_m\Big). \tag{34}$$
Тогда
$$x \notin \bigcap_{m\in\mathbf{N}} A_m, \quad x \notin \bigcap_{m\in\mathbf{N}} B_m.$$
Следовательно, найдутся $k \in \mathbf{N}$, $l \in \mathbf{N}$ такие, что
$$x \notin A_k, \ x \notin B_l \tag{35}$$
Положим $m = \max\{k,\ l\}$. Из формул (30), (31) следует тогда
$$A_k \supset A_m, \ B_l \supset B_m.$$
Из этих включений в силу формулы (35) следует: $x \notin A_m$, $x \notin B_m$, откуда
$$x \notin A_m \bigcup B_m. \tag{36}$$
А раз для некоторого $m \in \mathbf{N}$ имеет место формула (36), то

$$x \notin \bigcap_{m\in\mathbf{N}} (A_m \bigcup B_m). \tag{37}$$

Доказав, что из (34) следует (37), мы доказали включение

$$\bigcap_{m\in\mathbf{N}} (A_m \bigcup B_m) \subset (\bigcap_{m\in\mathbf{N}} A_m) \bigcup (\bigcap_{m\in\mathbf{N}} B_m).$$

Соединив это включение с ранее доказанным включением (33), получаем равенство (32).

4. Из формул (25), (28) следует формула

$$D \bigcup (B \setminus U) = (\bigcap_{m\in\mathbf{N}} V_m) \bigcup (\bigcap_{m\in\mathbf{N}} U^{(m)}). \tag{38}$$

В силу включений (27), (29) множества

$$A_m \underset{\text{def}}{=} V_m,\ B_m \underset{\text{def}}{=} U^{(m)}\ \ (m \in \mathbf{N}) \tag{39}$$

удовлетворяют условиям (30), (31). Согласно доказанному в п. 3 для множеств (39) имеет место формула (32):

$$(\bigcap_{m\in\mathbf{N}} V_m) \bigcup (\bigcap_{m\in\mathbf{N}} U^{(m)}) = \bigcap_{m\in\mathbf{N}} (V_m \bigcup U^{(m)}).$$

Соединив это равенство с равенством (38), получаем формулу

$$D \bigcup (B \setminus U) = \bigcap_{m\in\mathbf{N}} (V_m \bigcup U^{(m)}).$$

Так как множества V_m, $U^{(m)}$ $(m \in \mathbf{N})$ открыты, то из полученной формулы следует, что $D \bigcup (B \setminus U)$ — множество типа G_δ в пространстве B.

Так как множество D по условию всюду плотно в U, то множество $D \bigcup (B \setminus U)$ всюду плотно в пространстве B. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Для всяких* $i \in \mathbf{N}$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, *для всякого замкнутого множества* $F \subset G_k(\mathbf{R}^n)$ *в пространстве* B *имеется всюду плотное множество* $B_{i,\,k}(F)$ *типа* G_δ *такое, что функция* $\mathcal{J}_{k,\,i}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot) : U_i \to \mathbf{R}$, *определенная формулой* (5), *полунепрерывна сверху во всякой точке* $b \in B_{i,\,k}(F) \bigcap U_i$.

Доказательство. Пусть даны $i \in \mathbf{N}$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ и дано замкнутое множество $F \subset G_k(\mathbf{R}^n)$. Положим

$$B_{i,\,k}(F) \underset{\text{def}}{=} D_{i,\,k}(F) \bigcup (B \setminus U_i),$$

где $D_{i,\,k}(F)$ — множество, обладающее свойствами, указанными в формулировке леммы 7, т. е. всюду плотное в U_i подмножество типа G_δ, в каждой точке которого функция $\mathcal{J}_{k,\,i}(\mathfrak{H};\ F;\ \cdot) : U_i \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху. В силу леммы 8 множество $B_{i,\,k}(F)$ есть множество типа G_δ в B, всюду плотное в B. Лемма 9 доказана.

