УДК 517.926.4

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. IX

ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть V^n — n-мерное связное дифференцируемое (класса C^3) многообразие со счетной базой, на котором фиксирована некоторая риманова метрика $\delta(\cdot,\cdot)$ (класса C^2). Через (TV^n, π, V^n) обозначаем касательное расслоение многообразия V^n, пространство TV^n которого стандартным образом наделяется структурой дифференцируемого многообразия (класса C^2). С помощью фиксированной выше римановой метрики $\delta(\cdot,\cdot)$ многообразие V^n стандартным образом наделяется структурой метрического пространства, которое обозначается далее через (V^n, ρ), где $\rho(\cdot,\cdot)$ — расстояние в этом метрическом пространстве.

Потребуем, чтобы метрическое пространство (V^n, ρ) было полным.

2. Через S обозначаем множество всех диффеоморфизмов f класса C^1, биективно отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию $\max\{|||df|||, |||(df)^{-1}|||\} < +\infty$; здесь

$$|||df||| \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} \|df_x\|,\ |||(df)^{-1}||| \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} \|(df_x)^{-1}\|,$$

df_x — производная отображения f в точке x, $\|\cdot\|$ — норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные фиксированной выше римановой метрикой $\delta(\cdot,\cdot)$.

3. Для всякого $j \in S$ через S_j обозначается подмножество множества S, состоящее из диффеоморфизмов f, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x\in V^n} \rho(fx, jx) < +\infty.$$

При всяком $j \in S$ множество S_j наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния $d_1(\cdot,\cdot)$ определяемого для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$ формулой (в [1] формула (55))

$$d_1(f, g) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} \inf_{u\in G(fx,\, gx)} \{s(u) + \|\varphi_u dg_x - df_x\| + \|(\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1}\|\}. \qquad \text{(B.1)}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

1) для всяких $y \in V^n$, $z \in V^n$ через $G(y, z)$ обозначается множество всех кусочно-гладких путей, идущих из точки z в точку y; при этом под кусочно-гладким путем, идущим из точки z в точку y, понимается непрерывное, имеющее кусочно-непрерывную производную отображение u отрезка [0, 1] в многообразие V^n, причем значение u_0 этого отображения в точке 0 равно z, а его значение u_1 в точке 1 равно y (через u_t обозначаем значение отображения u в точке $t \in [0, 1]$);

2) $s(u) \underset{\text{def}}{=} \int_0^1 [\delta(\dot u_t, \dot u_t)]^{1/2} dt$ — длина пути u;

3) $\varphi_u : \pi^{-1}(z) \to \pi^{-1}(y)$ — параллельный перенос вдоль пути $u \in G(y, z)$.

При всяком $j \in S$ *метрическое пространство* (S_j, d_1) *полно* ([2], предложение 2).

4. При всяком $j \in S$ множество S_j наделяется также другой структурой метрического пространства заданием расстояния $\tilde{d}_1(\cdot, \cdot)$, определяемого для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$ формулой (в [1] формула (56))

$$\tilde{d}_1(f, g) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(fx, gx)} \{s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \|\}. \tag{B.2}$$

При всяком, $j \in S$ *расстояние* $d_1(\cdot, \cdot)$ *и расстояние* $\tilde{d}_1(\cdot, \cdot)$ *индуцируют на* S_j *одну и ту же топологию* (см. [1], п. 5).

5. Через R^n обозначается пространство строк из n вещественных чисел, стандартным образом наделенное структурой векторного пространства над $\mathbf{R}$. Пространство R^n стандартным образом наделяется структурой дифференцируемого многообразия: множество $\mathfrak{F}$ всех бесконечно дифференцируемых функций $g(\cdot): V \to \mathbf{R}$ $(V \in \mathfrak{D}R^n)$ (через $\mathfrak{D}M$ обозначается множество всех открытых множеств пространства M) объявляется дифференцируемой структурой (структурой дифференцируемого многообразия класса C^∞) на R^n. Через $(TR^n, \hat{\pi}, R^n)$ обозначается касательное расслоение многообразия R^n, через $\hat{\pi}$ — проекция этого расслоения, $\hat{\pi}^{-1}(x)$ — касательное пространство в точке x.

Для всякого $x \in R^n$ отображение

$$\tau_x^{[n]} = \tau_x : \hat{\pi}^{-1}(x) \to R^n \tag{B.3}$$

определяется следующим образом: для всякого $\mathfrak{x} \in \hat{\pi}^{-1}(x)$ вектор $\tau_x \mathfrak{x}$ есть по определению такой вектор пространства R^n, что кривая (путь) ψ, определенная формулой

$$\psi(t) \underset{\text{def}}{=} x + t\tau_x \mathfrak{x}$$

(при всяком $t \in \mathbf{R}$), является представителем класса $\mathfrak{x}$ (мы пользуемся определением касательного вектора в точке как класса эквивалентности гладких кривых (путей), проходящих через эту точку, по некоторому определенному отношению эквивалентности, см., например, [4], глава II, § 5).

Хорошо известно (и легко доказывается), что отображение (B.3) является изоморфизмом векторного пространства $\hat{\pi}^{-1}(x)$ на векторное пространство R^n.

6. Пусть $\{W, h: W \to R^n\}$ — некоторая карта многообразия V^n. Пусть $y_1 \in W$, $y_2 \in W$ и пусть путь $u \in G(y_1, y_2)$ лежит *) в множестве W.

Введем обозначение

$$\hat{u}_t \underset{\text{def}}{=} hu_t \ (t \in [0, 1]). \tag{B.4}$$

Так как путь u лежит в W, то путь $\hat{u}$, определенный формулой (B.4) лежит в hW; так как отображение $h: W \to R^n$ принадлежит **) классу C^3, то из того, что путь u —

*) Под словами «путь u лежит в множестве M», где $M \subset V^n$, понимается следующее: «все значения отображения $u: [0, 1] \to V^n$ принадлежат множеству M».

**) Напомним, что координатные отображения принадлежат тому же классу гладкости, что и многообразие; в данном случае, следовательно, они принадлежат классу C^3 (см. п. 1 введения).

кусочно-гладкий, следует, что путь $\hat{u}$ — кусочно-гладкий; так как $u \in G(y_1, y_2)$, то $\hat{u} \in G(hy_1, hy_2)$.

Для всякого пути $u \in G(y_1, y_2)$, лежащего в W, определим отображение

$$\hat{\varphi}_u \underset{\text{def}}{=} \tau_{hy_1} dh_{y_1} \varphi_u (dh_{y_2})^{-1} (\tau_{hy_2})^{-1}. \tag{B.5}$$

На многообразии V^n в п. 1 введения была зафиксирована риманова метрика (класса C^2) $\delta(\cdot, \cdot)$. Риманова метрика $\delta(\cdot, \cdot)$ многообразия V^n индуцирует риманову метрику $\hat{\delta}(\cdot, \cdot)$ на hW, определяемую формулой

$$\hat{\delta}(a, b) \underset{\text{def}}{=} \delta(d(h^{-1})_{\hat{\pi}a} a, d(h^{-1})_{\hat{\pi}b} b) \tag{B.6}$$

(для всяких $a \in T(hW)$, $b \in T(hW)$ таких, что $\hat{\pi}a = \hat{\pi}b$).

Поясним обозначения. Касательное расслоение многообразия R^n обозначаем через $(TR^n, \hat{\pi}, R^n)$, его сужение на открытое множество $G \subset R^n$ — через $(TG, \hat{\pi}, G)$.

