УДК 517.938

О типичных свойствах множеств уровня показателей Ляпунова

Миллионщиков В. М.

Введение

Пусть дана линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

($x \in \mathbf{R}^n$ или $x \in \mathbf{C}^n$, $A(\cdot) : \mathbf{R}^+ \to \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^n,\, \mathbf{R}^n)$ или, соответственно, $\mathbf{R}^+ \to \mathrm{Hom}\,(\mathbf{C}^n,\, \mathbf{C}^n)$ — непрерывное ограниченное отображение. Под ограниченностью понимается ограниченность функции $\| A(\cdot) \| : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$).

Пусть дано $\lambda \in \mathbf{R}$. Множеством уровня $\mathcal{E}_\lambda(A)$ показателей Ляпунова системы (1), соответствующим числу λ, называется множество начальных значений тех решений системы (1), показатели Ляпунова которых меньше λ. Если принять обычно принимаемое соглашение о том, что показатель Ляпунова нулевого решения равен $-\infty$, то при всяком $\lambda \in \mathbf{R}$ множество $\mathcal{E}_\lambda(A)$ есть векторное подпространство пространства $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$.

Изучение свойств отображения $A \mapsto \mathcal{E}_\lambda(A)$ представляет определенный интерес с точки зрения теории устойчивости (особенно — с точки зрения теории условной устойчивости). Конечно, для того, чтобы можно было говорить о свойствах этого отображения, надо точно указать пространство линейных систем (1), на котором это отображение рассматривается. Как известно, линейные системы вида (1) возникают, в частности, как системы уравнений в вариациях (линеаризованные системы) нелинейных систем $\dot{x} = f(x,\, t)$ вдоль их решений, когда варьируется начальное значение решения. Если рассмотреть произведение того или иного пространства нелинейных систем $\dot{x} = f(x,\, t)$ на фазовое пространство (т. е. пространство x-ов), то возникает отображение $(f,\, x) \mapsto A$, ставящее в соответствие паре $(f,\, x)$ систему (1) (точнее, определяющую ее функцию A), являющуюся системой уравнений в вариациях системы $\dot{x} = f(x,\, t)$ вдоль решения, равного x при $t = 0$. Конечно, для того, чтобы функция A, возникающая таким образом, была ограниченной, следует наложить некоторое условие на функцию f — условие ограниченности производной f_x'. Множество таких функций f можно наделить топологией типа топологии равномерной сходимости f и f_x'. После этого задача изучения свойств отображения $(f,\, x) \mapsto \mathcal{E}_\lambda(A(f,\, x))$, определенного как суперпозиция отображений $(f,\, x) \mapsto A$, $A \mapsto \mathcal{E}_\lambda(A)$, становится более определенной. Благодаря исследованиям Перрона известно, что это отображение не во всякой точке непрерывно. Более того, бывает так: $\mathcal{E}_0(A) = \mathbf{R}^n$, но найдутся $A_k(\cdot) : \mathbf{R}^+ \to \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}^n,\, \mathbf{R}^n)$ ($k \in \mathbf{N}$), стремящиеся при $k \to \infty$ к $A(\cdot)$ равномерно на $\mathbf{R}^+$, такие, что $\dim \mathcal{E}_0(A_k) < n$ при всяком $k \in \mathbf{N}$. Сформулированный результат Перрона можно высказать в терминах полунепрерывности: отображение $A \mapsto \mathcal{E}_\lambda(A)$ не всюду полунепрерывно снизу.

Цель настоящей статьи — изложение серии теорем, которые можно характеризовать как теоремы о типичности полунепрерывности снизу отображений $(f,\, x) \mapsto \mathcal{E}_\lambda(A(f,\, x))$, $A \mapsto \mathcal{E}_\lambda(A)$. При этом типичность понимается в смысле Бэра: свойство называется типичным, если имеется всюду плотное множество типа G_δ, состоящее из точек, обладающих этим свойством. Напомним читателю, что множество типа G_δ — это пересечение счетной совокупности открытых множеств.

Приводимые далее во введении теоремы являются точными формулировками наиболее простых частных случаев некоторых теорем этой статьи.

Пусть V^n — связное замкнутое n-мерное дифференцируемое многообразие. Множество $\tilde{T}V^n$ векторных подпространств касательных пространств этого многообразия наделяется естественной топологией — той, в которой оно становится пространством расслоенного пространства ее слоем $\bigcup_{k=0}^{n} G_k(\mathbf{R}^n)$ (дизъюнктное объединение грассмановых многообразий), ассоциированного с тем же локально тривиальным главным $\mathrm{GL}\,(n,\ \mathbf{R})$-расслоением, с которым ассоциировано касательное расслоение многообразия V^n.

Обозначим через S_d множество диффеоморфизмов класса C^1, отображающих V^n на себя, наделенное C^1-топологией.

Т е о р е м а 1. *В пространстве* $S_d \times V^n$ *имеется всюду плотное множество* C_d *типа* G_δ *такое, что при всяком* $\lambda \in \mathbf{R}$ *отображение*

$$(f,\ x) \to l_\lambda(f,\ x) \underset{\text{def}}{=} \left\{ \mathfrak{x} \in T_x V^n : \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln |df^m \mathfrak{x}| < \lambda \right\} \tag{2}$$

полунепрерывно снизу во всякой точке множества C_d, т. е. для всякой точки $(f_0,\ x_0) \in C_d$, для всякой окрестности $V \subset \tilde{T}V^n$ точки $l_\lambda(f_0,\ x_0)$ найдется окрестность $W \subset S_d \times V^n$ точки $(f_0,\ x_0)$ такая, что для всякой точки $(f,\ x) \in W$ векторное пространство $l_\lambda(f,\ x)$ содержит подпространство, являющееся элементом множества V.

Обозначим через S_v множество векторных полей класса C^1 на V^n, наделенное C^1-топологией.

Т е о р е м а 2. *В пространстве* $S_v \times V^n$ *имеется всюду плотное множество* C_v *типа* G_δ *такое, что при всяком* $\lambda \in \mathbf{R}$ *отображение*

$$(F,\ x) \to l_\lambda(F,\ x) \underset{\text{def}}{=} \left\{ \mathfrak{x} \in T_x V^n : \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |df^t \mathfrak{x}| < \lambda \right\}, \tag{3}$$

где f^t *— действие группы* $\mathbf{R}$ *на* V^n, *индуцированное векторным полем* F *полунепрерывно снизу во всякой точке множества* C_v.

П о я с н е н и е. В формулах (2), (3) знак $|\cdot||\cdot|$ означает норму вектора в касательном пространстве $T_x V^n$ многообразия V^n, индуцированную римановой метрикой на V^n; эта норма зависит, конечно, от выбора римановой метрики, однако показатель Ляпунова $\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |df^t \mathfrak{x}|$ ($t = m \in \mathbf{N}$ в теореме 1 и $t \in \mathbf{R}^+$ в теореме 2) решения уравнения в вариациях, начинающегося в точке $\mathfrak{x} \in T_x V^n$, не зависит от выбора римановой метрики на V^n, поскольку дифференцируемое многообразие V^n по условию замкнуто, т. е. компактно. Ниже в основном тексте статьи основное внимание уделено полным римановым многообразиям, совсем не обязательно компактным. Соответствующие результаты не являются, вообще говоря, дифференциально-топологически инвариантными и формулируются несколько сложнее.

§ 1

1. Пусть (E, p, B) — метризованное векторное расслоение со слоем R^n (база B — полное метрическое пространство, расстояние в котором обозначается через $d_B(\cdot, \cdot)$). Риманову метрику на (E, p, B) обозначаем через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2. Пусть G есть группа R или группа Z и пусть $\mathfrak{H} = \mathrm{Hom}\,(\mathrm{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$, где через $\mathrm{Hom}\,(\mathrm{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ обозначается множество гомоморфизмов группы G в группу автоморфизмов векторного расслоения (E, p, B), обозначаемую через $\mathrm{Aut}\,(E, p, B)$. Напомним, что образом $\mathfrak{H}t$ точки $t \in G$ при гомоморфизме $\mathfrak{H}$ является пара (X^t, χ^t), где X^t — гомеоморфизм E на E, χ^t — гомеоморфизм B на B, причем:

а) $pX^t = \chi^t p$ при всяком $t \in G$,

б) при всяких $b \in B$, $t \in G$ сужение $X^t[b]$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения X^t есть линейное отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(\chi^t b)$,

в) $X^{t+s} = X^t X^s$, $\chi^{t+s} = \chi^t \chi^s$ при всяких $t \in G$, $s \in G$.

Вместо X^1 будем писать X, вместо $\chi^1 - \chi$. Потребуем от гомоморфизма $\mathfrak{H}$, чтобы для некоторой функции $a(\cdot): B \to R^+$, удовлетворяющей при всяких $b \in B$, $t \in G$ равенству

$$a(\chi^t b) = a(b), \tag{1}$$

при всяких $b \in B$, $t \in G$ выполнялось неравенство

$$\|X^t[b]\| \leq \exp(|t|\, a(b)). \tag{2}$$

3. Для всякого $\theta \in G$ определим гомоморфизм

$$\mathfrak{H}_\theta = \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Z}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$$

формулой

$$\mathfrak{H}_\theta s = \mathfrak{H}(s\theta) = (X^{s\theta}, \chi^{s\theta})\ (s \in G). \tag{3}$$

Так как по условию при всяком $t \in G$ выполнено неравенство

$$\|X^t[b]\| \leq \exp(|t|\, a(b))$$

то при всяком $s \in G$ выполнено неравенство

$$\|X^{s\theta}[b]\| \leq \exp(|s||\theta|\, a(b)).$$

т. е. гомоморфизм $\mathfrak{H}_\theta$ удовлетворяет условию п. 2 (см. фразу, содержащую формулы (1), (2)) с функцией $a_\theta(\cdot): B \to R^+$ (вместо $a(\cdot): B \to R^+$), определенной формулой

$$a_\theta(b) = |\theta|\, a(b)\ (b \in B)$$

4. *Показатель Ляпунова* $\lambda_k(\mathfrak{H}, b)$ гомоморфизма $\mathfrak{H} = \mathrm{Hom}\,(\mathrm{G}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ определяется при всяких $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ формулой

$$\lambda_k(\mathfrak{H}, b) = \inf_{R^{n-k-1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln \left\| X^t_{R^{n-k+1}} \right\| \tag{4}$$

здесь $G_i(p^{-1}(b))$ — грассманово многообразие i-мерных векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$, через R^i_* обозначается множество всех ненулевых векторов векторного пространства R^i, в выражении $t \to +\infty$ имеется в виду, что $t \in G$ (напомним, что $\mathrm{G} = \mathrm{R}$ либо $\mathrm{G} = \mathrm{Z}$), $\|X^t_{R^i}\|$ — норма линейного отображения $X^t_{R^i}$, являющегося по определению сужением отображения X^t на подпространство $R^i \in G_i(p^{-1}(b))$; норма линейного оператора определяется стандартным образом через нормы в слоях, индуцированные римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

§ 2

Введем обозначение[1]

$$\lambda(\mathfrak{H},\xi) \underset{\text{def}}{=} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right| \tag{1}$$

для всякого $\xi \in E$; при этом полагаем по определению $\ln 0 = -\infty$. Последнее соглашение влечет равенство

$$\max_{\xi\in R^q_*} \lambda\left(\mathfrak{H},\xi\right) = \max_{\xi\in R^q} \lambda\left(\mathfrak{H},\xi\right)$$

для всяких $q \in \{1,...,n\}$, $R^q \in G_q(p^{-1}(b))$.