Предложение. *В пространстве* B *имеется всюду плотное множество* D *типа* G_δ *такое, что для всяких* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $i \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$, $j \in \{1, \ldots, s(k, m)\}$ *функция* $\mathcal{J}_{k,\,i}(\mathfrak{H};\ F^j_{k,\,m};\ \cdot) : U_i \to \mathbf{R}$, *определенная формулой (в которой* $b \in U_i$*):*

$$\begin{gathered}\mathcal{J}_{k,\,i}(\mathfrak{H};\ F^j_{k,\,m};\ b) = \inf_{\mathbf{R}^k \in F^j_{k,\,m}} \ \varlimsup_{\substack{t-s\to+\infty \\ (t\in\mathbf{Z}^+,\ s\in\mathbf{Z}^+)}} \frac{1}{t-s} \times \\ \times \ln\{\| X^{t-s}_{X^s h_i^{(k)}(b,\,\mathbf{R}^k)} \| \| X^{s-t}_{X^t((h_i^{(k)}(b,\,\mathbf{R}^k))^\perp)} \|\},\end{gathered} \tag{40}$$

полунепрерывна сверху во всякой точке $b \in D \bigcap U_i$.

Доказательство. Определим множество D формулой

$$D = \bigcap_{m\in\mathbf{N}} \bigcap_{i\in\mathbf{N}} \bigcap_{k=1}^{n-1} \bigcap_{j=1}^{s(k,\,m)} B_{i,\,k}(F^j_{k,\,m}),$$

где $B_{i,\,k}(F)$ — множества, обладающие свойствами, указанными в формулировке леммы 9. Так определенное множество D имеет тип G_δ, поскольку оно есть пересечение счетного множества множеств $B_{i,k}(F^j_{k,m})$, каждое из которых есть множество типа G_δ. Поскольку каждое множество $B_{i,k}(F^j_{k,m})$ — всюду плотное множество типа G_δ в полном метрическом пространстве (B, d_B), то в силу теоремы Бэра (см. [5, с. 163]) их счетное пересечение D есть множество типа G_δ, всюду плотное в B.

Для всяких $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $i \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$, $j \in \{1, \ldots, s(k, m)\}$ функция $\mathcal{J}_{k,i}(\mathfrak{H}; F^j_{k,m}; \cdot) : U_i \to \mathbf{R}$, определенная формулой (40), полунепрерывна сверху во всякой точке множества $D \bigcap U_i$, так как $D \bigcap U_i \subset B_{i,k}(F^j_{k,m}) \bigcap U_i$, а во всякой точке последнего множества функция $\mathcal{J}_{k,i}(\mathfrak{H}; F^j_{k,m}; \cdot) : U_i \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху (см. формулировку леммы 9). Предложение доказано.

§ 3

Доказательство теоремы, сформулированной в конце § I. Пусть D — множество, обладающее свойствами, указанными в формулировке предложения, доказанного в конце предыдущего параграфа.

Пусть дано $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Если множество $S^{(k)}(\mathfrak{H}) \bigcap D$ пусто, то доказывать нечего. Пусть оно не пусто. Пусть дана точка b_0 этого множества. Пусть дана окрестность $V \subset E^{(k)}$ точки $\mathbf{R}^k_0(\mathfrak{H}, b_0)$. Фиксируем такой индекс $i_0 \in \mathbf{N}$, что $b_0 \in U_{i_0}$, где U_i ($i \in \mathbf{N}$) — координатные окрестности атласа векторного расслоения (E, p, B), того атласа, который зафиксирован в § 2 (см. в цитируемом параграфе формулу (2)). Из свойств отображений

$$h^{(k)}_i : U_i \times G_k(\mathbf{R}^n) \to [p^{(k)}]^{-1}(U_i),$$

определенных формулой (4), § 2, точнее говоря, из того, что эти отображения являются координатными отображениями расслоения $(E^{(k)}, p^{(k)}, B)$, следует, что $\mathbf{R}^k_0(\mathfrak{H}, b_0) \in G_k(p^{-1}(b_0))$ можно представить в виде

$$\mathbf{R}^k_0(\mathfrak{H}, b_0) = h^{(k)}_{i_0}(b_0, \mathbf{R}^k_0), \tag{1}$$