С помощью отображений «отождествления» τ_x (см. формулу (B.3)) риманова метрика $\hat{\delta}(\cdot, \cdot)$ может быть, как хорошо известно (и легко доказывается), записана в виде

$$\hat{\delta}(a, b) = g_{\alpha\beta}(\hat{\pi}a)(\tau_{\hat{\pi}a} a)^\alpha (\tau_{\hat{\pi}b} b)^\beta \tag{B.7}$$

(для всяких $a \in T(hW)$, $b \in T(hW)$ таких, что $\hat{\pi}a = \hat{\pi}b$), где при всяких $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta \in \{1, \ldots, n\}$ вещественная функция $g_{\alpha\beta}(\cdot)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема на hW, причем матрица $(g_{\alpha\beta}(z))$ симметрическая, а соответствующая ей квадратичная форма положительно определенная при всяком $z = (z^1, \ldots, z^n) \in hW$. В правой части равенства (B.7) по повторяющимся индексам α и β подразумевается суммирование от 1 до n.

Для всяких двух точек $\hat{y}_1 \in hW$, $\hat{y}_2 \in hW$ для всякой кривой (пути) $v \in G(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ лежащей в hW, в классических руководствах по римановой геометрии и тензорному анализу определено отображение $\hat{\varphi}_v$, ставящее в соответствие всякому вектору $a \in R^n$ вектор $\hat{\varphi}_v a \in R^n$, являющийся результатом параллельного перенесения вектора a вдоль кривой (пути) v (в силу римановой связности, индуцированной римановой метрикой (B.6)). Если $v = \hat{u}$, где кривая (путь) $\hat{u}$ определена через некоторую кривую (путь) $u \in G(y_1, y_2)$, лежащую в W, формулой (B.4), то, как известно,

$$\hat{\varphi}_{\hat{u}} = \hat{\varphi}_u, \tag{B.8}$$

где отображение $\hat{\varphi}_u$ определено формулой (B.5).

Пусть $L \in \operatorname{Hom}(R^n, R^n)$, т. е. L есть линейное отображение пространства R^n в R^n. Полагаем по определению

$$\| L \|_{(c)} \underset{\text{def}}{=} \sup_{a \in R^n_*} \{ | La |_{(c)} \cdot | a |^{-1}_{(c)} \},$$

где $\| a \|_{(c)} \underset{\text{def}}{=} [\sum_{i=1}^n (a^i)^2]^{1/2}$, $a = (a^1, \ldots, a^n)$.

7. Напомним определение отображения $\hat{\varphi}_v$. Пусть $\hat{y}_1 \in hW$, $\hat{y}_2 \in hW$ и пусть путь $v \in G(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ лежит в hW. Пусть $a_0 = (a_0^1, \ldots, a_0^n) \in R^n$.

Тогда вектор $\widehat{\varphi}_v a_0$ равен значению при $t=1$ решения следующей задачи Коши *⁾:

$$\frac{da^\gamma}{dt} = -\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(v_t^1,\ \ldots,\ v_t^n)\frac{dv_t^\alpha}{dt}a^\beta\ \ (\gamma\in\{1,\ \ldots,\ n\},) \tag{B.9}$$

$$a(0)=a_0, \tag{B.10}$$

где $(v_t^1,\ \ldots,\ v_t^n)=v_t$ $(t\in[0,\ 1])$, а символы Кристоффеля $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ определены известной формулой

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(z^1,\ \ldots,\ z^n)=\frac{1}{2}g^{\gamma\xi}(z^1,\ \ldots,\ z^n)\times\left[\frac{dg_{\alpha\xi}(z^1,\ \ldots,\ z^n)}{dz^\beta}+\frac{dg_{\beta\xi}(z^1,\ \ldots,\ z^n)}{dz^\alpha}-\frac{dg_{\alpha\beta}(z^1,\ \ldots,\ z^n)}{dz^\xi}\right] \tag{B.11}$$

В правых частях равенств (B.9) и (B.11) по всякому дважды (вверху и внизу) встречающемуся индексу подразумевается суммирование от 1 до n. Через $(g^{\alpha\beta})$ обозначается матрица, обратная, матрице $(g^{\alpha\beta})$.

Так как при всяких $\alpha\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $\beta\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $g^{\alpha\beta}(\cdot):G=hW\to R$ принадлежит классу C^2, то при всяких $\alpha\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $\beta\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $\gamma\in\{1,\ \ldots,\ n\}$ функция $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\cdot):G\to R$ определенная формулой (B.11), непрерывна.

Пусть теперь (до конца этого пункта) K — компактное множество, содержащееся в открытом множестве $G\subset R^n$, на котором функции $g^{\alpha\beta}(\cdot)$ $(\alpha\in\{1,\ \ldots,\ n\},\ \beta\in\{1,\ \ldots,\ n\})$ принадлежат классу C^1 $(G=hW)$. Найдется $\overline{c}\in R^+$ такое, что при всяких $\alpha\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $\beta\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $\gamma\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $z\in\{z^1,\ \ldots,\ z^n\}\in K$ имеет место неравенство

$$|\,\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(z^1,\ \ldots,\ z^n)\,|\leqslant\overline{c}. \tag{B.12}$$

При всяком $z\in\{z^1,\ \ldots,\ z^n\}\in G$ квадратичная форма $g_{\alpha\beta}(z)a^\alpha a^\beta$ положительно определенная, а ее коэффициенты непрерывны на G; хорошо известно (и легко доказывается), что отсюда следует (поскольку K — компактное множество, $K\subset G$), что существуют числа $\overline{d}\geqslant d>0$ такие, что для всякого $z\in\{z^1,\ \ldots,\ z^n\}\in K$ для всякого $a=(a^1,\ \ldots,\ a^n)\in R^n$ имеет место неравенство

$$\overline{d}^{\,2}(|\,a\,|_{(c)})^2\geqslant g_{\alpha\beta}(z)a^\alpha a^\beta\geqslant d^2(|\,a\,|_{(c)})^2. \tag{B.13}$$

Пусть $\widehat{y}_1\in K$, $\widehat{y}_2\in K$ и пусть $v\in G(\widehat{y}_1,\ \widehat{y}_2)$ лежит в K.

Линейную систему дифференциальных уравнений (B.9) перепишем в виде.

$$\frac{d\alpha^\gamma}{dt}=B^\gamma_\beta(t)a^\beta\ \ (\gamma\in\{1,\ \ldots,\ n\}), \tag{B.14}$$

$$B^\gamma_\beta(t)\underset{\text{def}}{=}-\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(v_t^1,\ \ldots,\ v_t^n)\frac{dv_t^\alpha}{dt}\ \ (\beta\in\{1,\ \ldots,\ n\},\ \gamma\in\{1,\ \ldots,\ n\}) \tag{B.15}$$

(сохраняется обычное соглашение о суммировании по дважды (вверху и внизу) встречающимся индексам).