Лемма 1. *Для всяких* $b \in B$, $q \in \{1,...,n\}$, $R^q \in G_q(p^{-1}(b))$ *имеет место равенство*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\left\|X^t_{R^q}\right\| = \max_{\xi\in R^q_*} \lambda(\mathfrak{H},\xi). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть даны $b \in B$, $q \in \{1,...,n\}$, $R^q \in G_q(p^{-1}(b))$.

1. Для всяких[2] $t \in G^+_*$, $\xi \in R^q$ имеем

$$\left|X^t\xi\right| \le \left\|X^t_{R^q}\right\|\left|\xi\right|,$$

откуда

$$\lambda(\mathfrak{H},\xi) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi\right| \le \varlimsup_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}\ln\left\|X^t_{R^q}\right\| + \frac{1}{t}\ln\left|\xi\right|\right) - \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\left\|X^t_{R^q}\right\|.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\sup_{\xi\in R^q} \lambda(\mathfrak{H},\xi) \le \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\left\|X^t_{R^q}\right\|. \tag{3}$$

2. Векторное подпространство R^q наделено евклидовой структурой, поскольку на векторном расслоении (E,p,B) задана риманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Возьмем какой-нибудь ортонормированный базис $\{\xi_1,...,\xi_q\}$ евклидова пространства R^q. Разложив произвольный вектор $\xi \in R^q$ по этому базису, получим при всяком $t \in G$:

$$\left|X^t\xi\right| = \left|X^t\left(\sum_{j=1}^q \left\langle \xi,\xi_j\right\rangle \xi_j\right)\right| \le \left|\sum_{j=1}^q \left\langle \xi,\xi_j\right\rangle X^t\xi_j\right| \le \sum_{j=1}^q \left|\left\langle \xi,\xi_j\right\rangle\right|\left|X^t\xi_j\right| \le \left|\xi\right|\sum_{j=1}^q\left|X^t\xi_j\right|$$

(при выводе последнего неравенства этой цепочки использовано неравенство $\left|\left\langle \xi,\xi_j\right\rangle\right| \le \left|\xi\right|$). Отсюда при всяком $t \in G$ следует неравенство

$$\left\|X^t_{R^q}\right\| \le \sum_{j=1}^q \left|X^t\xi_j\right|.$$

Имеем

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\left\|X^t_{R^q}\right\| \le \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\sum_{j=1}^q\left|X^t\xi_j\right| \le \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln(q\cdot \max_{j\in\{1,...,q\}}\left|X^t\xi_j\right|) =$$

$$= \varlimsup_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}\ln q + \frac{1}{t}\ln \max_{j\in\{1,...,q\}}\left|X^t\xi_j\right|\right) - \varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln \max_{j\in\{1,...,q\}}\left|X^t\xi_j\right| =$$

$$= \varlimsup_{t\to+\infty} \max_{j\in\{1,...,q\}} \frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi_j\right| = \max_{j\in\{1,...,q\}} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\left|X^t\xi_j\right| = \max_{j\in\{1,...,q\}} \lambda\left(\mathfrak{H},\xi_j\right). \tag{4}$$

Предпоследнее равенство — из формулы

---

[1] $\left|\eta\right| = \left\langle \eta,\eta\right\rangle^{1/2}$

[2] $G^+ = \{t \in G : t \ge 0\}$ $G^+_* = G^+ \setminus \{0\}$.

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \max_{j\in\{1,\ldots,r\}} a_j(t) = \max_{j\in\{1,\ldots,r\}} \overline{\lim_{t\to+\infty}} a_j(t),$$

верной для всяких функций $a_j(\cdot): R \to R$ ($j \in \{1, \ldots, r\}$), где r — произвольное натуральное число.

Из формул (3), (4) следует цепочка неравенств

$$\sup_{\xi\in R^q} \lambda(\mathfrak{H}, \xi) \le \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \left\| X^t_{R^q} \right\| \le \max_{j\in\{1,\ldots,q\}} \lambda(\mathfrak{H}, \xi_j) \le \sup_{\xi\in R^q} \lambda(\mathfrak{H}, \xi),$$

из которой следует, во-первых, что $\sup\limits_{\xi\in R^q} \lambda(\mathfrak{H}, \xi)$ достигается, т. е.. $\sup\limits_{\xi\in R^q} \lambda(\mathfrak{H}, \xi) = \max\limits_{\xi\in R^q} \lambda(\mathfrak{H}, \xi)$, а во-вторых, что имеет место равенство

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \left\| X^t_{R^q} \right\| = \max_{\xi\in R^q} \lambda(\mathfrak{H}, \xi),$$

эквивалентное равенству (2), поскольку $\lambda(\mathfrak{H}, 0) = -\infty$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для всяких* $k \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in B$ *имеет место формула*

$$\lambda_k(\mathfrak{H}, b) = \inf_{R^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{\xi\in R_*^{n-k+1}} \lambda(\mathfrak{H}, \xi), \tag{5}$$

Доказательство. Пусть даны $k \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in B$. В силу леммы 1 для всякого $R^{n-k+1} \in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \left\| X^t_{R^{n-k+1}} \right\| = \max_{\xi\in R_*^{n-k+1}} \lambda(\mathfrak{H}, \xi).$$

Отсюда следует равенство

$$\inf_{R^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \left\| X^t_{R^{n-k+1}} \right\| = \inf_{R^{n-k+1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \max_{\xi\in R_*^{n-k+1}} \lambda(\mathfrak{H}, \xi),$$

левая часть которого в силу формулы (4) § 1 равна $\lambda_k(\mathfrak{H}, b)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для всяких* $b \in B$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *имеет место равенство*

$$\lambda_k(\mathfrak{H}, b) = \lambda_k(\mathfrak{H}_1, b). \tag{6}$$

Доказательство. Прежде чем доказывать эту лемму, напомним, что гомоморфизм $\mathfrak{H}_1 = \mathrm{Hom}\,(\mathrm{Z}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ определен в п. 3 § 1; из данного там определения следует, что формулу (6) можно интерпретировать как утверждение о том, что $\lambda_k(\mathfrak{H}, b)$ не изменится, если в формуле (4) § 1 величина *t,* стремясь к $+\infty$, пробегает не все значения $\in G^+$, а только значения $\in N$ (если $\mathrm{G} = \mathrm{Z}$, то это — всего лишь тавтология, но при $\mathrm{G} = \mathrm{R}$ — содержательное утверждение).

Перейдем собственно к доказательству леммы. Из леммы 2 в силу формулы (1) следует, что показатель $\lambda_k(\mathfrak{H}, b)$, определенный формулой (4) § 1, совпадает (при всяких $k \in \{1, \ldots, n\}$, с $b \in B$) показателем $\lambda_k(\mathfrak{H}, b)$ определенным в [2] (см. в цитируемой статье определение 1, а также замечание на с. 2140). Поэтому к показателям $\lambda_k(\mathfrak{H}, b)$, определенным формулой (4) § 1, применима лемма 3 из [2], из которой следует, что для всяких $k \in \{1, \ldots, n\}$, $b \in B$ имеет место равенство (6). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для всякого* $\xi \in E$ *имеет место равенство*

$$\lambda(\mathfrak{H}, \xi) = \lambda(\mathfrak{H}_1, \xi). \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку при всяком $\xi \in E$ таком, что $|\xi| \ne 0$, показатель $\lambda(\mathfrak{H}, \xi)$, определенный формулой (1), совпадает с показателем $\lambda(\mathfrak{H}, \xi)$, определенным в [2] (см. в [2] формулу (4) и замечание на с. 2140), то к показателям $\lambda(\mathfrak{H}, \xi)$, определенным формулой (1), применима лемма 3 из [2], из которой следует, что для всякого $\xi \in E$ такого, что $|\xi| \neq 0$, имеет место равенство (7). При $|\xi| = 0$ равенство (7) тоже верно, так как обе его части равны $-\infty$ вследствие принятого соглашения $\ln 0 = -\infty$.

Лемма 5. *Для всяких* $b \in B$, $q \in \{1, ..., n\}$, $R^q \in G_q(p^{-1}(b))$ *имеет место равенство*

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \left\| X^t_{R^q} \right\| = \overline{\lim_{\substack{t\to+\infty \\ (t\in N)}}} \frac{1}{t} \ln \left\| X^t_{R^q} \right\|. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть даны $b \in B$, $q \in \{1, ..., n\}$, $R^q \in G_q(p^{-1}(b))$. В силу леммы 1 левая часть доказываемого равенства (8) равна $\max\limits_{\xi \in R^q_*} \lambda(\mathfrak{H}, \xi)$. В силу той же леммы 1, но примененной к гомоморфизму $\mathfrak{H}_1$ вместо $\mathfrak{H}$, правая часть доказываемого равенства (8) равна $\max\limits_{\xi \in R^q_*} \lambda(\mathfrak{H}_1, \xi)$. Применением леммы 4 заканчивается доказательство леммы 5.

§ 3

Для всякого $b \in B$ обозначим через $\widetilde{E}_b$ множество всех векторных подпространств слоя $p^{-1}(b)$ векторного расслоения $\mathrm{G} = \mathrm{Z}$. Через обо $\widetilde{E}$ значим объединение всех этих множеств

$$\widetilde{E} = \bigcup_{b\in B} \widetilde{E}_b .$$

Пусть даны точка $\hat{b} \in B$ и векторное подпространство $\widehat{R}^k$ слоя $p^{-1}(\hat{b})$ векторного расслоения (E, p, B). Если, $k > 0$ то всякому базису $\{\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_k\}$ векторного пространства $\widehat{R}^n$ и всякому набору окрестностей $U(\widehat{\xi}_i)$ точек $\widehat{\xi}_i$ $(i \in \{1, ..., k\})$ (в пространстве *E)* поставим в соответствие множество всех тех *k*-мерных подпространств R^k слоев векторного расслоения (E, p, B), для которых при $R^k \bigcap U(\hat{\xi}_i) \neq \varnothing$ всяком $i \in \{1, ..., k\}$. Если $k = 0$, то всякой окрестности $U(0_{\hat{b}})$ нуля $0_{\hat{b}}$ слоя $p^{-1}(\hat{b})$ поставим в соответствие множество нульмерных подпространств $\{0_b\}$ слоев $p^{-1}(b)$, где $b \in pU(0_{\hat{b}})$.

Объявив сопоставленную таким образом всякой точке R^k множества $\widetilde{E}$ совокупность содержащих эту точку подмножеств множества $\widetilde{E}$ базисом окрестностей этой точки, мы наделяем $\widetilde{E}$ структурой топологического пространства. Далее через $\widetilde{E}$ обозначаем это топологическое пространство.