где $\mathbf{R}^k_0 \in G_k(\mathbf{R}^n)$. Возьмем $\varepsilon \in \mathbf{R}^+_*$ и окрестность $W \subset U_{i_0}$ точки b_0 такие, что

$$h^{(k)}_{i_0}(W \times U_\varepsilon(\mathbf{R}^k_0)) \subset V, \tag{2}$$

где $U_\varepsilon(\mathbf{R}^k_0)$ — ε-окрестность точки $\mathbf{R}^k_0$ в метрическом пространстве $(G_k(\mathbf{R}^n), d_k)$; напомним, что это метрическое пространство определено в начале § 2. Возьмем число $m \in \mathbf{N}$, удовлетворяющее неравенству $\dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{2}\varepsilon$; тогда замкнутый шар $F^{j_0}_{k,m}$ радиуса $1/m$, содержащий точку $\mathbf{R}^k_0$ (замкнутые шары $F^1_{k,m}, \ldots, F^{s(k,m)}_{k,m}$ радиуса $1/m$ выбраны в начале § 2 так, что они образуют покрытие пространства $G_k(\mathbf{R}^n)$, поэтому хотя бы один из них содержит точку $\mathbf{R}^k_0$ — его и обозначим через $F^{j_0}_{k,m}$), содержится в $U_\varepsilon(\mathbf{R}^k_0)$. Поэтому из включения (2) следует включение

$$h^{(k)}_{i_0}(W \times F^{j_0}_{k,m}) \subset V. \tag{3}$$

В силу лемм 2, 4 введения имеет место неравенство

$$\varlimsup_{\substack{t-s\to+\infty \\ (t\in\mathbf{Z}^+,\, s\in\mathbf{Z}^+)}} \frac{1}{t-s} \ln\{\| X^{t-s}_{X^s\mathbf{R}^k_0(\mathfrak{H},\, b_0)} \| \| X^{s-t}_{X^t((\mathbf{R}^k_0(\mathfrak{H},\, b_0))^\perp)} \|\} < 0.$$

Пользуясь формулой (1), перепишем это неравенство в виде

$$\varlimsup_{\substack{t-s\to+\infty \\ (t\in\mathbf{Z}^+,\, s\in\mathbf{Z}^+)}} \frac{1}{t-s} \ln\{\| X^{t-s}_{X^s h^{(k)}_{i_0}(b_0,\, \mathbf{R}^k_0)} \| \| X^{s-t}_{X^t((h^{(k)}_{i_0}(b_0,\, \mathbf{R}^k_0))^\perp)} \|\} < 0.$$

Так как $\mathbf{R}_0^k \in F_{k,m}^{j_0}$, то из последнего неравенства следует неравенство

$$\inf_{\mathbf{R}^k \in F_{k,m}^{j_0}} \varlimsup_{\substack{t-s\to+\infty \\ (t\in\mathbf{Z}^+,\, s\in\mathbf{Z}^+)}} \frac{1}{t-s} \ln\{\| X^{t-s}_{X^s h_{i_0}^{(k)}(b_0,\, \mathbf{R}^k)} \| \| X^{s-t}_{X^t((h_{i_0}^{(k)}(b_0,\, \mathbf{R}^k))^{\perp})} \|\} < 0,$$