При всяких $\beta\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $\gamma\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $t\in[0,\ 1]$ имеем

$$|\,B^\gamma_\beta(t)\,|\underset{(\text{B.15})}{\overset{(\text{B.12})}{\leqslant}}\sum_{\alpha=1}^{n}\overline{c}\left|\frac{dv_t^\alpha}{dt}\right|,$$

---

*⁾ Для числовой функции $\xi(\cdot)$, значение которой в точке t может обозначаться не только через $\xi(t)$, но и через ξ_t, принято стандартное обозначение (вместо $\frac{d\xi}{dt}$ может быть написано $\frac{d\xi_t}{dt}$):

$$\frac{d\xi}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t)^{-1}[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)].$$

следовательно,

$$[B_\beta^\gamma(t)]^2 \leqslant (\bar{c})^2 n^2 \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{dv_t^\alpha}{dt} \right)^2 . \tag{B.16}$$

$$\gamma \in \{1, \ \ldots, \ n\}, \ \tau \in [0, \ 1].$$

Далее, при всяких имеем

$$\sum_{\beta=1}^{n} [B_\beta^\gamma(\tau)]^2 \underset{(B.16)}{\leqslant} (\bar{c})^2 n^3 \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{dv_\tau^\alpha}{d\tau} \right)^2 \underset{(B.13)}{\leqslant} (\bar{c})^2 n^3 d^{-2} g_{\alpha\beta}(v_\tau) \frac{dv_\tau^\alpha}{d\tau} \frac{dv_\tau^\beta}{d\tau}. \tag{B.17}$$

В силу леммы Гроноулла для всякого решения $a(t) = (a^1(t), \ \ldots, \ a^n(t))$ линейной системы дифференциальных уравнений (В.14) при всяком $t \in [0, \ 1]$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |a(t)|_{(c)} &\leqslant |a(0)|_{(c)} \exp \int_0^t \left(\sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} [B_\beta^\gamma(\tau)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \underset{(B.17)}{\leqslant} \\ &\underset{(B.17)}{\leqslant} |a(0)|_{(c)} \exp \left\{ \bar{c} d^{-1} n^2 \int_0^1 \left[g_{\alpha\beta}(v_\tau) \frac{dv_\tau^\alpha}{d\tau} \frac{dv_\tau^\beta}{d\tau} \right]^{\frac{1}{2}} d\tau \right\}. \end{aligned} \tag{B.18}$$

Поскольку длина пути v по определению равна

$$s(v) \underset{\text{def}}{=} \int_0^1 \left[g_{\alpha\beta}(v_\tau) \frac{dv_\tau^\alpha}{d\tau} \frac{dv_\tau^\beta}{d\tau} \right]^{\frac{1}{2}} d\tau, \tag{B.19}$$

то из формулы (В.18) при всяком $t \in [0, \ 1]$ следует неравенство

$$|a(t)|_{(c)} \leqslant |a(0)|_{(c)} \exp (\bar{c} d^{-1} n^2 s(v)). \tag{B.20}$$

Для всякого решения $a(t) = (a^1(t), \ \ldots, \ a^n(t))$ системы (В.14) при всяком $t \in [0, \ 1]$. Имеем

$$a^\gamma(t) - a^\gamma(0) = \int_0^t B_\beta^\gamma(\tau) a^\beta(\tau) d\tau \ \ (\gamma \in \{1, \ \ldots, \ n\}), \tag{B.21}$$

$$\begin{aligned} |a(1) - a(0)|_{(c)} &\leqslant \sum_{\gamma=1}^{n} |a^\gamma(1) - a^\gamma(0)| \underset{(\text{B.21})}{\leqslant} \sum_{\gamma=1}^{n} \int_0^1 |B_\beta^\gamma(\tau)| |a^\beta(\tau)| d\tau \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\gamma=1}^{n} \int_0^1 \left[\sum_{\beta=1}^{n} |B_\beta^\gamma(\tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{\beta=1}^{n} |a^\beta(\tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\tau = \\ &= \int_0^1 \left\{ \sum_{\gamma=1}^{n} \left[\sum_{\beta=1}^{n} |B_\beta^\gamma(\tau)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} |a(\tau)|_{(c)} \, d\tau \underset{(\text{B.20})}{\leqslant} |a(0)|_{(c)} \times \\ &\times \exp (\bar{c} d^{-1} n^2 s(v)) \int_0^1 \sum_{\gamma=1}^{n} \left[\sum_{\beta=1}^{n} [B_\beta^\gamma(\tau)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\tau \underset{(\text{B.19})}{\overset{(\text{B.17})}{\leqslant}} \\ &\underset{(\text{B.19})}{\overset{(\text{B.17})}{\leqslant}} |a(0)|_{(c)} \{\exp (\bar{c} d^{-1} n^2 s(v))\} \bar{c} d^{-1} n^{\frac{5}{2}} s(v). \end{aligned} \tag{B.22}$$

В силу равенства $a(1) = \hat{\varphi}_v a(0)$ (см. вторую фразу п. 7) из формулы (В.22) следует неравенство

$$|\hat{\varphi}_v a - a|_{(c)} \leqslant |a|_{(c)} \{\exp (\bar{c} d^{-1} n^2 s(v))\} \bar{c} d^{-1} n^{5/2} s(v) \tag{B.23}$$

для всякого $a \in R^n$.

Подведем итог этого пункта. В нем доказано следующее

Утверждение. *Пусть K — компактное множество, содержащееся в открытом множестве, на котором все функции $g_{\alpha\beta}(\cdot)$ ($\alpha \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta \in \{1, \ldots, n\}$) принадлежат классу C^1. Тогда найдутся числа $\overline{c} \in \mathbf{R}^+$, $\overline{d} \in \mathbf{R}^+_*$ такие, что для всяких $\hat{y}_1 \in K$, $\hat{y}_2 \in K$ для всякого пути $v \in G(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$, лежащего в K, имеет место неравенство*

$$\| \hat{\varphi}_v - 1_{R^n} \|_{(c)} \underset{(B.23)}{\leqslant} s(v)\overline{c}\overline{d}^{-1}n^{\frac{5}{2}} \exp(\overline{c}\overline{d}^{-1}n^2 s(v)). \tag{B.24}$$

8. Для пояснения некоторых встречающихся далее формул напомним формулу

$$\dot{v}_t \underset{\text{def}}{=} (dv_t)(\tau_t^{[1]})^{-1}1, \tag{B.25}$$

где $v:[0, 1] \to R^n$ или $v:[0, 1] \to V^n$ — кусочно-гладкое отображение, dv_t — его производная в точке t, понимаемая как отображение касательного пространства многообразия $\mathbf{R}$ в точке t в касательное пространство многообразия R^n (или V^n) в точке v_t, где v_t — значение отображения v в точке t; для $v:[0, 1] \to R^n$ имеем

$$\tau_{v_t}(dv_t)(\tau_t^{[1]})^{-1}1 = \left(\frac{dv^1}{dt}, \ \ldots, \ \frac{dv^n}{dt} \right) \tag{B.26}$$

(формула (B.26) — хорошо известное равенство; смысл, вкладываемый в его правую часть, разъяснен выше при пояснении формулы (B.9): d/dt понимается как предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю). Смысл других обозначений, использованных в формулах (B.25), (B.26), разъяснен в п. 5 введения.

Пусть теперь $\hat{y}_1 \in W$, $\hat{y}_2 \in W$ и пусть путь $u \in G(y_1, y_2)$ лежит в W. Тогда путь $\hat{u}$, определенный формулой (B.4), кусочно-гладкий и лежит в hW.