Определим отображение $\widetilde{p} : \widetilde{E} \to B$, положив для всякого $b \in B$, для всякого $R^k \in \widetilde{E}_b$ по определению $\widetilde{p}R^k = b$.

Непосредственно из определений вытекает, что так определенное расслоение $\left(\widetilde{E}, \widetilde{p}, B\right)$ является локально тривиальным расслоением со слоем $\bigcup\limits_{k=0}^{n} G_k(R^n)$ (дизъюнктным объединением грассмановых многообразий). Дизъюнктное объединение $\bigcup\limits_{k=0}^{n} G_k(R^n)$ грассмановых многообразий естественно наделяется структурой левого $\mathrm{GL(n, R)}$- пространства: если $k \in \{1, ..., n\}$, $R^k \in G_k(R^n)$, $\varphi \in \mathrm{GL(n, R)}$, то φR^k есть по определению образ множества R^k при отображении φ. Непосредственно из определений вытекает, что локально тривиальное расслоение $\left(\widetilde{E}, \widetilde{p}, B\right)$ есть расслоенное пространство со слоем $\bigcup\limits_{k=0}^{n} G_k(R^n)$, ассоциированное с тем же локально тривиальным главным $\mathrm{GL}(\mathrm{n},\mathrm{R})$ - расслоением, с которым ассоциировано векторное расслоение (E, p, B) (см. [1, с. 69, 72—73 97—98]).

Для всякого множества $A \subset \widetilde{E}$ положим

$$\mathrm{St}\, A = \left\{ R^m \in E : (\exists R^k \in A : R^k \subset R^m) \right\}.$$

Пусть T — топологическое пространство. Отображение $\psi : T \to \widetilde{E}$ называется полунепрерывным снизу в точке $x \in T$, если для всякой окрестности V точки $\psi(x)$ множество $\psi^{-1}(\mathrm{St} V)$ есть окрестность точки x.

При всяких $\lambda \in R$, $b \in B$ рассмотрим множество

$$E(\mathfrak{H}, \lambda, b) = \left\{ \xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H}, \xi) < \lambda \right\}, \tag{1}$$

где

$$\lambda(\mathfrak{H}, \xi) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln\left|X^t \xi\right| \tag{2}$$

(полагаем $\ln 0 = -\infty$). Из предложений 2, 3 из [2] (см. также замечание об обозначениях на с. 2140 в [2]) следует, что при всяких $\lambda \in R$, $b \in B$ так определенное множество $E(\mathfrak{H}, \lambda, b)$ есть векторное подпространство слоя $p^{-1}(b)$ и, следовательно, $E(\mathfrak{H}, \lambda, b) \in \widetilde{E}$.

Таким образом, при всяком $\lambda \in R$ определено отображение $E(\mathfrak{H}, \lambda, \cdot) : B \to \widetilde{E}$ такое, что $\widetilde{p} E(\mathfrak{H}, \lambda, \cdot) = 1_B$.

Закончив на этом напоминание известных определений, сформулируем теорему.

Теорема. *В пространстве B имеется всюду плотное множество D типа* G_δ *такое, что при всяком* $\lambda \in R$ *отображение* $E(\mathfrak{H}, \lambda, \cdot) : B \to \widetilde{E}$ *полунепрерывно снизу во всякой точке множества D.*

Доказательству этой теоремы будет предпослан вспомогательный материал.

§ 4

Пусть заданы компактное топологическое пространство F и неотрицательное вещественное число *a*. Пусть $a_i(\cdot) : F \to [-a, a] \left(i \in N\right)$ — непрерывные функции.

Лемма 1. *При всяком* $m \in N$ *последовательность*

$$\left\{ \inf_{x\in F} \max_{i\in\{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x) \right\}_{q\in N} \tag{1}$$

— монотонно неубывающая, все ее точки принадлежат отрезку $[-a, a]$ *и для всякого* $q \in N$ *имеет место равенство*

$$\inf_{x\in F} \max_{i\in\{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x) = \min_{x\in F} \max_{i\in\{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x), \tag{2}$$

т. е. точная нижняя грань в формуле (1) *достигается.*

Доказательство. 1. Так как при всяких $m \in N$, $q \in N$, $x \in F$ имеет место неравенство

$$\max_{i\in\{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x) \le \max_{i\in\{0,\dots,q+1\}} a_{m+i}(x),$$

то при всяких $m \in N$, $q \in N$ выполнено неравенство

$$\inf_{x\in F} \max_{i\in\{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x) \le \inf_{x\in F} \max_{i\in\{0,\dots,q+1\}} a_{m+i}(x),$$

т. е. при всяком $m \in N$ последовательность (1)—монотонно неубывающая.

2. Так как при всяких $j \in N, x \in F$ имеет место включение $a_i(\cdot) \in [-a, a]$, то при всяких $m \in N$, $q \in N$, $x \in F$ имеем

$$\max_{i \in \{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x) \in [-a, a],$$

а следовательно, при всяких $m \in N$, $q \in N$ имеет место включение

$$\inf_{x \in F} \max_{i \in \{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x) \in [-a, a],$$

т. е. при всяком $m \in N$ все точки последовательности (1) принадлежат отрезку $[-a, a]$

3. Фиксируем произвольные $m \in N$, $q \in N$. Для всякого вещественного числа $r > \rho$, где

$$\rho = \inf_{x \in F} \max_{i \in \{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x), \tag{3}$$

множество

$$F^r \underset{\text{def}}{=} \{x \in F : \max_{i \in \{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x) \le r\} \tag{4}$$

непусто.

При всяком $r \in R$ имеет место равенство

$$F^r = \bigcap_{i \in \{0,\dots,q\}} F^r_{m+i}, \tag{5}$$

где множества F^r_j ($r \in R$, $j \in N$) определены формулой

$$F^r_j \underset{\text{def}}{=} \{x \in F : a_j(x) \le r\}.$$

Множества F^r_j ($r \in R$, $j \in N$) замкнуты, так как функции $a_i(\cdot) : F \to [-a, a] \left(i \in N\right)$ непрерывны. Следовательно (в силу формулы (5)), при всяком $r \in R$ множество F^r замкнуто, а так как пространство F компактно, то и множества $F^r \subset F$ ($r \in R$) компактны. Из формулы (4) следует, что для всяких $r \in R$, $s \in R$ таких, что $r \ge s$, имеет место включение $F^s \subset F^r$. Так как $F^s \ne \varnothing$ $(s>\rho)$, то отсюда следует, что

$$\bigcap_{r>\rho} F^r \ne \varnothing .$$

Из формулы (4) следует, что для всякого $x \in \bigcap_{r>\rho} F^r$ имеет место неравенство

$$\max_{i \in \{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x) \le \rho . \tag{6}$$

Отсюда в силу формулы (3) следует, что для всякого $x \in \bigcap_{r>\rho} F^r$ неравенство (6) в действительности является равенством, из которого в силу доказанной непустоты множества $\bigcap_{r>\rho} F^r$ следует формула (2). Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 в силу теоремы Вейерштрасса следует, что при всяком: $m \in N$ последовательность (1) имеет предел, причем этот предел принадлежит отрезку $[-a, a]$.

Лемма 2. *При всяком $m \in N$ имеют место равенства*

$$\lim_{q \to \infty} \inf_{x \in F} \max_{i \in \{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x) = \inf_{x \in F} \sup_{i \in Z^+} a_{m+i}(x) = \min_{x \in F} \sup_{i \in Z^+} a_{m+i}(x) . \tag{7}$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $m \in N$.

1. Так как при всяких $q \in N$, $x \in F$ имеет место неравенство

$$\max_{i \in \{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x) \le \sup_{i \in Z^+} a_{m+i}(x);$$

то при всяком $q \in N$ выполнено неравенство

$$\inf_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x) \le \inf_{x\in F}\sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x).$$

отсюда следует неравенство

$$\lim_{q\to\infty}\inf_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x) \le \inf_{x\in F}\sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x). \tag{8}$$

2. При всяком $q\in N$ при всяком $r>\rho_q$, где

$$\rho_q = \inf_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x), \tag{9}$$

множество

$$F^{r,q} \underset{\text{def}}{=} \{x\in F : \max_{i\in\{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x) \le r\} \tag{10}$$

непусто и компактно (последнее доказано в п. 3 доказательства леммы 1, где применены более краткие, чем здесь, обозначения (там опущен имеющийся здесь индекс *q)).*

Из формулы (10) следует, что для всяких $p\in N$, $q\in N$ таких, что $p\ge q$, и всяких $r\in R$, $s\in R$ таких, что $r\ge s$, имеет место включение

$$F^{s,p}\subset F^{r,q}.$$

Так как $F^{s,p}$ ($p\in N$, $s>\rho_p$) — непустые компактные множества, то отсюда следует:

$$F_\infty \underset{\text{def}}{=} \bigcap_{p\in N}\bigcap_{s>\rho_p} F^{s,p} \ne \varnothing, \tag{11}$$

где

$$\rho_\infty = \sup_{q\in N}\rho_q. \tag{12}$$

Из формул (10) — (12) следует, что для всяких $x\in F_\infty$, $q\in N$, $r>\rho_\infty$ имеет место неравенство

$$\max_{i\in\{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x) \le r.$$

Следовательно, для всякого $x\in F_\infty$ выполнено неравенство

$$\sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x) \le \rho_\infty. \tag{13}$$

В силу леммы 1 последовательность $\{\rho_q\}_{q\in N}$, определенная формулой (9),— монотонно неубывающая, и потому ρ_∞, определенное формулой (12), равно

$$\lim_{q\to\infty}\rho_q = \lim_{q\to\infty}\inf_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x).$$

Поэтому неравенство (13) можно переписать в виде

$$\sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x) \le \lim_{q\to\infty}\inf_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x). \tag{14}$$

Таким образом, доказано, что для некоторого $x\in F$ (таковым является всякий элемент множества F_∞) имеет место неравенство (14). Соединяя это с неравенством (8), получаем формулу (7). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Числовая последовательность*

$$\left\{\inf_{x\in F}\sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x)\right\}_{m\in N} \tag{15}$$

— монотонно не возрастающая и все ее точки принадлежат отрезку $[-a,a]$.

Доказательство. 1. Так как при всяких $m\in N$, $x\in F$ имеет место неравенство

$$\sup_{i\in Z^+} a_{m+1+i}(x) \le \sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x),$$

то при всяком $m\in N$ выполнено неравенство

$$\inf_{x\in F}\sup_{i\in Z^+} a_{m+1+i}(x) \le \inf_{x\in F}\sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x).$$

т. е. последовательность (15) —монотонно невозрастающая.

2. В силу леммы 2 последовательность (15) совпадает с последовательностью

$$\left\{\lim_{q\to\infty}\inf_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,q\}} a_{m+i}(x)\right\}_{m\in N},$$

все точки которой принадлежат отрезку $[-a, a]$ (см. абзац перед леммой 2). Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 в силу теоремы Вейерштрасса следует, что последовательность (15) имеет предел, принадлежащий отрезку $[-a, a]$.