левая часть которого в силу формулы (40), § 2 есть не что иное, как $\mathcal{I}_{k,\, i_0}(\mathfrak{H};\, F_{k,m}^{j_0};\, b_0)$. Таким образом,

$$\mathcal{I}_{k,\, i_0}(\mathfrak{H};\, F_{k,m}^{j_0};\, b_0) < 0. \tag{4}$$

Согласно предложению, сформулированному и доказанному в конце § 2, функция $\mathcal{I}_{k,\, i_0}(\mathfrak{H};\, F_{k,m}^{j_0};\, \cdot) : U_{i_0} \to \mathbf{R}$ полунепрерывна сверху в точке b_0. Поэтому из неравенства (4) следует существование окрестности $U \subset U_{i_0}$ точки b_0 такой, что

$$\mathcal{I}_{k,\, i_0}(\mathfrak{H};\, F_{k,m}^{j_0};\, b) < 0 \tag{5}$$

для всякого $b \in U$. Поэтому согласно формуле (40), § 2, служащей определением левой части неравенства (5), для всякого $b \in U$ имеет место неравенство

$$\inf_{\mathbf{R}^k \in F_{k,m}^{j_0}} \varlimsup_{\substack{t-s\to+\infty \\ (t\in\mathbf{Z}^+,\, s\in\mathbf{Z}^+)}} \frac{1}{t-s} \ln\{\| X^{t-s}_{X^s h_{i_0}^{(k)}(b,\, \mathbf{R}^k)} \| \| X^{s-t}_{X^t((h_{i_0}^{(k)}(b,\, \mathbf{R}^k))^{\perp})} \|\} < 0. \tag{6}$$

Следовательно, для всякого $b \in U$ найдется

$$\mathbf{R}_b^k \in F_{k,m}^{j_0}, \tag{7}$$

для которого выполнено неравенство

$$\varlimsup_{\substack{t-s\to+\infty \\ (t\in\mathbf{Z}^+,\, s\in\mathbf{Z}^+)}} \frac{1}{t-s} \ln\{\| X^{t-s}_{X^s h_{i_0}^{(k)}(b,\, \mathbf{R}_b^k)} \| \| X^{s-t}_{X^t((h_{i_0}^{(k)}(b,\, \mathbf{R}_b^k))^{\perp})} \|\} < 0. \tag{8}$$

При всяком $b \in U$ положим

$$\mathbf{R}^k(b) \underset{\mathrm{def}}{=} h_{i_0}^{(k)}(b,\, \mathbf{R}_b^k). \tag{9}$$

Для всякого $b \in U$ перепишем неравенство (8) в виде:

$$\varlimsup_{\substack{t-s\to+\infty \\ (t\in\mathbf{Z}^+,\, s\in\mathbf{Z}^+)}} \frac{1}{t-s} \ln\{\| X^{t-s}_{X^s \mathbf{R}^k(b)} \| \| X^{s-t}_{X^t((\mathbf{R}^k(b))^{\perp})} \|\} < 0. \tag{10}$$

Из того, что при всяком $b \in U$ выполнено неравенство (10), в силу лемм 3 — 5 введения следует, что $U \subset S^{(k)}(\mathfrak{H})$ и что

$$\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\, b) = \mathbf{R}^k(b) \tag{11}$$

для всякого $b \in U$ (напомним, что обозначение $S^{(k)}(\mathfrak{H})$ введено в п. 3 введения, а обозначение $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\, b)$ введено в § 1 перед формулировкой доказываемой теоремы).

Пусть $b \in U \bigcap W$. Тогда $b \in S^{(k)}(\mathfrak{H})$ и, кроме того, в силу формул (7), (9), (11) имеет место включение

$$\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\, b) \in h_{i_0}^{(k)}(\{b\} \times F_{k,m}^{j_0}) \subset h_{i_0}^{(k)}(W \times F_{k,m}^{j_0}),$$

из которого в силу формулы (3) следует включение $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\, b) \in V$.