Имеем

$$\begin{aligned} s(\hat{u}) &= \int_0^1 \left[g_{\alpha\beta}(\hat{u}_t) \frac{d\hat{u}_t^\alpha}{dt} \frac{d\hat{u}_t^\beta}{dt} \right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(B.26)}{\overset{(B.25)}{=}} \\ &\underset{(B.26)}{\overset{(B.25)}{=}} \int_0^1 \left[g_{\alpha\beta}(\hat{u}_t)(\tau_{\hat{u}_t} \dot{\hat{u}}_t)^\alpha (\tau_{\hat{u}_t} \dot{\hat{u}}_t)^\beta \right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(B.7)}{=} \\ &\underset{(B.7)}{=} \int_0^1 \left[\hat{\delta}(\dot{\hat{u}}_t, \dot{\hat{u}}_t) \right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(B.6)}{=} \int_0^1 \left[\delta(d(h^{-1})_{\hat{u}_t} \dot{\hat{u}}_t, d(h^{-1})_{\hat{u}_t} \dot{\hat{u}}_t \right]^{\frac{1}{2}} dt \underset{(B.25)}{\overset{(B.4)}{=}} \\ &\underset{(B.25)}{\overset{(B.4)}{=}} \int_0^1 \left[\delta(\dot{u}_t, \dot{u}_t) \right]^{\frac{1}{2}} dt = s(u). \end{aligned} \tag{B.27}$$

9. Пусть $L \in \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$, т. е. L есть линейное отображение R^n в R^n. Для всякого $z \in hW$ полагаем по определению

$$\| L \|_z \underset{\text{def}}{=} \sup_{b \in R^n_*} \{ | Lb |_z \cdot | b |_z^{-1} \}, \tag{B.28}$$

где

$$\begin{aligned} | a |_z &\underset{\text{def}}{=} (g_{\alpha\beta}(z) a^\alpha a^\beta)^{1/2} \underset{(B.7)}{=} (\hat{\delta}((\tau_z)^{-1}a, (\tau_z)^{-1}a))^{1/2} \underset{(B.6)}{=} \\ &\underset{(B.6)}{=} (\delta(d(h^{-1})_z(\tau_z)^{-1}a, d(h^{-1})_z(\tau_z)^{-1}a))^{1/2} \end{aligned} \tag{B.29}$$

для всякого $a=(a^1,\ \dots,\ a^n)\in R^n$ (в формуле (B.29) по индексам α и β, повторяющимся вверху и внизу, подразумевается суммирование от 1 до n).

Для всякого $y\in W$ для всякого пути $u\in G(y,\ y)$, лежащего в W, имеем

$$\varphi_u \underset{(B.5)}{=} (dh_y)^{-1}(\tau_{hy})^{-1}\hat{\varphi}_u\tau_{hy}dh_y, \tag{B.30}$$

$$\begin{aligned}\varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)} &\underset{(B.30)}{=} (dh_y)^{-1}(\tau_{hy})^{-1}\hat{\varphi}_u\tau_{hy}dh_y - (dh_y)^{-1}(\tau_{hy})^{-1}\tau_{hy}dh_y \underset{(B.8)}{=}\\ &\underset{(B.8)}{=} (dh_y)^{-1}(\tau_{hy})^{-1}(\hat{\varphi}_{\hat{u}} - 1_{R^n})\tau_{hy}dh_y,\end{aligned} \tag{B.31}$$

$$\begin{aligned}\|\varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)}\| &\underset{\text{def}}{=} \sup_{\eta\in\pi_*^{-1}(y)}\{(\delta\,((\varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)})\}\,\eta,\\ (\varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)})\,\eta))^{\frac{1}{2}}(\delta\,(\eta,\ \eta))^{-\frac{1}{2}}\} &= \sup_{b\in R_*^n}\{(\delta\,((\varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)})\,(dh_y)^{-1}(\tau_{hy})^{-1}b,\\ (\varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)})\,(dh_y)^{-1}(\tau_{hy})^{-1}b))^{\frac{1}{2}}&(\delta\,((dh_y)^{-1}(\tau_{hy})^{-1}b,\ (dh_y)^{-1}(\tau_{hy})^{-1}b))^{-\frac{1}{2}}\} \underset{(B.31)}{=}\\ \underset{(B.31)}{=} \sup_{b\in R_*^n}\{(\delta\,((dh_y)^{-1}(\tau_{hy})^{-1}(\hat{\varphi}_{\hat{u}} - 1_{R^n})\,b,\ &(dh_y)^{-1}(\tau_{hy})^{-1}(\hat{\varphi}_{\hat{u}} - 1_{R^n})\,b))^{\frac{1}{2}}\times\\ \times(\delta\,((dh_y)^{-1}(\tau_{hy})^{-1}b,\ &(dh_y)^{-1}(\tau_{hy})^{-1}b))^{-\frac{1}{2}}\} \underset{(B.29)}{=}\\ \underset{(B.29)}{=} \sup_{b\in R_*^n}\{|\,(\hat{\varphi}_{\hat{u}} - 1_{R^n})\,b\,|_{hy}\cdot|\,b\,|_{hy}^{-1}\} &\underset{(B.28)}{=}\\ \underset{(B.28)}{=} \|\,\hat{\varphi}_{\hat{u}} - 1_{R^n}\,\|_{hy} \leqslant \|\,1_{R^n}\,\|_{(c)}^{hy}\|\,\hat{\varphi}_{\hat{u}} - 1_{R^n}\,\|_{(c)}&\|\,1_{R^n}\,\|_{hy}^{(c)},\end{aligned} \tag{B.32}$$

где

$$\|\,1_{R^n}\,\|_{(c)}^{z} \underset{\text{def}}{=} \sup_{a\in R_*^n}\{|\,a\,|_z\cdot|\,a\,|_{(c)}^{-1}\}, \tag{B.33}$$

$$\|\,1_{R^n}\,\|_{z}^{(c)} \underset{\text{def}}{=} \sup_{a\in R_*^n}\{|\,a\,|_{(c)}\cdot|\,a\,|_{z}^{-1}\} \tag{B.34}$$

(при всяком $z\in hW$); напомним, что норма $|\,a\,|_z$ определена формулой (B.29). При написании второго равенства цепочки (B.32) использовано равенство*) $(dh_y)^{-1}(\tau_{hy})^{-1}R_*^n = \pi_*^{-1}(y)$, вытекающее из невырожденности (при всяком $z\in R^n$) линейных отображений $\tau_z : \hat{\pi}^{-1}(z)\to R^n$, $dh_z : \pi^{-1}(z)\to\hat{\pi}^{-1}(hz)$.

10. Пусть H — компактное множество, содержащееся в $W : H\Subset W$.

Для всякого $y\in H$ для всякого пути $u\in G(y,\ y)$, лежащего в компакте $H\Subset W$, имеем (поскольку $K \underset{\text{def}}{=} hH \Subset G \underset{\text{def}}{=} hW$, $\hat{u}\in G(hy,\ hy)$ (см. п. 6)):

$$\|\,1_{R^n}\,\|_{(c)}^{hy} \overset{(B.13)}{\underset{(B.33)}{\leqslant}} \bar{d}, \tag{B.35}$$

$$\|\,1_{R^n}\,\|_{hy}^{(c)} \overset{(B.13)}{\underset{(B.34)}{\leqslant}} d^{-1}, \tag{B.36}$$

---

*) Через $\pi_*^{-1}(y)$ обозначается множество всех ненулевых векторов касательного пространства $\pi^{-1}(y)$.

$$\|\varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)}\| \underset{(B.32)}{\leqslant} \|1_{R^n}\|^{hy}_{(c)} \|\hat{\varphi}_{\hat{u}} - 1_{R^n}\|_{(c)} \cdot \|1_{R^n}\|^{(c)}_{hy} \underset{(B.36)}{\overset{(B.35)}{=}}$$

$$\underset{(B.36)}{\overset{(B.35)}{=}} \overline{d}d^{-1} \|\hat{\varphi}_{\hat{u}} - 1_{R^n}\|_{(c)} \underset{(B.24)}{\leqslant} s(\hat{u})\overline{c}\overline{d}^{-2} n^{\frac{5}{2}} \exp(\overline{c}d^{-1}n^2 s(\hat{u})) \underset{(B.27)}{=} \tag{B.37}$$

$$\underset{(B.27)}{=} s(u)\overline{c}\overline{d}d^{-2} n^{\frac{5}{2}} \exp(\overline{c}d^{-1}n^2 s(u)).$$