Лемма 4. *Имеет место цепочка равенств*

$$\inf_{m\in N}\inf_{x\in F}\sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x) = \lim_{m\to\infty}\inf_{x\in F}\sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x) = \inf_{x\in F}\inf_{m\in N}\sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x). \quad (16)$$

Доказательство. В силу леммы 3 числовая последовательность

$$\left\{\inf_{x\in F}\sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x)\right\}_{m\in N}$$

монотонно невозрастает, поэтому ее предел равен точной нижней грани множества ее точек:

$$\lim_{m\to\infty}\inf_{x\in F}\sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x) = \inf_{m\in N}\inf_{x\in F}\sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x) = \inf_{x\in F}\inf_{m\in N}\sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x).$$

Лемма 4 доказана.

Воспользовавшись хорошо известным и легко доказываемым равенством (которое, впрочем, можно рассматривать и как определение верхнего предела)

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, a_m = \inf_{m\in N}\sup_{i\in Z^+} a_{m+i},$$

верным для всякой последовательности вещественных чисел $\{a_m\}_{m\in N}$, перепишем цепочку (16) в виде:

$$\inf_{m\in N}\inf_{x\in F}\sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x) = \lim_{m\to\infty}\inf_{x\in F}\sup_{i\in Z^+} a_{m+i}(x) = \inf_{x\in F}\overline{\lim_{m\to\infty}}\, a_m(x). \quad (17)$$

В силу лемм 1, 2 из формулы (17) следует

Предложение. *Пусть F — компактное топологическое пространство, $a\in R^+$ и пусть при всяком $t\in N$ задана непрерывная функция $a_i(\cdot): F\to[-a, a]$. Тогда имеют место равенства*

$$\inf_{x\in F}\overline{\lim_{m\to\infty}}\, a_m(x) = \lim_{m\to\infty}\lim_{s\to\infty}\min_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,s\}} a_{m+i}(x) = \inf_{m\in N}\lim_{s\to\infty}\inf_{x\in F}\max_{i\in\{0,\dots,s\}} a_{m+i}(x). \quad (18)$$

§ 5

Известно (см. [1, с. 25]), что при всяком $k\in\{1,\dots,n\}$ грассманово многообразие $G_k(R^n)$ компактно и имеет счетный базис, следовательно (см. [3, с. 45, предложение 16]), метризуемо. При всяком $k\in\{1,\dots,n\}$ зафиксируем расстояние $d_k(\cdot,\cdot)$ на $G_k(R^n)$, удовлетворяющее неравенству

$$\sup_{\substack{x\in G_k(R^n)\\ y\in G_k(R^n)}} d_k(x, y) < 1 \quad (1)$$

(последнего всегда можно добиться, разделив любое расстояние

$$\rho(\cdot,\ \cdot): G_k(R^n)\times G_k(R^n)\to R^+$$

на его удвоенную точную верхнюю грань, которая конечна, так как пространство $G_k(R^n)\times G_k(R^n)$ компактно, а функция $\rho(\cdot,\ \cdot): G_k(R^n)\times G_k(R^n)\to R^+$ непрерывна).

При всяких $k\in\{1,\dots,n\}$, $m\in N$ из покрытия метрического пространства $\left(G_k(R^n), d_k\right)$ открытыми шарами радиуса $\frac{1}{m}$ выберем конечное покрытие; обозначим через $F^1_{k,m},...,F^{s(k,m)}_{k,m}$ замкнутые шары радиуса $\dfrac{1}{m}$, центры которых совпадают с центрами выбранных открытых шаров. Из формулы (1) следует, что $s(k,1)$ можно считать равным 1, что мы и будем делать. Фиксируем счетный атлас

$$\left\{U_i, h_i : U_i \times R^n \to p^{-1}(U_i)\right\}_{i\in N} \tag{2}$$

векторного расслоения (E, p, B) (метрическое пространство B паракомпактно (см. [3, глава IX, § 4, п. 5]), а всякое векторное расслоение над паракомпактной базой имеет счетный атлас: см. [1, предложение п. 5.4 главы 3], где это доказано в несколько иных терминах, и там же пп. 2.1,. 2.3 главы 5, где дано определение атласов, с помощью которого предложение п. 5.4 главы 3 формулируется в приведенном здесь виде). По атласу (2) построим счетный атлас

$$\left\{U_i, \tilde{h}_i : U_i \times \bigcup_{q=0}^{n} G_q(R^n) \to \widetilde{p}^{-1}(U_i)\right\}_{i\in N} \tag{3}$$

расслоения $\left(\widetilde{E}, \widetilde{p}, B\right)$, определенного в § 3, положив по определению

$$\tilde{h}_i(b, R^q) = h_i(\{b\}\times R^q) = \{h_i(b, \mathfrak{x})\}_{\mathfrak{x}\in R^q} \tag{4}$$

для всяких $i\in N$, $b\in U_i$, $q\in\{1,...,n\}$, $R^q\in G_q(R^n)$.

Для всяких $k\in\{1,...,n\}$, $i\in N$, $F\subset G_{n-k+1}(R^n)$ рассмотрим функцию

$$\lambda_{k,i}(\mathfrak{H}, F, \cdot) : U \to R,$$

определенную формулой

$$\lambda_{k,i}(\mathfrak{H}, F, \cdot) = \inf_{R^{n-k+1}\in F} \overline{\lim_{\substack{t\to+\infty\\(t\in N)}}} \frac{1}{t}\ln\left\|X^t_{\tilde{h}_i(\cdot,\, R^{n-k+1})}\right\|. \tag{5}$$

Из формул (4), (2) и взятой при $F = G_{n-k+1}(R^n)$ формулы

$$h_i(\{b\}\times F) = \left\{\tilde{h}_i(b, R^{n-k+1})\right\}_{R^{n-k+1}\in F}, \tag{6}$$

верной для всяких $F\subset G_{n-k+1}(R^n)$, $i\in N$, $b\in U_i$, следует равенство

$$h_i(\{b\}\times G_{n-k+1}(R^n)) = G_{n-k+1}(p^{-1}(b)).$$

Из этого равенства следует, что для всяких $k\in\{1,...,n\}$, $i\in N$, $b\in U_i$ имеет место формула

$$\lambda_{k,i}(\mathfrak{H}, G_{n-k+1}(R^n), b) = \inf_{R^{n-k-1}\in G_{n-k+1}(p^{-1}(b))} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\ln\left\|X^t_{R^{n-k+1}}\right\| = \lambda_k(\mathfrak{H}_1, b) = \lambda_k(\mathfrak{H}, b) \tag{7}$$

последнее равенство — следствие леммы 3 из § 2, предпоследнее равенство имеет место в силу формулы (4) из § 1, примененной к $\mathfrak{H}_1$ вместо $\mathfrak{H}$. Из формулы (7) следует, что для всяких $k\in\{1,...,n\}$, $i\in N$ имеем

$$\lambda_{k,i}(\mathfrak{H}, G_{n-k+1}(R^n), \cdot) = \lambda_k(\mathfrak{H}, \cdot)\big|_{U_i}, \tag{8}$$

т. е. функция $\lambda_{k,i}(\mathfrak{H}, G_{n-k+1}(R^n), \cdot) : U_i \to R$ является сужением функции $\lambda_k(\mathfrak{H}, \cdot) : B\to R$ на множество U_i.

Лемма 1. *Для всяких* $q\in\{1,...,n\}$, $i\in N$, $t\in N$ *формула*

$$a^{(q)}_{i,t}(\mathfrak{H}; b, R^q) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{t}\ln\left\|X^t_{\tilde{h}_i(b, R^q)}\right\|, \tag{9}$$

где $b\in U_i$, $R^q\in G_q(R^n)$, *определяет непрерывное отображение*

$$a^{(q)}_{i,t}(\mathfrak{H}; \cdot, \cdot) : U_i \times G_q(R^n) \to R,$$

удовлетворяющее при всяких $b \in U_i$, $R^q \in G_q(R^n)$ *неравенству*

$$a_{i,t}^{(q)}(\mathfrak{H}; b, R^q) \le a(b). \tag{10}$$

Доказательство. 1. При всяком $q \in \{1, ..., n\}$ определим топологическое пространство $\mathscr{E}^{(q)}$ как подпространство произведения $\widetilde{E} \times E$, состоящее из пар (R^q, ξ) таких, что $R^q \in \widetilde{E}$ (R^q — q-мерное векторное подпространство какого-то слоя векторного расслоения (E, p, B)), $\xi \in R^q$, $|\xi| = 1$; проекция $\pi^{(q)}$ определяется формулой $\pi^{(q)} = pr_1|_{\mathscr{E}^{(q)}}$, т.е. $\pi^{(q)}$ есть сужение на $\mathscr{E}^{(q)}$ проекции pr_1 произведения $\widetilde{E} \times E$ на $\widetilde{E}$ (первый сомножитель). В качестве базы $\mathscr{B}^{(q)}$ берется подпространство $E^{(q)} \underset{\text{def}}{=} pr_1 \mathscr{E}^{(q)}$ пространства $\widetilde{E}$. Непосредственно из определений вытекает, что так определенная тройка ($\mathscr{E}^{(q)}$, $\pi^{(q)}$, $\mathscr{B}^{(q)}$) является локально тривиальным расслоением со слоем S^{q-1}—поверхность шара в q-мерном евклидовом пространстве. При всяких $q \in \{1, ..., n\}$, $t \in G$ формула

$$f_t^{(q)}(R^q, \xi) \underset{\text{def}}{=} |X^t \xi|$$

определяет функцию[3] $f_i^{(q)} : \mathscr{E}^{(q)} \to R_*^+$, которая непрерывна, так как отображение $X^t : E \to E$ при всяком $t \in G$ непрерывно и норма $|\cdot|$, индуцированная римановой метрикой векторного расслоения (E, p, B), непрерывна. Поэтому в силу известного предложения (воспроизведенного в [4] в виде предложения 2 из § 5) при всяких $q \in \{1, ..., n\}$, $t \in G$ функция $\varphi_t^{(q)} : E^{(q)} \to R_*^+$, определенная формулой

$$\varphi_t^{(q)} R^{(q)} - \left\| X_{R^q}^t \right\| = \sup_{\substack{\xi \in R^q \\ |\xi| = 1}} |X^t \xi| = \sup_{\substack{\xi \in R^q \\ |\xi| = 1}} f_t^{(q)}(R^q, \xi),$$

непрерывна.

2. Для всяких $q \in \{1, ..., n\}$, $i \in N$, $t \in N$ отображение $a_{i,t}^{(q)}(\mathfrak{H}; \cdot, \cdot) : U_i \times G_q(R^n) \to R$, определенное формулой (9), является суперпозицией непрерывных отображений

$$\frac{1}{t}\ln : R_*^+ \to R, \ \varphi_t^{(q)} : E^{(q)} \to R_*^+, \ \tilde{h}_i\Big|_{U_i \times G_q(R^n)} : U_i \times G_q(R^n) \to \tilde{p}^{-1}(U_i)$$

(образ последнего отображения — множество q-мерных подпространств слоев $p^{-1}(b)$, где $b \in U_i$). Следовательно, для всяких $q \in \{1, ..., n\}$, $i \in N$, $t \in N$ отображение $a_{i,t}^{(q)}(\mathfrak{H}; \cdot, \cdot) : U_i \times G_q(R^n) \to R$, определенное формулой (9), непрерывно.