Итак, доказано следующее: *для всякой окрестности* $V \subset E^{(k)}$ *точки* $\mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\, b_0)$ *существует окрестность* $U \bigcap W \subset B$ *точки* b_0 *такая, что для всякой точки* $b \in U \bigcap W$ *имеем:*

$$b \in S^{(k)}(\mathfrak{H}), \quad \mathbf{R}_0^k(\mathfrak{H},\, b) \in V.$$

Тем самым доказано, что для всюду плотного в B множества D типа G_δ для всякого $k \in \{1,\, \dots,\, n-1\}$ функция $\mathbf{R}^k(\mathfrak{H},\, \cdot) \to E^{(k)}$ определена в окрестности всякой точки множества $S^{(k)}(\mathfrak{H}) \bigcap D$ и непрерывна во всякой точке этого множества. Теорема, сформулированная в конце § 1, доказана.

В следующих параграфах излагаются некоторые конкретизации этой теоремы

§ 4

Пусть на полном метрическом пространстве $\mathfrak{B}$ задана динамическая система f^t (т. е. непрерывное действие группы $\mathbf{R}$). Фиксируем в пространстве $\mathbf{R}^n$ какую-нибудь евклидову структуру. Рассмотрим непрерывное отображение $A(\cdot):\mathfrak{B}\to \mathrm{Hom}(\mathbf{R}^n,\ \mathbf{R}^n)$, удовлетворяющее условию

$$\sup_{x\in\mathfrak{B}} \| A(x)\| < +\infty.$$

Множество всех таких отображений $A(\cdot)$ (вместо $A(\cdot)$ пишем также A) наделим структурой метрического пространства, определив расстояние формулой

$$d(A_1,\ A_2)=\sup_{x\in\mathfrak{B}}\| A_1(x)-A_2(x)\|.$$

Так определенное полное метрическое пространство обозначим через S. При всяких $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$ рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x} \quad (\mathfrak{x}\in \mathbf{R}^n). \tag{*}$$

Согласно Перрону, решения системы (*) называются экспоненциально разделенными[1] с индексом $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$, если найдется k-мерное векторное подпространство $\mathcal{L}^k(A,\ x)$ пространства $\mathbf{R}^n$ такое, что для всякого алгебраического дополнения $\mathcal{L}^{n-k}$ подпространства $\mathcal{L}^k(A,\ x)$ (в пространстве $\mathbf{R}^n$) существуют $\alpha\in\mathbf{R}^+_*$, $\beta\in\mathbf{R}^+_*$ такие, что для всяких ненулевых решений $\mathfrak{x}(\cdot)$, $\mathfrak{y}(\cdot)$ таких, что $\mathfrak{x}(0)\in\mathcal{L}^{n-k}$, $\mathfrak{y}(0)\in\mathcal{L}^k(A,\ x)$, для всяких вещественных чисел $t\geqslant s\geqslant 0$ имеет место неравенство

$$|\mathfrak{x}(t)||\mathfrak{x}(s)|^{-1}\geqslant \alpha |\mathfrak{y}(t)||\mathfrak{y}(s)|^{-1}\exp(\beta(t-s)).$$

Для всякого $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$ обозначим через $S^{(k)}$ множество тех $(A,\ x)\in S\times\mathfrak{B}$, для которых решения системы (*) экспоненциально разделены с индексом k.

Для всяких $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $b\in S^{(k)}$ векторное подпространство $\mathcal{L}^k(A,\ x)$, обладающее указанными выше свойствами, единственно и потому определено отображение $(A,\ x)\mapsto \mathcal{L}^k(A,\ x)$ подпространства $S^{(k)}$ пространства $S\times\mathfrak{B}$ в грассманово многообразие $G_k(\mathbf{R}^n)$.

Т е о р е м а. *В пространстве $S\times\mathfrak{B}$ имеется всюду плотное множество C типа G_δ такое, что при всяком $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$ отображение*

$$\mathcal{L}^k : S^{(k)}\to G_k(\mathbf{R}^n)$$

непрерывно во всякой точке множества $S^{(k)}\bigcap C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пункт 1 § 9 статьи [1] представляет собой изложение построения, превращающего доказываемую теорему в частный случай теоремы § 1 настоящей статьи. Теорема доказана.