11. *Для всяких***) $\varepsilon \in \mathbf{R}^+_*$; $y \in V^n$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon, y) \in \mathbf{R}^+_*$ *такое, что для всякого пути* $u \in G(y, y)$, *длина которого* $s(u) < \delta$, *выполнено неравенство*

$$\|\varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)}\| < \varepsilon.$$

Докажем это. Пусть даны $\varepsilon \in \mathbf{R}^+_*$, $y \in V^n$. Пусть $\{W, h : W \to R^n\}$ некоторая карта многообразия V^n такая, что $y \in W$. Возьмем какую-нибудь компактную окрестность H точки y, содержащуюся в W. Возьмем $\eta_1 \in \mathbf{R}^+_*$ такое, что η_1 — окрестность точки y, т.е. множество. $\{z : \rho(z, y) < \eta_1\}$, содержится в H. Положив, $K \underset{\text{def}}{=} hH$ найдем число $\overline{c} \in R^+$ (см. фразу, содержащую формулу (B.12)) и числа $\overline{d} \geqslant d > 0$ (см. фразу, содержащую формулу (B.13)). В пп. 7—10 доказано, что для всякого пути $u \in G(y, y)$, лежащего в компакте H, имеет место неравенство

$$\|\varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)}\| \underset{(B.37)}{\leqslant} s(u)\,\overline{c}\overline{d}d^{-2} n^{\frac{5}{2}} \exp(\overline{c}d^{-1}n^2 s(u)). \tag{B.38}$$

Возьмем $\eta \in \mathbf{R}^+_*$ такое, что

$$\eta\overline{c}\overline{d}^{-2} n^{5/2} \exp(\overline{c}d^{-1}n^2\eta) < \varepsilon. \tag{B.39}$$

Положим

$$\delta \underset{\text{def}}{=} \min\{\eta_1, \eta\}. \tag{B.40}$$

Так как $\eta_1 \in \mathbf{R}^+_*$, $\eta \in \mathbf{R}^+_*$ то $\delta \in \mathbf{R}^+_*$.

Всякий путь $u \in G(y, y)$, длина которого

$$s(u) < \delta \underset{(B.40)}{=} \min\{\eta_1, \eta\}, \tag{B.41}$$

лежит в $\{z : \rho(z, y) < \eta_1\}$; в самом деле, для всякого $\theta \in [0, 1]$ имеем

$$\rho(u_\theta, y) = \inf_{w \in G(u_\theta, y)} s(w) \leqslant s(w^{[\theta]}), \tag{B.42}$$

где путь $w^{[\theta]} \in G(u_\theta, y)$ определен формулой,

$$w^{[\theta]}_t \underset{\text{def}}{=} u_{\theta t} \quad (t \in [0, 1]); \tag{B.43}$$

далее,

$$s(w^{[\theta]}) \underset{(B.43)}{=} \int_0^1 (\delta((u_{\theta t})^{\cdot}, (u_{\theta t})^{\cdot}))^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^\theta (\delta(\dot{u}_t, \dot{u}_t))^{\frac{1}{2}} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 (\delta(\dot{u}_t, \dot{u}_t))^{\frac{1}{2}} dt = s(u) \underset{(B.41)}{<} \eta_1, \tag{B.44}$$

$$\rho(u_\theta, y) \underset{(B.42)}{\leqslant} s(w^{[\theta]}) \underset{(B.44)}{<} \eta_1,$$

следовательно, $u_\Theta \in \{z : \rho(z, y) < \eta_1\}$. Согласно определению числа $\eta_1 \in \mathbf{R}^+_*$, имеет место включение $\{z : \rho(z, y) < \eta_1\} \subset H$. Таким образом, всякий путь $u \in G(y, z)$, длина которого

**) Через R^+_* обозначается множество всех положительных вещественных чисел.

$s(u) < \delta$, лежит в H и, следовательно, удовлетворяет неравенству (В.38), из которого (поскольку $s(u) < \delta \underset{(\text{В.40})}{\leqslant} \eta$, выполнено неравенство (В.39), а функция от η, стоящая в левой части неравенства (В.39), монотонно возрастающая на $\mathbf{R}^+$) следует неравенство

$$\| \varphi_u - 1_{\pi^{-1}(y)} \| < \varepsilon.$$

Утверждение, сформулированное в начале п. 11, доказано. § 1. Струей первого порядка (или 1-струей) (в многообразии V^n) будем называть*) тройку $(x,\ y,\ L_x^y)$, где $x \in V^n$, $y \in V^n$, а L_x^y — линейное отображение $\pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(y)$. Множество всех 1-струй (в многообразии V^n) обозначим через $J_1 V^n$. Множество $J_1 V^n$ наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния $\rho_1(\cdot\,,\cdot)$, определяемого формулой **)

$$\rho_1((x_1,\ y_1,\ L_{x_1}^{y_1}),\ (x_2,\ y_2,\ M_{x_2}^{y_2}) \underset{\text{def}}{=}$$

$$\underset{\text{def}}{=} \inf_{\substack{u \in G(x_2,\ x_1) \\ v \in G(y_1,\ y_2)}} \{ s(u) + s(v) + \| \varphi_u M_{x_2}^{y_2} \varphi_u - L_{x_1}^{y_1} \| \} \qquad (1)$$

для всяких $(x_1,\ y_1,\ L_{x_1}^{y_1}) \in J_1 V^n$, $(x_2,\ y_2,\ M_{x_2}^{y_2}) \in J_1 V^n$.

Корректность этого определения обосновывается следующим предложением.

П р е д л о ж е н и е. *Формула (1) определяет расстояние в множестве* $J_1 V^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Для всяких $(x_1,\ y_1,\ L_{x_1}^{y_1}) \in J_1 V^n$, $(x_2,\ y_2,\ M_{x_2}^{y_2}) \in J_1 V^n$ имеем: $G(x_2,\ x_1) \neq \varnothing$, $G(y_1,\ y_2) \neq \varnothing$ (это — известное следствие связности дифференцируемого многообразия V^n); для всяких $u \in G(x_2,\ x_1)$, $v \in G(y_1,\ y_2)$, имеем

$$0 \leqslant s(u) < +\infty,\ 0 \leqslant s(v) < +\infty,\ 0 \leqslant \| \varphi_u M_{x_2}^{y_2} \varphi_u - L_{x_1}^{y_1} \| < +\infty;$$

поэтому

$$0 \leqslant \inf_{\substack{u \in G(x_2,\ x_1) \\ v \in G(y_1,\ y_2)}} \{ s(u) + s(v) + \| \varphi_u M_{x_2}^{y_2} \varphi_u - L_{x_1}^{y_1} \| \} < +\infty,$$

т. е. (см. формулу (1))

$$0 \leqslant \rho_1((x_1,\ y_1,\ L_{x_1}^{y_1}),\ (x_2,\ y_2,\ M_{x_2}^{y_2})) < +\infty. \qquad (2)$$

Таким образом, при всяких $(x_1,\ y_1,\ L_{x_1}^{y_1}) \in J_1 V^n$, $(x_2,\ y_2,\ M_{x_2}^{y_2}) \in J_1 V^n$ доказана формула (2).