3. Пусть даны $q \in \{1, ..., n\}$, $i \in N$, $t \in N$. Для всяких $b \in U_i$, $R^q \in G_q(R^n)$ имеем

$$\left\| X_{\tilde{h}_i(b,R^q)}^t \right\| \le \left\| X_{p^{-1}(b)}^t \right\| = \left\| X^t[b] \right\| \le \exp(ta(b))$$

(см. п. 2, § 1), откуда в силу формулы (9) следует неравенство

$$a_{i,t}^{(q)}(\mathfrak{H}; b, R^q) \le a(b). \tag{11}$$

Для всяких $b \in U_i$, $R^q \in G_q(R^n)$ имеем также

$$\left\| X_{\tilde{h}_i(b,R^q)}^t \right\| \ge \left\| \left(X_{\tilde{h}_i(b,R^q)}^t \right)^{-1} \right\|^{-1} = \left\| X_{X^t \tilde{h}_i(b,R^q)}^{-t} \right\|^{-1} \ge \left\| X_{X^t p^{-1}(b)}^{-t} \right\|^{-1} =$$

$$= \left\| X^{-t}[\chi^t b] \right\|^{-1} \ge (\exp(ta(\chi^t b)))^{-1} = \exp(-ta(b))$$

(см. п. 2, § 1), откуда в силу формулы (9) следует неравенство

[3] Напомним, что при всяких $r \in G$, $b \in B$ сужение $X^r[b]$ отображения X^r на слой $p^{-1}(b)$ невырождено. Это следует из условий б), в) п. 2 § **1**.

$$a_{i,t}^{(q)}(\mathfrak{H}; b, R^q) \geq -a(b)$$

Соединяя это неравенство с неравенством (11), получаем неравенство (10). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для всяких* $q \in \{1, ..., n\}$, $i \in N$ *для всякого замкнутого множества* $F \subset G_q(R^n)$ *функции* $a_{i,t}^{(q)}(\mathfrak{H}; \cdot, \cdot): U_i \times G_q(R^n) \to R$ $(i \in N)$, *определенные формулой* (9), *удовлетворяют равенству*

$$\inf_{R^q \in F} \overline{\lim_{t \to +\infty}} a_{i,t}^{(q)}(\mathfrak{H}; b, R^q) = \lim_{m \to \infty} \lim_{s \to \infty} \min_{R^q \in F} \max_{j \in \{0,...,s\}} a_{i,m+j}^{(q)}(\mathfrak{H}; b, R^q) \qquad (12)$$

при всяком $b \in U_i$, *причем это равенство останется верным, если* $\lim\limits_{m \to \infty}$ *заменить на* $\inf\limits_{m \in N}$.

Доказательство. Пусть даны $q \in \{1, ..., n\}$, $i \in N$ и замкнутое множество $F \subset G_q(R^n)$. Так как грассманово многообразие $G_q(R^n)$ компактно, то F компактно; следовательно, $\{b\} \times F$ компактно при всяком $b \in U_i$. Вследствие леммы 1 при всяких $t \in N$, $b \in U_i$ сужение $a_{i,t}^{(q)}(\mathfrak{H}; \cdot, \cdot)\big|_{\{b\} \times F}$ функции $a_{i,t}^{(q)}(\mathfrak{H}; \cdot, \cdot): U_i \times G_q(R^n) \to R$, определенной формулой (9), на множество $\{b\} \times F$ есть непрерывная функция $\{b\} \times F \to [-a(b), a(b)]$. В силу предложения § 4 (роль компакта F из этого предложения играет сейчас компакт $\{b\} \times F$, роль функций $a_t(\cdot): F \to [-a, a]$ ($t \in N$) — функции

$$a_{i,t}^{(q)}(\mathfrak{H}; \cdot, \cdot)\big|_{\{b\} \times F} : \{b\} \times F \to [-a(b), a(b)]$$

имеем

$$\inf_{(b,R^q) \in \{b\} \times F} \overline{\lim_{t \to +\infty}} a_{i,t}^{(q)}(\mathfrak{H}; b, R^q) = \lim_{m \to \infty} \lim_{s \to \infty} \min_{(b,R^q) \in \{b\} \times F} \max_{j \in \{0,...,s\}} a_{i,m+j}^{(q)}(\mathfrak{H}; b, R^q) \qquad (13)$$

при всяком $b \in U_i$, причем равенство останется верным, если $\lim\limits_{m \to \infty}$ заменить на $\inf\limits_{m \in N}$. Равенство (13) эквивалентно равенству (12). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для всяких* $q \in \{1, ..., n\}$, $i \in N$, $m \in N$, $s \in N$ *и всякого замкнутого множества* $F \subset G_q(R^n)$ *функция*

$$\mu_{q,i}^{(m,s)}(F, \cdot) \underset{\text{def}}{=} \min_{R^q \in F} \max_{j \in \{0,...,s\}} a_{i,m+j}^{(q)}(\mathfrak{H}; \cdot, R^q): U_i \to R$$

непрерывна.

Доказательство. 1. Максимум конечного числа непрерывных функций — непрерывная функция — это утверждение хорошо известно; впрочем, в [4] приведено его доказательство — см. в цитируемой статье п. 2 доказательства теоремы 1 в § 7. Поэтому в силу леммы 1 функция

$$\nu_{q,i}^{(m,s)}(F, \cdot) \underset{\text{def}}{=} \max_{j \in \{0,...,s\}} a_{i,m+j}^{(q)}(\mathfrak{H}; \cdot, \cdot): U_i \times G_q(R^n) \to R$$

непрерывна (для всяких $q \in \{1, ..., n\}$, $i \in N$, $m \in N$, $s \in N$.

2. Пусть даны $i \in N$, $q \in \{1, ..., n\}$, $m \in N$, $s \in N$ и дано замкнутое множество $F \subset G_q(R^n)$. Применим к функции $-\nu_{q,i}^{(m,s)}(\cdot, \cdot)\big|_{U_i \times F}: U_i \times F \to R$ предложение 2, § 5 из [4]; напомним, что цитируемое предложение достаточно хорошо известно; оно состоит в том, что максимум по слою от непрерывной функции, заданной на пространстве локально тривиального расслоения с компактным слоем, есть непрерывная функция от точки базы. Роль фигурирующего в цитируемом предложении локально тривиального расслоения ($\mathscr{E}$, π, $\mathscr{B}$) играет здесь тривиальное расслоение $U_i \times F$ с компактным слоем F. В силу цитируемого предложения функция

$$-\mu_{q,i}^{(m,s)}(F,\cdot)=\max_{R^q\in F}(-\nu_{q,i}^{(m,s)}(\cdot,R^q)):U_i\to R$$

непрерывна, а следовательно, непрерывна и функция $\mu_{q,i}^{(m,s)}(F,\cdot):U_i\to R$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для всяких* $q\in\{1,...,n\}$, $i\in N$, $m\in N$ *для всякого замкнутого множества* $F\subset G_q(R^n)$ *функция*

$$\mu_{q,i}^{(m,s)}(F,\cdot)\underset{\text{def}}{=}\lim_{s\to\infty}\mu_{q,i}^{(m,s)}(F,\cdot)=\lim_{s\to\infty}\min_{R^q\in F}\max_{j\in\{0,...,s\}}a_{i,m+j}^{(q)}(\mathfrak{H};\cdot,R^q):U_i\to R \qquad (14)$$

принадлежит первому классу Бэра.

Доказательство. Пусть даны $i\in N$, $q\in\{1,...,n\}$, $m\in N$ и дано замкнутое множество $F\subset G_q(R^n)$. Поясним, что предел $\lim_{s\to\infty}\mu_{q,i}^{(m,s)}(F,\cdot)$ существует (см. лемму 2).

Согласно определению классов Бэра (см. [5], [6, § 39]), функция $\mu_{q,i}^{(m,s)}(F,\cdot)$ принадлежит первому классу Бэра, так как является пределом последовательности непрерывных (в силу леммы 3) функций $\mu_{q,i}^{(m,s)}(F,\cdot):U_i\to R$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для всяких* $q\in\{1,...,n\}$, $i\in N$, $m\in N$ *для всякого замкнутого множества* $F\subset G_q(R^n)$ *множество точек непрерывности функции*

$$\mu_{q,i}^{(m,s)}(F,\cdot)\underset{\text{def}}{=}\lim_{s\to\infty}\min_{R^q\in F}\max_{j\in\{0,...,s\}}a_{i,m+j}^{(q)}(\mathfrak{H};\cdot,R^q):U_i\to R$$

есть множество типа G_δ*, всюду плотное в* U_i.

Доказательство. Утверждение леммы 5 следует из теоремы Бэра (см. [6, с. 240—242, 162—164]) в силу леммы 4, так как $U_i\,(i\in N)$— открытые множества в полном метрическом пространстве *в.* Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для всяких* $q\in\{1,...,n\}$, $i\in N$ *для всякого замкнутогомножества* $F\subset G_q(R^n)$ *в открытом множестве* U_i *имеется всюду плотное подмножество* $D_i^q(F)$ *типа* G_δ *такое, что функция*

$$\mu_{q,i}(F,\cdot)\underset{\text{def}}{=}\lim_{s\to\infty}\mu_{q,i}^{(m)}(F,\cdot)=\lim_{m\to\infty}\lim_{s\to\infty}\min_{R^q\in F}\max_{j\in\{0,...,s\}}a_{i,m+j}^{(q)}(\mathfrak{H};\cdot,R^q):U_i\to R \qquad (15)$$

полунепрерывна сверху во всякой точке $b\in D_i^q(F)$.

Доказательство. Пусть даны $q\in\{1,...,n\}$, $i\in N$ и дано замкнутое множество $F\subset G_q(R^n)$. Предел $\lim_{m\to\infty}$ в формуле (15) существует в силу леммы 2. В силу леммы 5 для всякого, $m\in N$ множество $D_i^{q,m}(F)$ точек непрерывности функции $\mu_{q,i}^{(m)}(F,\cdot):U_i\to R$ есть множество типа G_δ, всюду плотное в открытом множестве U_i полного метрического пространства *в.* Пересечение счетного множества всюду плотных в U подмножеств типа G_δ открытого множества U в полном метрическом пространстве есть всюду плотное в U подмножество типа G_δ этого открытого множества (теорема Бэра, см. [6, с. 162—163]). Поэтому

$$D_i^q(F)\underset{\text{def}}{=}\bigcap_{m\in N}D_i^{q,m}(F)$$

есть множество типа G_δ, всюду плотное в U_i. Из определения множества $D_i^q(F)$ следует, что при всяком функция $m\in N$ не $\mu_{q,i}^{(m)}(F,\cdot):U_i\to R$ прерывна во всякой точке $b\in D_i^q(F)$.