§ 5

1. Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие[2]. Через S обозначается множество всех диффеоморфизмов $f:V^n\to V^n$ класса C^1, отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию

$$\sup_{x\in V^n}\max\{\| df_x\|,\|(df_x)^{-1}\|\}<+\infty.$$

---

[1] Подробнее: экспоненциально разделенными на $\mathbf{R}^+$.

[2] Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^3, риманова метрика — классу C^2.

В множестве S определяется расстояние

$$\tilde{d}(f,\ g)=\sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(fx,\ gx)}\{\min\{s(u),\ [1+\rho(x,\ x_0)]^{-1}\}+\|\varphi_u dg_x-df_x\|\};$$

здесь x_0 — некоторая фиксированная точка многообразия V^n; $G(y,\ z)$ — множество всех кусочно-гладких путей u, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y; $s(u)$ — длина пути u; $\rho(\cdot,\ \cdot)$ — расстояние между точками многообразия V^n; φ_u — преобразование, состоящее в параллельном перенесении касательных векторов вдоль пути u.

Согласно Перрону, диффеоморфизм $f\in S$ называется экспоненциально разделенным[3] с индексом $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$ в точке $x\in V^n$, если найдется k-мерное векторное подпространство $l^k(f,\ x)$ касательного пространства T_xV^n многообразия V^n в точке x такое, что для всякого алгебраического дополнения l^{n-k} подпространства $l^k(f,\ x)$ (в пространстве T_xV^n) существуют $\alpha\in\mathbf{R}_*^+$, $\beta\in\mathbf{R}_*^+$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\mathfrak{x}\in l^{n-k}$, $\mathfrak{y}\in l^k(f,\ x)$ и всяких целых чисел $t\geqslant s\geqslant 0$ имеет место неравенство

$$|df^t\mathfrak{x}||df^s\mathfrak{x}|^{-1}\geqslant\alpha|df^t\mathfrak{y}||df^s\mathfrak{y}|^{-1}\exp(\beta(t-s)).$$

Для всякого $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$ через $S^{(k)}$ обозначим множество тех $(f,\ x)\in S\times V^n$, для которых диффеоморфизм f экспоненциально разделен с индексом k в точке x. Векторное подпространство $l^k(f,\ x)$ с указанными свойствами единственно при всяких $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $(f,\ x)\in S^{(k)}$ и потому определено отображение $l^k:S^{(k)}\to T^kV^n$, где T^kV^n — пространство k-мерных векторных подпространств касательных пространств гладкого многообразия V^n.

Т е о р е м а 1. *В пространстве* $S\times V^n$ *имеется всюду плотное множество* C *типа* G_δ *такое, что при всяком* $k\in\{1,\ \ldots,\ n-1\}$ *отображение* $l^k:S^{(k)}\to T^kV^n$ *непрерывно во всякой точке множества* $S^{(k)}\cap C$.

Поясним, что топология пространства T^kV^n определяется через касательное расслоение $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ так же, как в начале § 1 топология пространства $E^{(k)}$ определена через векторное расслоение $(E,\ p,\ B)$.

Здесь мы имеем дело просто с частным случаем изложенной в начале § 1 конструкции. Не следует, однако, смешивать эту ситуацию с ситуацией, возникающей ниже в доказательстве сформулированной теоремы, где роль векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ принимает на себя не касательное расслоение $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ многообразия V^n, а векторное расслоение, индуцированное этим касательным расслоением и отображением проекции произведения $S\times V^n$ на второй сомножитель.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Пункт 1 § 10 статьи [1] представляет собой изложение конструкции, превращающей доказываемую теорему в частный случай теоремы, сформулированной выше в § 1. Теорема 1 доказана.