2) Для всякого $(x,\ y,\ L_x^y) \in J_1 V^n$ имеем:

а) путь $u[x]$, определенный формулой $u[x]_t \equiv x$ ($t \in [0,\ 1]$), принадлежит множеству $G(x,\ x)$ и имеет длину $s(u[x]) = 0$;

б) путь $v[y]$, определенный формулой $v[y]_t \equiv y$ ($t \in [0,\ 1]$), принадлежит множеству $G(y,\ y)$ и имеет длину $s(v[y]) = 0$;

в) для так определенных путей $u[x]$, $v[y]$, как известно, имеют место равенства $\varphi_{u[x]} = 1_{\pi^{-1}(x)}$, $\varphi_{v[y]} = 1_{\pi^{-1}(y)}$, из которых следует равенство $\varphi_{v[y]} L_x^y \varphi_{u[x]} = L_x^y$

г) из утверждений подпунктов а) — в) следует: $u[x] \in G(x,\ x)$, $v[y] \in G(y,\ y)$, $s(u[x]) + s(v[y]) + \| \varphi_{v[y]} L_x^y \varphi_{u[x]} - L_x^y \| = 0$, откуда

$$\inf_{\substack{u \in G(x_2,\ x_1) \\ v \in G(y_1,\ y_2)}} \{ s(u) + s(v) + \| \varphi_u L_x^y \varphi_u - L_x^y \| \} \leqslant 0;$$

д) последнее неравенство в силу формулы (1) переписывается в виде: $\rho_1((x,\ y,\ L_x^y),\ (x,\ y,\ L_x^y)) \leqslant 0$, откуда в силу формулы (2) следует равенство

---

*) Это определение, как известно, соответствует определению, приведенному в [3 с. 188].

**) Смысл обозначений, примененных в формуле (1), разъяснен в п. 3 введения.

$$\rho_1((x,\, y,\, L_x^y),\ (x,\, y,\, L_x^y)) = 0, \tag{3}$$

Таким образом, для всякого $(x,\, y,\, L_x^y) \in J_1V^n$ доказана формула (3).

3) Пусть даны $(x_1,\, y_1,\, L_{x_1}^{y_1}) \in J_1V^n$, $(x_2,\, y_2,\, M_{x_2}^{y_2}) \in J_1V^n$.

а) Для всяких $x \in V^n$, $y \in V^n$ для всякого пути $w \in G(x,\, y)$ путь w^{-1} определенный формулой $(w^{-1})_t = w_{1-t}$ (для всякого $t \in [0,\, 1]$), принадлежит множеству $G(x,\, y)$. Наоборот, всякий путь $\overline{w} \in G(y,\, x)$ может быть представлен в виде $\overline{w} = w^{-1}$, где $w \in G(x,\, y)$ (доказательство: положим $w \underset{\text{def}}{=} \overline{w}^{-1}$). При этом

$$s(w^{-1}) = s(w), \tag{4}$$

$$\varphi_{w^{-1}} = (\varphi_w)^{-1} \tag{5}$$

(формулы (4), (5) вытекают непосредственно из определения длины пути и параллельного перенесения вдоль пути). Напомним, что для всякого пути $u \in G(x,\, y)$ отображение φ_u есть изоморфизм касательного пространства $\pi^{-1}(y)$ (как евклидова пространства) на касательное пространство $\pi^{-1}(x)$ (как евклидово пространство) (евклидова структура на каждом касательном пространстве индуцирована римановой метрикой $\delta(\cdot\,,\cdot)$, заданной на многообразии V^n).

б) Для всяких $u \in G(x_2,\, x_1)$, $v \in G(y_1,\, y_2)$ в силу написанного в подпункте а) имеют место формулы

$$s(u^{-1}) \underset{(4)}{=} s(u)\,,\ s(v^{-1}) \underset{(4)}{=} s(v)\,, \tag{6}$$

$$\varphi_{u^{-1}} \underset{(5)}{=} (\varphi_u)^{-1},\ \varphi_{v^{-1}} \underset{(5)}{=} (\varphi_v)^{-1}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\|\, \varphi_{v^{-1}} L_{x_1}^{y_1} \varphi_{u^{-1}} - M_{x_2}^{y_2} \,\| \underset{(7)}{=} \|\, (\varphi_v)^{-1} L_{x_1}^{y_1} (\varphi_v)^{-1} - M_{x_2}^{y_2} \,\| = \\ &= \|\, (\varphi_v)^{-1} [L_{x_1}^{y_1} - \varphi_v M_{x_2}^{y_2} \varphi_u]\, (\varphi_u)^{-1} \,\| = \|\, \varphi_v M_{x_2}^{y_2} \varphi_u - L_{x_1}^{y_1} \,\| \end{aligned} \tag{8}$$

(последнее равенство следует из того, что φ_u, φ_v — изоморфизмы евклидовых пространств).

Поэтому для всяких $u \in G(x_2,\, x_1)$, $v \in G(y_1,\, y_2)$ имеет место равенство

$$s(u^{-1}) + s(v^{-1}) + \|\, \varphi_{v^{-1}} L_{x_1}^{y_1} \varphi_{u^{-1}} - M_{x_2}^{y_2} \,\| \overset{(6)}{\underset{(8)}{=}}$$

$$\overset{(6)}{\underset{(8)}{=}} s(u) + s(v) + \|\, \varphi_u M_{x_2}^{y_2} \varphi_u - L_{x_1}^{y_1} \,\|\,.$$

Отсюда в силу доказанного в подпункте а) утверждения (о том, что если w пробегает все множество $G(x,\, y)$, то w^{-1} пробегает все множество $G(y,\, x)$ следует равенство

$$\inf_{\substack{u^{-1} \in G(x_1,\, x_2) \\ v^{-1} \in G(y_2,\, y_1)}} \{ s(u^{-1}) + s(v^{-1}) + \|\, \varphi_{v^{-1}} L_{x_1}^{y_1} \varphi_{u^{-1}} - M_{x_2}^{y_2} \,\| \} =$$

$$= \inf_{\substack{u \in G(x_1,\, x_2) \\ v \in G(y_2,\, y_1)}} \{ s(u) + s(v) + \|\, \varphi_v M_{x_2}^{y_2} \varphi_u - L_{x_1}^{y_1} \,\| \},$$

которое в силу формулы (1) переписывается в виде

$$\rho_1((x_1,\, y_1,\, M_{x_2}^{y_2}),\ (x_1,\, y_1,\, L_{x_1}^{y_1})) = \rho_1((x_1,\, y_1,\, L_{x_1}^{y_1}),\ (x_2,\, y_2,\, M_{x_2}^{y_2}). \tag{9}$$

Таким образом, для всяких $(x_1,\, y_1,\, L_{x_1}^{y_1}) \in J_1V^n$, $(x_2,\, y_2,\, M_{x_2}^{y_2}) \in J_1V^n$ доказана формула (9).

4) Для всяких $(x_1,\, y_1,\, L_{x_1}^{y_1}) \in J_1V^n$, $(x_2,\, y_2,\, M_{x_2}^{y_2}) \in J_1V^n$ $(x_3,\, y_3,\, N_{x_3}^{y_3}) \in J_1V^n$ имеет место неравенство

$$\rho_1((x_1, y_1, L_{x_1}^{y_1}), (x_2, y_2, M_{x_2}^{y_2}) \leqslant \rho_1((x_1, y_1, L_{x_1}^{y_1})(x_3, y_3, N_{x_3}^{y_3}) + \\ + \rho_1(x_3, y_3, N_{x_3}^{y_3})(x_2, y_2, M_{x_2}^{y_2})). \tag{10}$$

Докажем это. Пусть даны произвольные $(x_1, y_1, L_{x_1}^{y_1}) \in J_1V^n$, $(x_2, y_2, M_{x_2}^{y_2}) \in J_1V^n$ $(x_3, y_3, N_{x_3}^{y_3}) \in J_1V^n$.