В силу формулы (15) при всяком $b\in U_i$ имеет место равенство

$$\mu_{q,i}(F,b)=\lim_{m\to\infty}\lim_{s\to\infty}\min_{R^q\in F}\max_{j\in\{0,\dots,s\}}a_{i,m+j}^{(q)}(\mathfrak{H};b,R^q),$$

в котором в силу леммы 2 можно $\lim\limits_{m\to\infty}$ заменить на $\inf\limits_{m\in N}$:

$$\mu_{q,i}(F,b)=\inf_{m\in N}\lim_{s\to\infty}\min_{R^q\in F}\max_{j\in\{0,\dots,s\}}a_{i,m+j}^{(q)}(\mathfrak{H};b,R^q).$$

Последнее равенство в силу формулы (14) можно записать в виде:

$$\mu_{q,i}(F,b)=\inf_{m\in N}\mu_{q,i}^{(m)}(F,b).$$

Таким образом, функция $\mu_{q,i}(F,\cdot):U_i\to R$ есть точная нижняя грань множества функций

$$\left\{\mu_{q,i}^{(m)}(F,\cdot):U_i\to R\right\}_{m\in N},$$

каждая из которых непрерывна во всякой точке множества $D_i^q(F)$. В силу хорошо известного предложения (см., например, [6, с. 237— 238]; цитируемое предложение воспроизведено с доказательством в [4]—см. в [4] предложение 1 из § 5) отсюда следует, что функция $\mu_{q,i}(F,\cdot):U_i\to R$ полунепрерывна сверху во всякой точке $b\in D_i^q(F)$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Для всяких $k\in\{1,\dots,n\}$, $i\in N$, для всякого замкнутого множества $F\subset G_{n-k+1}(R^n)$ в открытом множестве U_i имеется всюду плотное подмножество $C_i^k(F)$ типа G_δ такое, что функция $\lambda_{k,i}(\mathfrak{H},F,\cdot):U_i\to R$ определенная формулой* (5), *полунепрерывна сверху во всякой точке $b\in D_i^k(F)$.*

Доказательство. Пусть даны $k\in\{1,\dots,n\}$, $i\in N$ и дано замкнутое множество $F\subset G_{n-k+1}(R^n)$. Функция $\lambda_{k,i}(\mathfrak{H},F,\cdot):U_i\to R$ определена формулой (5), т. е. формулой

$$\lambda_{k,i}(\mathfrak{H},F,\cdot)=\inf_{R^{n-k+1}\in F}\overline{\lim_{\substack{t\to+\infty\\(t\in N)}}}\frac{1}{t}\ln\left\|X^t_{\tilde{h}_i(b,R^{n-k+1})}\right\| \tag{16}$$

(для всякого $b\in U_i$). С помощью формулы (9), определяющей функции

$$a_{i,t}^{(q)}(\mathfrak{H};\cdot,\cdot):U_i\times G_q(R^n)\to R\quad(t\in N,i\in N,q\in\{1,\dots,n\}),$$

перепишем формулу (16) в виде:

$$\lambda_{k,i}(\mathfrak{H},F,b)=\inf_{R^{n-k+1}\in F}\overline{\lim_{\substack{t\to+\infty\\(t\in N)}}}a_{i,t}^{(n-k+1)}(\mathfrak{H};b,R^{n-k+1}).$$

С помощью формул (12), (15) последнее равенство переписывается в виде равенства

$$\lambda_{k,i}(\mathfrak{H},F,b)=\mu_{n-k+1,i}(F,b)$$

(верного для всякого $b\in U_i$).

Положим $C_i^k(F)=D_i^{n-k+1}(F)$, где множество $D_i^{n-k+1}(F)$ обладает свойствами, указанными в формулировке леммы 6. Тогда $C_i^k(F)$—подмножество типа G_δ открытого множества U_i, всюду плотное в U_i, а функция

$$\lambda_{k,i}(\mathfrak{H},F,\cdot)=\mu_{n-k+1,i}(F,\cdot):U_i\to R$$

полунепрерывна сверху во всякой точке $b\in C_i^k(F)$. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть U — открытое множество в метрическом пространстве (B,d_B). Пусть $C\subset U$ — множество типа G_δ в U, всюду плотное в U. Тогда $C\bigcup(B\setminus U)$— множество типа G_δ в B, всюду плотное в B.*

Доказательство. Так как *U* — открытое в *B* множество, то всякое множество, открытое в *U,* открыто и в *B*.

1. По условию,

$$C\bigcap_{s\in N} C_s\,, \tag{17}$$

где $C_s \subset U\ (s\in N)$—открытые множества. Из формулы (17) следует равенство

$$C\bigcap_{s\in N}\bigcap_{k=1}^{s} C_k = \bigcap_{s\in N} V_s\,,$$

где множества

$$V_s \underset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{s} G_k\ \left(s\in N\right) \tag{18}$$

открыты (в *B),* так как каждое из них есть пересечение конечной совокупности открытых множеств. Последовательность множеств $\{V_s\}_{s\in N}$ — убывающая: $V_{s+1}\subset V_s\ \ (s\in N)$; это следует из формулы (18), определяющей множества V_k. Итак,

$$C=\bigcap_{s\in N} V_s\,, \tag{19}$$

где $\{V_s\}_{s\in N}$ — убывающая последовательность открытых множеств.

2. Так как множество U открыто, то его дополнение $B\setminus U$ может быть представлено в виде

$$B\setminus U=\bigcap_{s\in N} W_s\,, \tag{20}$$

где через $W_s\ \ (s\in N)$ обозначена открытая $\dfrac{1}{s}$- окрестность множества $B\setminus U$, т. е. множество точек

$$\left\{x\in B:\inf_{y\in B\setminus U} d_B(x,y)<\frac{1}{s}\right\}.$$

Из этого определения множеств W_s следует, что $\{W_s\}_{s\in N}$ — убывающая последовательность открытых множеств.

3. Так как $\{V_s\}_{s\in N}$ и $\{W_s\}_{s\in N}$ — убывающие последовательности множеств, то имеет место формула

$$(\bigcap_{s\in N} V_s)\bigcup(\bigcap_{s\in N} W_s)=\bigcap_{s\in N}(V_s\bigcup W_s)\,. \tag{21}$$

В самом деле: а) множество, стоящее в левой части равенства (21), содержится в множестве, стоящем в правой части; это очевидно, и здесь не используется монотонность последовательностей $\{V_s\}_{s\in N}$, $\{W_s\}_{s\in N}$; б) если точка x принадлежит множеству, стоящему в правой части доказываемого равенства (21), то хотя бы одно из двух множеств $\{s\in N,\ \ x\in V_s\}$ $\{s\in N,\ \ x\in W_s\}$ бесконечно, а так как обе последовательности множеств $\{V_s\}_{s\in N}$, $\{W_s\}_{s\in N}$,—убывающие, то оно (это бесконечное множество) совпадает с N, а тогда x принадлежит одному из «слагаемых» (соединенных знаком объединения) левой части доказываемого равенства; таким образом, правая часть равенства (21) содержится в левой. Равенство (21) доказано.

4. Из формул (19) — (21) следует равенство

$$C\bigcup(B\setminus U)=\bigcap_{s\in N}(V_s\bigcup W_s)\,.$$

Так как множества V_s и W_s $(s\in N)$ открыты, то из этого равенства следует, что $C\bigcup(B\setminus U)$— множество типа G_δ. Так как множество *C* всюду плотно в *U,* то множество $C\bigcup(B\setminus U)$ всюду плотно в *B.* Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Для всяких* $k \in \{1, ..., n\}$, $i \in N$, *для всякого замкнутого множества* $F \subset G_{n-k+1}(R^n)$ *в пространстве B имеется всюду плотное множество* $B_i^k(F)$ *типа* G_δ *такое, что функци* $\lambda_{k,i}(\mathfrak{H}, F, \cdot): U_i \to R$, *определенная формулой* (5), *полунепрерывна сверху во всякой точке* $b \in B_i^k(F) \bigcap U_i$.

Доказательство. Пусть даны $k \in \{1, ..., n\}$, $i \in N$ и дано замкнутое множество $F \subset G_{n-k+1}(R^n)$. Положим $B_i^k(F) = C_i^k(F) \bigcup (B \setminus U)$, где $C_i^k(F)$ — множество, обладающее свойствами, указанными в формулировке леммы 7. В силу леммы 8 так определенное множество $B_i^k(F)$ есть множество типа G_δ, всюду плотное в *B*. Лемма 9 доказана.

Предложение. *В пространстве B имеется всюду плотное множество D типа* G_δ *такое, что для всяких* $k \in \{1, ..., n\}$, $i \in N$, $m \in N$, $j \in \{1, ..., s(k, m)\}$ *функция* $\lambda_{n-k+1,i}(\mathfrak{H}, F_{k,m}^j, \cdot): U_i \to R$, *определенная формулой*

$$\lambda_{n-k+1,i}(\mathfrak{H}, F_{k,m}^j, \cdot) = \inf_{R^k \in F_{k,m}^j} \overline{\lim_{\substack{t \to +\infty \\ (t \in N)}}} \frac{1}{t} \ln \left\| X_{\tilde{h}_i(\cdot, R^k)}^t \right\|, \tag{22}$$

полунепрерывна сверху во всякой точке $b \in D \bigcap U_i$.

Доказательство. Положим

$$D = \bigcap_{m \in N} \bigcap_{t \in N} \bigcap_{k=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{s(k,m)} B_i^{n-k+1}(F_{k,m}^j),$$

где $B_i^k(F)$ — множества, обладающие свойствами, указанными в формулировке леммы 9. Так как каждое из множеств $B_i^q(F_{k,m}^j)$ имеет тип G_δ и всюду плотно в *B*, а (B, d_B) — полное метрическое пространство, то в силу теоремы Бэра (см. [6, с. 163]) множество *D* имеет тип G_δ и всюду плотно в *B*. Для всяких $k \in \{1, ..., n\}$, $i \in N$, $m \in N$, $j \in \{1, ..., s(k, m)\}$ функция $\lambda_{n-k+1,i}(\mathfrak{H}, F_{k,m}^j, \cdot): U_i \to R$, определенная формулой (22), полунепрерывна сверху во всякой точке множества $D \bigcap U_i$, так как $D \subset B_i^{n-k+1}(F_{k,m}^j)$. Предложение доказано.

Теорема. *В пространстве B имеется всюду плотное множество D типа* G_δ *такое, что для всякого* $k \in \{1, ..., n\}$ *функция* $\lambda_k(\mathfrak{H}, \cdot): B \to R$ *полунепрерывна сверху во всякой точке* $b \in D$.

Доказательство. Пусть *D* — множество, обладающее свойствами, указанными в формулировке предложения. Для всякого $k \in \{1, ..., n\}$ имеем: $F_{k,1}^1 = G_k(R^n)$ (см. начало § 5: там отмечено, что $F_{k,m}^1, ..., F_{k,m}^{s(k,m)}$ - покрытие пространства $G_k(R^n)$ и что $s(k,1) = 1$). В силу формулы (8) для всяких $k \in \{1, ..., n\}$, $i \in N$ функция $\lambda_{n-k+1,i}(\mathfrak{H}, F_{k,1}^j, \cdot) = \lambda_{n-k+1,i}(\mathfrak{H}, G_k(R^n), \cdot): U_i \to R$ есть сужение функции $\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H}, \cdot): B \to R$ на множество U_i. В силу предложения это сужение полунепрерывно сверху во всякой точке $b \in D \bigcap U_i$. Так как $\{U_i\}_{i \in N}$ — покрытие пространства *B* открытыми множествами, то для всякого $k \in \{1, ..., n\}$ функция $\lambda_{n-k+1}(\mathfrak{H}, \cdot): B \to R$ полунепрерывна сверху во всякой точке $b \in D$. Теорема доказана.