2. Для всякого $j\in S$ через S_j обозначается подмножество множества S, состоящее из диффеоморфизмов f, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{x\in V^n}\rho(fx,\ jx)<+\infty$ (если V^n компактно (т. е. замкнутое многообразие), то $S_j=S$ для всякого $j\in S$).

Через $\tilde{d}_1$ обозначается расстояние в S_j, определяемое формулой

$$\tilde{d}_1(f,\ g)=\sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(fx,\ gx)}\{s(u)+\|\varphi_u dg_x-df_x\|\}.$$

---

[3] Подробнее: экспоненциально разделенным на $\mathbf{Z}^+$.

Через $S_j \times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S_j (с топологией, индуцированной метрикой $\tilde{d}_1(\cdot,\ \cdot)$) и топологического пространства V^n. Для всяких $j \in S$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ положим $S_j^{(k)} = S^{(k)} \bigcap (S_j \times V^n)$, т. е. обозначим через $S_j^{(k)}$ множество тех $(f,\ x) \in S_j \times V^n$, для которых диффеоморфизм f экспоненциально разделен с индексом k в точке x.

Теорема 2. *Для всякого* $j \in S$ *в пространстве* $S_j \times V^n$ *имеется всюду плотное множество* C_j *типа* G_δ *такое, что при всяком* $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ *отображение* $l^k : S_j^{(k)} \to T^k V^n$ *непрерывно во всякой точке множества* $S_j^{(k)} \bigcap C_j$.

Пояснение. Говоря здесь об отображении $l^k : S_j^{(k)} \to T^k V^n$, мы допустили следующую вольность речи. Выше (в п. 1 этого параграфа) было определено отображение $l^k : S^{(k)} \to T^k V^n$; здесь при всяком $j \in S$ мы рассматриваем его сужение на множество $S_j^{(k)}$, но не решаемся обозначить это сужение символом $l^k |_{S_j^{(k)}}$, чтобы не дать читателю повод думать, что в утверждении о непрерывности $S_j^{(k)}$ рассматривается как подпространство топологического пространства $S \times V^n$, в то время как в действительности $S_j^{(k)}$ есть подпространство топологического пространства $S_j \times V^n$, топология которого отличается, вообще говоря, от топологии, индуцированной на нем (как на подмножестве) топологией пространства $S \times V^n$.

Доказательство теоремы 2. Пункт 1 § 11 статьи [1] представляет собой изложение той конструкции, которая превращает теорему 2 в частный случай теоремы, сформулированной выше в § 1. Теорема 2 доказана.

§ 6

Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие[4]. Через S обозначается множество всех векторных полей F класса C^1 на V^n, удовлетворяющих условию[5]

$$\sup_{x \in V^n} \| \nabla F(x) \| < +\infty.$$

В множестве S определяется расстояние

$$d(F,\ G) = | Fx_0 - Gx_0 | + \sup_{x \in V^n} \| \nabla F(x) - \nabla G(x) \|,$$

где x_0 — некоторая фиксированная точка многообразия V^n.

Всякое векторное поле $F \in S$ индуцирует гладкое (класса C^1) действие f^t группы $\mathbf{R}$ на V^n.

Через $S \times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S (с топологией, индуцированной метрикой $d(\cdot,\ \cdot)$) и топологического пространства V^n.

Для всякого $J \in S$ через S_J обозначается подмножество множества S, состоящее из векторных полей, удовлетворяющих условию $\sup_{x \in V^n} | F(x) - J(x) | < +\infty$ (если V^n компактно (т. е. замкнутое многообразие), то $S_J = S$ для всякого $J \in S$).

---

[4] Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^3, риманова метрика — классу C^2.

[5] Через $\nabla F(x)$ обозначается ковариантный дифференциал векторного поля F в точке x. Через $\| \cdot \|$ обозначается норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой.