а) Для всяких путей $u_{3,\,1} \in G(x_3, x_1)$, $u_{2,\,3} \in G(x_2, x_3)$ рассмотрим путь $u_{2,\,1}$, определенный формулой

$$(u_{2,\,1})_t \underset{\text{def}}{=} (u_{2,\,3}\, u_{3,\,1})_t \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} (u_{3,\,1})_{2t} \ \text{ при } \ t \in \left[0,\ \dfrac{1}{2}\right), \\ (u_{2,\,3})_{2t-1} \ \text{ при } \ t \in \left[\dfrac{1}{2},\ 1\right], \end{cases} \tag{11}$$

и для всяких путей $v_{1,\,3} \in G(y_1, y_3)$, $v_{3,\,2} \in G(y_3, y_2)$ рассмотрим путь $v_{1,\,2}$, определенный формулой

$$(v_{1,\,2})_t \underset{\text{def}}{=} (v_{1,\,3}\, v_{3,\,2})_t \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} (v_{3,\,2})_{2t} \ \text{ при } \ t \in \left[0,\ \dfrac{1}{2}\right), \\ (v_{1,\,3})_{2t-1} \ \text{ при } \ t \in \left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]. \end{cases} \tag{12}$$

Из формул (11), (12) следует, что

$$u_{2,\,1} \in G(x_2, x_1),\ v_{1,\,2} \in G(y_1, y_2). \tag{13}$$

Имеют место равенства

$$\varphi_{u_{2,\,1}} = \varphi_{u_{2,\,3}} \varphi_{u_{3,\,1}},\ \varphi_{v_{1,\,2}} = \varphi_{v_{1,\,3}} \varphi_{v_{3,\,2}}, \tag{14}$$

вытекающие в силу формул (11), (12) из определения параллельного перенесения вдоль пути. Имеют место равенства

$$s(u_{2,\,1}) = s(u_{2,\,3}) + s(u_{3,\,1}),\ s(v_{1,\,2}) = s(v_{1,\,3}) + s(v_{3,\,2}), \tag{15}$$

вытекающие в силу формул (11), (12) из определения длины пути.

б) Для всяких путей $u_{3,\,1} \in G(x_3, x_1)$, $u_{2,\,3} \in G(x_2, x_3)$, $v_{1,\,3} \in G(y_1, y_3)$, $v_{3,\,2} \in G(y_3, y_2)$ имеем, определив пути $u_{2,\,1}$, $v_{1,\,2}$ формулами (11), (12):

$$s(u_{2,\,1}) + s(v_{1,\,2}) + \| \varphi_{v_{1,\,2}} M_{x_2}^{y_2} \varphi_{v_{2,\,1}} - L_{x_1}^{y_1} \| \overset{(14)}{\underset{(15)}{=}} s(u_{2,\,3}) + s(u_{3,\,1}) + s(v_{1,\,3}) + \\ + s(v_{3,\,2}) + \| \varphi_{v_{1,\,3}} \varphi_{v_{3,\,2}} M_{x_2}^{y_2} \varphi_{u_{2,\,3}} \varphi_{u_{3,\,1}} - L_{x_1}^{y_1} \|, \tag{16}$$

$$\| \varphi_{v_{1,\,3}} \varphi_{v_{3,\,2}} M_{x_2}^{y_2} \varphi_{u_{2,\,3}} \varphi_{u_{3,\,1}} - L_{x_1}^{y_1} \| = \| \varphi_{v_{1,\,3}} \varphi_{v_{3,\,2}} M_{x_2}^{y_2} \varphi_{u_{2,\,3}} \varphi_{u_{3,\,1}} - \\ - \varphi_{v_{1,\,3}} N_{x_3}^{y_3} \varphi_{u_{3,\,1}} + \varphi_{v_{1,\,3}} N_{x_3}^{y_3} \varphi_{u_{3,\,1}} - L_{x_1}^{y_1} \| \leqslant \\ \leqslant \| \varphi_{v_{1,\,3}} \varphi_{v_{3,\,2}} M_{x_2}^{y_2} \varphi_{u_{2,\,3}} \varphi_{u_{3,\,1}} - \varphi_{v_{1,\,3}} N_{x_3}^{y_3} \varphi_{u_{3,\,1}} \| + \\ + \| \varphi_{v_{1,\,3}} N_{x_3}^{y_3} \varphi_{u_{3,\,1}} - L_{x_1}^{y_1} \| = \| \varphi_{v_{1,\,3}} (\varphi_{v_{3,\,2}} M_{x_2}^{y_2} \varphi_{u_{2,\,3}} - N_{x_3}^{y_3}) \varphi_{u_{3,\,1}} \| + \\ + \| \varphi_{v_{1,\,3}} N_{x_3}^{y_3} \varphi_{u_{3,\,1}} - L_{x_1}^{y_1} \| = \| \varphi_{v_{3,\,2}} M_{x_2}^{y_2} \varphi_{u_{2,\,3}} - N_{x_3}^{y_3} \| + \| \varphi_{v_{1,\,3}} N_{x_3}^{y_3} \varphi_{u_{3,\,1}} - L_{x_1}^{y_1} \| \tag{17}$$

(последнее равенство следует из того, что $\varphi_{v_{1,\,3}}$, $\varphi_{u_{3,\,1}}$ — изоморфизмы евклидовых пространств); из формул (16), (17) следует

$$
\begin{gathered}
s(u_{2,\,1})+s(v_{1,\,2})+\|\varphi_{v_{1,\,2}}M_{x_2}^{y_2}\varphi_{u_{2,\,1}}-L_{x_1}^{y_1}\|\leqslant\\
\leqslant s(u_{2,\,3})+s(u_{3,\,1})+s(v_{1,\,3})+s(v_{3,\,2})+\\
+\|\varphi_{v_{3,\,2}}M_{x_2}^{y_2}\varphi_{u_{2,\,3}}-N_{x_3}^{y_3}\|+\|\varphi_{v_{1,\,3}}N_{x_3}^{y_3}\varphi_{u_{3,\,1}}-L_{x_1}^{y_1}\|=\\
=(s(u_{3,\,1})+s(v_{1,\,3})+\|\varphi_{v_{1,\,3}}N_{x_3}^{y_3}\varphi_{u_{3,\,1}}-L_{x_1}^{y_1}\|+\\
+(s(u_{2,\,3})+s(v_{3,\,2})+\|\varphi_{v_{3,\,2}}M_{x_2}^{y_2}\varphi_{u_{2,\,3}}-N_{x_3}^{y_3}\|.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

в) Итак, для всяких путей $u_{3,\,1}\in G(x_3,\,x_1)$, $u_{2,\,3}\in G(x_2,\,x_3)$, $v_{1,\,3}\in G(y_1,\,y_3)$, $v_{3,\,2}\in G(y_3,\,y_2)$ (по которым пути $u_{2,\,1}\underset{(13)}{\in}G(x_2,\,x_1)$, $v_{1,\,2}\underset{(13)}{\in}G(y_1,\,y_2)$ определены формулами (11), (12)) доказана формула (18). Отсюда следует, что