Замечание. Эта теорема доказана (в несколько большей общности) в статье [7]—см. теорему 3 цитируемой статьи. Для доказательства теоремы, сформулированной выше в § 3, нам понадобятся вспомогательные конструкции и утверждения, изложенные выше в §§ 4, 5. Эти конструкции и утверждения являются усложнениями конструкций и утверждений статьи [7]. Неудивительно поэтому, что для вывода теоремы 3 статьи [7] из вспомогательных результатов настоящей статьи понадобилось всего несколько строк.

§ 6

Доказательство теоремы, сформулированной в конце § 3. Пусть D — множество, обладающее свойствами, указанными в формулировке предложения § 5.

Напомним, что для всяких $\lambda \in R$, $b \in B$ векторное пространство $E(\mathfrak{H}, \lambda, b)$ определено формулой

$$E(\mathfrak{H}, \lambda, b) = \{\xi \in p^{-1}(b) : \lambda(\mathfrak{H}, \xi) < \lambda\}, \tag{1}$$

где

$$\lambda(\mathfrak{H}, \xi) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln\left|X^t \xi\right|,$$

Причем $\ln 0 = -\infty$. Пусть даны и $\lambda \in R$, $b_0 \in D$. Пусть дана окрестность $V \subset \widetilde{E}$ точки $E(\mathfrak{H}, \lambda, b_0)$.

1. Положим

$$q = \dim E(\mathfrak{H}, \lambda, b_0). \tag{2}$$

Пусть оказалось, что $q = 0$, т. е. $E(\mathfrak{H}, \lambda, b_0) = \{0\}$.В этом случае утверждение теоремы очевидно: из определения векторного расслоения непосредственно следует, что отображение $b \to 0_b$ непрерывно, поэтому найдется окрестность $U \subset B$ точки b_0 такая, что $\{0_b\} \in V$ для всякого $b \in U$, откуда $E(\mathfrak{H}, \lambda, b) \in \mathrm{St}V$ для всякого (так $b \in U$ как $\{0\} \subset E(\mathfrak{H}, \lambda, b)$ и, следовательно, $E(\mathfrak{H}, \lambda, b) \in \mathrm{St}\{0\}$, что и требовалось доказать. Остается разобрать возможность $q \in \{1, ..., n\}$.

2. Пусть оказалось, что $q \in \{1, ..., n\}$, где число q определено формулой (2). Положим

$$\widetilde{R}_0^q = E(\mathfrak{H}, \lambda, b_0). \tag{3}$$

В силу лемм 1, 5 из § 2 имеет место равенство

$$\overline{\lim_{\substack{t\to+\infty \\ (t\in N)}}} \frac{1}{t} \ln\left\|X^t_{\widetilde{R}_0^q}\right\| = \max_{\xi \in \widetilde{R}_{0*}^q} \lambda(\mathfrak{H}, \xi),$$

правая часть которого вследствие формул (1), (3) меньше λ. Таким образом,

$$\overline{\lim_{\substack{t\to+\infty \\ (t\in N)}}} \frac{1}{t} \ln\left\|X^t_{\widetilde{R}_0^q}\right\| < \lambda. \tag{4}$$

Фиксируем координатную окрестность U_{i_0}, содержащую точку b_0 (координатную окрестность берем из множества координатных окрестностей атласа векторного расслоения (E, p, B), зафиксированного в §5 — см. в цитируемом параграфе формулу (2)).

Так как $E(\mathfrak{H}, \lambda, b_0)$—$q$-мерное векторное подпространство слоя $p^{-1}(b_0)$, то из определения координатных отображений

$$\tilde{h}_i : U_i \times \bigcup_{q=0}^{n} G_q(R^n) \to \tilde{p}^{-1}(U_i)$$

(см. формулу (4) из § 5) следует, что $\widetilde{R}_0^q$ можно записать в виде

$$\widetilde{R}_0^q = \tilde{h}_{i_0}(b_0, R_0^q), \tag{5}$$

Где $R_0^q \in G_q(R^n)$. Из формул (4), (5) следует неравенство

$$\varlimsup_{\substack{t\to+\infty\\(t\in N)}} \frac{1}{t}\ln\left\| X^t_{\tilde h_{i_0}(b_0, R_0^q)} \right\| < \lambda . \tag{6}$$

Возьмем $\varepsilon \in R_*^+$ и окрестность $W_1 \subset U_{i_0}$ точки b_0 такие, что

$$\tilde h_{i_0}(W_1 \times U_\varepsilon(R_0^q)) \subset V , \tag{7}$$

где $U_c\left(R_0^q\right)$—ε-окрестность точки R_0^q в метрическом пространстве $\left(G_q(R^n), d_q\right)$ (это метрическое пространство определено в начале § 5). Возьмем число $m \in N$ такое, что $\dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{2}\varepsilon$; тогда тот из замкнутых шаров $F^1_{k,m},..., F^{s(k,m)}_{k,m}$ радиуса $\dfrac{1}{m}$ (см. начало § 5), который содержит точку R_0^q,— обозначим этот шар через $F^{j_0}_{q,m}$, — содержится в $U_c\left(R_0^q\right)$, и поэтому из формулы (7) следует включение

$$\tilde h_{i_0}(W_1 \times F^{j_0}_{q,m}) \subset V . \tag{8}$$

Так как множество $F^{j_0}_{q,m}$ содержит точку R_0^q, то из формулы (6) следует неравенство

$$\inf_{R^q \in F^{j_0}_{q,m}} \varlimsup_{\substack{t\to+\infty\\(t\in N)}} \frac{1}{t}\ln\left\| X^t_{\tilde h_{i_0}(b_0, R_0^q)} \right\| < \lambda ,$$

которое можно, пользуясь формулой (22) из § 5, переписать в виде

$$\lambda_{n-q+1, i_0}(\mathfrak{H}, F^{j_0}_{q,m}, b_0) < \lambda . \tag{9}$$

В точке b_0, как и во всякой точке множества *D,* функция

$$\lambda_{n-q+1, i_0}(\mathfrak{H}, F^{j_0}_{q,m}, \cdot) : U_i \to R$$

полунепрерывна сверху. Поэтому из неравенства (9) следует существование окрестности $W_2 \subset U_{i_0}$ точки b_0 такой, что

$$\lambda_{n-q+1, i_0}(\mathfrak{H}, F^{j_0}_{q,m}, b) < \lambda \tag{10}$$

для всякой точки $b \in W_2$. Из неравенства (10) вследствие формулы (22) из § 5 вытекает существование $R^q(b) \in F^{j_0}_{q,m}$ такого, что

$$\varlimsup_{\substack{t\to+\infty\\(t\in N)}} \frac{1}{t}\ln\left\| X^t_{\tilde h_{i_0}(b, R^q(b))} \right\| < \lambda .$$

В силу леммы 5 из § 2 левая часть последнего неравенства не изменится, если убрать значок ($t \in N$); поэтому последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\left\| X^t_{\tilde h_{i_0}(b, R^q(b))} \right\| < \lambda ,$$

из которого в силу леммы I из § 2 следует, что для всякого $\xi \in \tilde h_{i_0}(b, R^q(b))$, выполнено неравенство

$$\lambda(\mathfrak{H}, \xi) < \lambda ;$$

это, в свою очередь, означает, в силу формулы (1), что

$$\tilde h_{i_0}(b, R^q(b)) \subset E(\mathfrak{H}, \lambda, b), ,$$

т. е.

$$E(\mathfrak{H}, \lambda, b) \in \mathrm{St}\{\tilde h_{i_0}(b, R^q(b))\} \tag{11}$$

(определение символа St см. в § 3). Из того, что $R^q(b) \in F^{j_0}_{q,m}$, следует включение

$$\mathrm{St}\{\tilde h_{i_0}(b, R^q(b))\} \subset \mathrm{St}\{\tilde h_{i_0}(\{b\} \times F^{j_0}_{q,m})\} ,$$

из соединения которого с формулой (11) следует включение

$$E(\mathfrak{H}, \lambda, b) \in \mathrm{St}\{\tilde h_{i_0}(\{b\} \times F^{j_0}_{q,m})\} , \tag{12}$$

Итак, нашлись окрестности $W_1 \subset U_{i_0}$, $W_2 \subset U_{i_0}$ точки b_0 такие, что для всякой точки $b \in W_1 \bigcap W_2$ имеют место: включение (12) и вытекающее из формулы (8) включение

$$\tilde{h}_{i_0}(\{b\} \times F_{q,m}^{j_0}) \subset V,$$

из соединения которого с формулой (12) следует включение $E(\mathfrak{H}, \lambda, b) \in \mathrm{St}V$. Теорема, сформулированная в § 3, доказана. В следующих параграфах приводится серия конкретизации этой теоремы.

§ 7

Пусть на полном метрическом пространстве $\mathfrak{B}$ задана динамическая система f^t (т. е. непрерывное действие группы R). Фиксируем в пространстве R^n скалярное произведение $(\cdot,\ \cdot)$. Рассмотрим непрерывное отображение $A(\cdot): \mathfrak{B} \to \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$, удовлетворяющее условию

$$\sup_{x \in B} \|A(x)\| < +\infty .$$

Множество всех таких отображений $A(\cdot)$ (вместо $A(\cdot)$ пишем также A) наделим структурой метрического пространства, определив расстояние формулой

$$d_S(A_1, A_2) = \sup_{x \in B} \|A_1(x) - A_2(x)\| .$$

Так определенное полное метрическое пространство обозначим через S. При всяких $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$ рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x} \quad (\mathfrak{x} \in R^n). \qquad (*)$$

При всяких $\lambda \in R$, $A \in S$, $x \in \mathfrak{B}$ рассмотрим множество $\mathscr{E}(f^t, \lambda, (A, x))$ начальных значений (т. е. значений при $t = 0$) решений системы (*), имеющих показатель Ляпунова $< \lambda$. Как известно, $\mathscr{E}(f^t, \lambda, (A, x))$ — векторное подпространство (быть может, состоящее из одного нуля) пространства R^n.

Теорема. *В пространстве* $S \times \mathfrak{B}$ *имеется всюду плотное множество C типа* G_δ *такое, что при всяком* $\lambda \in R$ *отображение*

$$\mathscr{E}(f^t, \lambda, \cdot): S \times \mathfrak{B} \to \bigcup_{k=0}^{n} G_k(R^n)$$

полунепрерывно снизу во всякой точке множества C, т. е. для всякой точки $(A_0, x_0) \in C$, для всякой окрестности (дизъюнктное $V \subset \bigcup_{k=0}^{n} G_k(R^n)$ объединение грассмановых многообразий) точки $\mathscr{E}(f^t, \lambda, (A_0, x_0))$ найдется окрестность $W \subset S \times \mathfrak{B}$ точки (A_0, x_0) такая, что для всякой точки $(A, x) \in W$ векторное пространство $\mathscr{E}(f^t, \lambda, (A, x))$ содержит подпространство, являющееся элементом множества *V.*

Как уже было сказано выше, сформулированная теорема является конкретизацией теоремы, сформулированной в § 3. Для того чтобы в этом убедиться, проведем следующие построения.