Через $d_1(\cdot,\ \cdot)$ обозначается расстояние в S_J, определяемое формулой

$$d_1(F,\ G) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} | F(x) - G(x) | + \sup_{x\in V^n} \| \nabla(F-G)(x) \|.$$

Для всякого $J \in S$ через $S_J \times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S_J (с топологией, индуцированной метрикой $d_1(\cdot,\ \cdot)$) и топологического пространства V^n.

Согласно определению Перрона, гладкое действие f^t группы $\mathbf{R}$ на V^n индуцированное векторным полем $F \in S$, называется экспоненциально разделенным с индексом $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ в точке $x \in V^n$, если в касательном пространстве $T_x V^n$ многообразия V^n в точке x найдется k-мерное векторное подпространство $L^k(F,\ x)$ такое[6], что для всякого алгебраического дополнения L^{n-k} подпространства $L^k(F,\ x)$ (в касательном пространстве $T_x V^n$) существуют $\alpha \in \mathbf{R}^+_*$, $\beta \in \mathbf{R}^+_*$ такие, что для всяких ненулевых векторов $\mathfrak{x} \in L^{n-k}$, $\mathfrak{y} \in L^k(F,\ x)$, для всяких $t \in \mathbf{R}^+$, $s \in \mathbf{R}^+$ таких, что $t \geqslant s$, имеет место неравенство

$$\left|f^t\mathfrak{x}\right|\left|f^s\mathfrak{x}\right|^{-1} \geqslant \alpha \left|f^t\mathfrak{y}\right|\left|f^s\mathfrak{y}\right|^{-1} \exp(\beta(t-s)).$$

Для всякого $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ обозначим через $S^{(k)}$ множество тех $(F,\ x) \in S \times V^n$, для которых гладкое действие f^t группы $\mathbf{R}$ на V^n, индуцированное векторным полем F, экспоненциально разделено с индексом k в точке x. Для всяких $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$, $J \in S$ положим $S_J^{(k)} = S^{(k)} \bigcap (S_J \times V^n)$.

Т е о р е м а 1. *В пространстве* $S \times V^n$ *имеется всюду плотное множество* C *типа* G_δ *такое, что при всяком* $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ *отображение* $L^k : S^{(k)} \to T^k V^n$ *непрерывно во всякой точке множества* $S^{(k)} \bigcap C$.

Т е о р е м а 2. *Для всякого* $J \in S$ *в пространстве* $S_J \times V^n$ *имеется всюду плотное множество* C_J *типа* G_δ *такое, что при всяком* $k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\}$ *отображение* $L^k : S_J^{(k)} \to T^k V^n$ *непрерывно во всякой точке множества* $S_J^{(k)} \bigcap C_J$.

Сформулированные теоремы являются частными случаями теоремы, сформулированной выше в § 1, так показывают конструкции, описанные в § 12 статьи [1].

З а м е ч а н и е. От каждого из пространств S, S_j, S_J, рассмотренных в §§ 4—6, можно перейти к любому замкнутому (и к любому открытому) подмножеству. Так, получаются аналоги теорем §§ 4 — 6 для систем с инвариантной мерой, диффеоморфизмов, сохраняющих меру, симплектических диффеоморфизмов, гамильтоновых систем, вообще для систем с заданным множеством интегральных инвариантов, для систем, зависящих от одного или нескольких параметров, а также для индивидуальных систем — если от пространств типа S перейти к их одноточечным подмножествам; в последнем случае подпространство «медленных» решений зависит только от точки фазового пространства.

Литература

1. *Миллионщиков В. М.* Об индексах экспоненциальной разделенности. — Матем. сб, 1984, т. 124(166), с. 451—485.
2. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М: Мир, 1970.
3. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. М.: Наука, 1975.
4. *Baire R.* Lecons sur les fonctions discontinues. Paris: Gauther — Villars, 1905.

[6] Это векторное подпространство с указанными свойствами единственно.

5. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.-Л.: ОНТИ, 1937.
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
Поступила в редакцию
17.1.1984