$$
\begin{gathered}
\inf_{\substack{u\in G(x_2,\,x_1)\\ v\in G(y_1,\,y_2)}}\{s(u)+s(v)+\|\varphi_v M_{x_2}^{y_2}\varphi_u-L_{x_1}^{y_1}\|\}\leqslant\\
\leqslant\inf_{\substack{u_{3,\,1}\in G(x_3,\,x_1)\\ u_{2,\,3}\in G(x_2,\,x_3)}}\ \inf_{\substack{v_{1,\,3}\in G(y_1,\,y_3)\\ v_{3,\,2}\in G(y_3,\,y_2)}}\{(s(u_{3,\,1})+s(v_{1,\,3})+\\
+\|\varphi_{v_{1,\,3}}N_{x_3}^{y_2}\varphi_{u_{3,\,1}}-L_{x_1}^{y_1}\|)+(s(u_{2,\,3})+s(v_{3,\,2})+\\
+\|\varphi_{v_{3,\,2}}M_{x_2}^{y_2}\varphi_{u_{2,\,3}}-N_{x_3}^{y_3}\|)\}=\\
=\inf_{\substack{u_{3,\,1}\in G(x_3,\,x_1)\\ v_{1,\,3}\in G(y_1,\,y_3)}}\{s(u_{3,\,1})+s(v_{1,\,3})+\|\varphi_{v_{1,\,3}}N_{x_3}^{y_2}\varphi_{u_{3,\,1}}-L_{x_1}^{y_1}\|\}+\\
+\inf_{\substack{u_{2,\,3}\in G(x_2,\,x_3)\\ v_{3,\,2}\in G(y_3,\,y_2)}}\{s(u_{2,\,3})+s(v_{3,\,2})+\|\varphi_{v_{3,\,2}}M_{x_2}^{y_2}\varphi_{u_{2,\,3}}-N_{x_3}^{y_3}\|\}.
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Из формулы (19) в силу формулы (1) следует неравенство (10).

5) Пусть для некоторых $(x_1,\,y_1,\,L_{x_1}^{y_1})\in J_1V^n$, $(x_2,\,y_2,\,M_{x_2}^{y_2})\in J_1V^n$ имеет место равенство

$$\rho_1((x_1,\,y_1,\,L_{x_1}^{y_1}),\,(x_2,\,y_2,\,M_{x_2}^{y_2}))=0; \tag{20}$$

тогда $(x_1,\,y_1,\,L_{x_1}^{y_1})=(x_2,\,y_2,\,M_{x_2}^{y_2})$.

Докажем это.

а) $\rho(x_1,\,x_2)\underset{\text{def}}{=}\inf\limits_{u\in G(x_2,\,x_1)}s(u)=\inf\limits_{\substack{u\in G(x_2,\,x_1)\\ v\in G(y_1,\,y_2)}}s(u)\underset{(1)}{\leqslant}\rho_1((x_1,\,y_1,\,L_{x_1}^{y_1}),\,(x_2,\,y_2,\,M_{x_2}^{y_2}))\underset{(20)}{=}0$.

Следовательно,

$$x_1=x_2. \tag{21}$$

б) $\rho(y_1,\,y_2)\underset{\text{def}}{=}\inf\limits_{v\in G(y_1,\,y_2)}s(v)=\inf\limits_{\substack{u\in G(x_2,\,x_1)\\ v\in G(y_1,\,y_2)}}s(u)\underset{(1)}{\leqslant}\rho_1((x_1,\,y_1,\,L_{x_1}^{y_1}),\,(x_2,\,y_2,\,M_{x_2}^{y_2}))\underset{(20)}{=}0$.

Следовательно,

$$y_1=y_2. \tag{22}$$

в) В силу формул (21), (22) равенство (20) может быть переписано в виде

$$\rho_1((x,\,y,\,L_x^y),\,(x,\,y,\,M_x^y))=0, \tag{23}$$

где

$$x\underset{\text{def}}{=}x_1\underset{(21)}{=}x_2,\ y\underset{\text{def}}{=}y_1\underset{(22)}{=}y_2. \tag{24}$$

г) Пусть дано произвольное $\varepsilon\in\mathbf{R}_*^+$. Для всякого $z\in V^n$ существует $\delta=\delta(\varepsilon,\,z)\in\mathbf{R}_*^+$ такое, что для всякого пути $u\in G(z,\,z)$, длина которого удовлетворяет неравенству $s(u)<\delta(\varepsilon,\,z)$, имеет место неравенство

$$\|\varphi_u-1_{\pi^{-1}(z)}\|<\varepsilon \tag{25}$$

(в силу утверждения, выделенного курсивом в начале п. 11 введения). Точки $x \in V^n$, $y \in V^n$ даны (они определены формулой (24)). Положим

$$\eta \underset{\text{def}}{=} \min\{\delta(\varepsilon, x), \delta(\varepsilon, y)\}. \tag{26}$$

Из равенства (23) в силу формулы (1) следует существование путей $u_\varepsilon \in G(x, x)$, $v_\varepsilon \in G(y, y)$ таких, что

$$s(u_\varepsilon) + s(v_\varepsilon) + \| \varphi_{v_\varepsilon} M_x^y \varphi_{u_\varepsilon} - L_x^y \| < \min\{\varepsilon, \eta\}; \tag{27}$$

из неравенства (27) следуют неравенства $s(u_\varepsilon) < \eta$, $s(v_\varepsilon) < \eta$, из которых, согласно определению числа η (см. формулы (25), (26)), следуют неравенства

$$\| \varphi_{u_\varepsilon} - 1_{\pi^{-1}(x)} \| < \varepsilon, \; \| \varphi_{v_\varepsilon} - 1_{\pi^{-1}(y)} \| < \varepsilon. \tag{28}$$

Из (27) следует неравенство

$$\| \varphi_{v_\varepsilon} M_x^y \varphi_{u_\varepsilon} - L_x^y \| < \varepsilon. \tag{29}$$

Имеем (во втором неравенстве этой цепочки используется равенство $\| \varphi_{v_\varepsilon} \| = 1$, вытекающее из того, что φ_{v_ε} — изоморфизм евклидовых пространств)

$$\| M_x^y - L_x^y \| = \| \varphi_{v_\varepsilon} M_x^y \varphi_{u_\varepsilon} - L_x^y - \varphi_{v_\varepsilon} M_x^y \varphi_{u_\varepsilon} + \varphi_{v_\varepsilon} M_x^y - \varphi_{v_\varepsilon} M_x^y + M_x^y \| \leqslant$$

$$\leqslant \| \varphi_{v_\varepsilon} M_x^y \varphi_{u_\varepsilon} - L_x^y \| + \| \varphi_{v_\varepsilon} M_x^y (\varphi_{u_\varepsilon} - 1_{\pi^{-1}(x)}) \| + \| (\varphi_{v_\varepsilon} - 1_{\pi^{-1}(y)}) M_x^y \| \leqslant \| \varphi_{v_\varepsilon} M_x^y \varphi_{u_\varepsilon} - L_x^y \| +$$

$$+ (\varphi_{u_\varepsilon} - 1_{\pi^{-1}(x)}) \| \cdot \| M_x^y \| + \| \varphi_{v_\varepsilon} - 1_{\pi^{-1}(x)} \| \cdot \| M_x^y \| \underset{(29)}{\overset{(28)}{\leqslant}} \varepsilon + 2\varepsilon \| M_x^y \|.$$

Итак, доказано, что для всякого $\varepsilon \in \mathbf{R}_*^+$ имеет место неравенство $\| M_x^y - L_x^y \| \leqslant \varepsilon (1 + 2 \| M_x^y \|)$. Отсюда следует равенство $M_x^y = L_x^y$, из которого в силу формулы (24) следует равенство

$$(x_1, y_1, L_{x_1}^{y_1}) = (x_2, y_2, M_{x_2}^{y_2}).$$

Утверждение, сформулированное в начале п. 5), доказано. Предложение доказано.

Литература

1. М и л л и о н щ и к о в В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18 № 5 с 804—821.
2. М и л л и о н щ и к о в В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 6, с. 957—978.
3. Л е н г С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967. — 203 с.
4. С т е р н б е р г С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970. — 412 с.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 24 февраля 1983 г.