Через $\mathfrak{X}(\theta, \tau; x, A)$ обозначим оператор Коши системы (*); напомним, что оператор Коши $\mathfrak{X}(\theta, \tau; x, A)$ по определению значения всякого решения системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)$ в точке $t = \tau$ оставит в соответствие значение того же решения в точке $t = \theta$). Как известно, $\mathfrak{X}(\theta, \tau; x, A)$ при всяких $\theta \in R$, $\tau \in R$ непрерывно зависит от $(x, A) \in \mathfrak{B} \times S$. Положим

$$B = S \times \mathfrak{B},\ E = B \times R^n,\ p = pr_1 \qquad (1)$$

(pr_1 —проекция произведения $B\times R^n$ на первый сомножитель). Расстояние в B определяется формулой

$$d_B((A_1,x_1),(A_2,x_2)) = d_s(A_1,A_2) + d_{\mathfrak{B}}((x_1,x_2) \tag{2}$$

для всяких $A_1\in S, A_2\in S, x_1\in\mathfrak{B}, x_2\in\mathfrak{B}$ (где $d_{\mathfrak{B}}(\cdot,\cdot)$ —расстояние в метрическом пространстве $\mathfrak{B}$). Хорошо известно (и легко доказывается), что из полноты метрических пространств S и , $\mathfrak{B}$ следует полнота метрического пространства *B*. Топологическое пространство *E* определяется как произведение топологических пространств *B* и $R^n : E = B\times R^n$. *E* метризуемо и его топология индуцируется метрикой, определяемой по формуле

$$d_E((b_1,\mathfrak{x}_1),(b_2,\mathfrak{x}_2)) = d_B(b_1,b_2) + |\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2| \tag{3}$$

(при всяких $b_1\in B, b_2\in B, \mathfrak{x}_1\in R^n, \mathfrak{x}_2\in R^n$).

Расслоение (E,p,B), определенное формулами (1), естественным образом наделяется структурой (тривиального) векторного расслоения со слоем R^n. Подробнее: пусть $\alpha\in R,\ \beta\in R, b\in B,\ \xi=(b,\mathfrak{x})\in p^{-1}(b),\ \eta=(b,\mathfrak{y})\in p^{-1}(b)$ $(\mathfrak{x}\in R^n, \mathfrak{y}\in R^n)$. Тогда положим по определению

$$\alpha\xi+\beta\eta = \alpha(b,\mathfrak{x})+\beta(b,\mathfrak{y}) = (b,\alpha\mathfrak{x}+\beta\mathfrak{y}). \tag{4}$$

Тем самым при всяком $b\in B$ на слое $p^{-1}(b)$ возникает структура векторного пространства (над полем вещественных чисел) (эту же структуру можно определить так: при всяком $b\in B$ сужение $p_{2,b}$ на слой $p^{-1}(b)$ отображения pr_2 (pr_2 —проекция произведения $B\times R^n$ на второй сомножитель) есть взаимно однозначное отображение слоя $p^{-1}(b)$ на пространство R^n ; зададим на $p^{-1}(b)$ структуру векторного пространства (над полем вещественных чисел) так, чтобы $p_{2,b}$ было изоморфизмом векторных пространств); так определенная структура векторного пространства на всяком слое $p^{-1}(b)$ и вторая из формул (1) превращают расслоение (E,p,B) в (тривиальное) векторное расслоение со слоем R^n .

На так определенном векторном расслоении (E,p,B) зададим риманову метрику, положив для всякого $b\in B$ и всяких $\mathfrak{x}\in R^n, \mathfrak{y}\in R^n$ по определению

$$\langle (b,\mathfrak{x}),(b,\mathfrak{y})\rangle = (\mathfrak{x},\mathfrak{y}). \tag{5}$$

При всяком $t\in R$ определим морфизм (X^t,χ^t) построенного векторного расслоения (E,p,B) формулами:

$$X^t(A,x,\mathfrak{x}) = (A, f^t x, \mathfrak{X}(t,0;x,A)\mathfrak{x}), \tag{6}$$

$$\chi^t(A,x) = (A, f^t x) \tag{7}$$

(при всяких $A\in S\quad x\in\mathfrak{B}\ \mathfrak{x}\in R^n$).

Так как для всяких $t\in R, s\in R$ имеет место формула

$$f^{t+s} = f^t f^s , \tag{8}$$

то из (7) непосредственно следует, что для всяких $t\in R, s\in R$ имеет место формула

$$\chi^{t+s} = \chi^t\chi^s. \tag{9}$$

Напомним очевидные тождества:

$$\mathfrak{X}(\theta,0;f^t x,A) = \mathfrak{X}(\theta+\tau,\tau;x,A), \tag{10}$$

$$\mathfrak{X}(\theta,\sigma;x,A)\mathfrak{X}(\sigma,\tau;x,A) = \mathfrak{X}(\theta,\tau;x,A), \tag{11}$$

$$\mathfrak{X}(\theta,\theta;x,A) = 1_{R^n},, \tag{12}$$

которым удовлетворяет оператор Коши $\mathfrak{X}(\theta,\tau;x,A)$ системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$. Для всяких $t\in R, s\in R$, $A\in S$, $x\in\mathfrak{B}$, $\mathfrak{x}\in R^n$ имеют место равенства:

$$\begin{aligned} X^t X^s(A,x,\mathfrak{x}) &= X^t(A, f^s x, \mathfrak{X}(s,0;x,A)\mathfrak{x}) = \\ &= (A, f^{t+s}x, \mathfrak{X}(t,0;f^s x,A)\mathfrak{X}(s,0;x,A)\mathfrak{x}) = \\ &= (A, f^{t+s}x, \mathfrak{X}(t+s,s;x,A)\mathfrak{X}(s,0;x,A)\mathfrak{x}) = \\ &= (A, f^{t+s}x, \mathfrak{X}(t+s,0;x,A)\mathfrak{x}) = X^{t+s}(A,x,\mathfrak{x}). \end{aligned}.$$

Таким образом, для всяких $t\in R, s\in R$ выполнено равенство

$$X^{t+s} = X^t X^s. \tag{13}$$

При всяком $t\in R$ имеют место формулы:

$$X^t X^{-t} = X^0 \underset{(6),(12)}{=} 1_E,\ X^t X^{-t} = X^0 = 1_E,$$

$$(\chi^t,\chi^{-t}) \underset{(9)}{=} \chi^0 \underset{(7)}{=} 1_{B,}\ \ \chi^{-t}\chi^t = \chi^0 = 1_B,,$$

т. е. (X^{-t},χ^{-1}) — морфизм векторного расслоения (E,p,B), обратный морфизму (X^t,χ^t); следовательно, (X^t,χ^t) — автоморфизм векторного расслоения (E,p,B).

Таким образом (см. формулы (9), (13)), построен гомоморфизм $\mathfrak{H}$ группы R в группу автоморфизмов векторного расслоения (E,p,B); образом $\mathfrak{H}t$ точки $t\in R$ при этом гомоморфизме является (X^t,χ^t).

Определим функцию $a(\cdot): B\to R^+$ формулой

$$a((A,x)) - \sup_{y\in\beta}\|A(y)\|. \tag{14}$$

Имеем

$$a(\chi^t(A,x)) = a((A,f^t x)) - \sup_{y\in\beta}\|A(y)\| = a((A,x))..$$

Из формулы (6) в силу известного неравенства

$$\|\mathfrak{X}(t,0;x,A)\| \leqslant \exp\left|\int_0^t \|A(f^s x)\|ds\right| \leqslant \exp(|t|a((A,x))),,$$

которому удовлетворяет оператор Коши системы $\dot{\mathfrak{x}} = A(f^t x)\mathfrak{x}$ при всяких $A\in S$ $x\in\mathfrak{B}$, $t\in R$, следует, что при всяких $b\in B$, $t\in R$ выполнено неравенство

$$\|X^t[b]\| \leqslant \exp(|t|a(b)).$$

Построив векторное расслоение (E,p,B) с римановой метрикой $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и гомоморфизм $\mathfrak{H}\in\mathrm{Hom}\,(\mathbf{R},\ \mathrm{Aut}(E,\ p,\ B))$ и проверив для них условия, сформулированные в пп. 1—2, § 1, можем теперь применить к этим объектам теорему, сформулированную в § 3. Результатом этого применения и является теорема, сформулированная выше в настоящем параграфе. Отметим, что $E(\mathfrak{H},\ \lambda,\ b)$, фигурирующее в теореме § 3, в рассматриваемой теперь ситуации (где $b=(A,\ x)$) равно $\{A\}\times\{x\}\times\mathcal{E}(f^t,\ \lambda,\ (A,\ x))$ (поясним, что через $\{a\}$ обозначается множество, состоящее из одного элемента a).

§ 8

Пусть V^n – связное полное n-мерное риманово многообразие (риманову метрику на нем обозначаем через $\delta(\cdot,\ \cdot)$)[4]. Через S обозначается множество всех диффеоморфизмов

---

[4] Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^3, риманова метрика $\delta(\cdot,\ \cdot)$ – классу C^2.

$f: V^n \to V^n$ класса C^1, отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию[5]

$$\sup_{x \in V^n} \max\{\| df_x \|,\ \| (df_x)^{-1} \|\} < +\infty. \tag{1}$$

Множество S наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния

$$\tilde{d}_S(f,\ g) = \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(fx, gx)} \{\min\{s(u),\ [1 + \rho\,(x,\ x_0)]^{-1}\} + \| \varphi_u dg_x - df_x \|\}; \tag{2}$$

здесь: x_0 — некоторая фиксированная точка многообразия V^n, $G(y,\ z)$ — множество всех кусочно-гладких путей, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y, $s(u)$ — длина пути u, $\rho\,(\cdot,\ \cdot)$ — расстояние между точками многообразия V^n, φ_u — преобразование, состоящее в параллельном перенесении касательных векторов вдоль пути u.

При всяких $\lambda \in \mathbf{R}$, $f \in S$, $x \in V^n$ рассмотрим векторное подпространство $l_\lambda(f,\ x)$ касательного пространства $T_x V^n$, определенное формулой:

$$l_\lambda(f,\ x) = \left\{ \mathfrak{x} \in T_x V^n : \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m} \ln | df^m \mathfrak{x} | < \lambda \right\} \tag{3}$$

(полагаем $\ln 0 = -\infty$).

Множество векторных подпространств касательных пространств дифференцируемого многообразия естественным образом наделяется топологией, в которой оно становится пространством $\tilde{T}V^n$ расслоенного пространства со слоем $\bigcup_{k=0}^{n} G_k(\mathbf{R}^n)$ (дизъюнктное объединение грассмановых многообразий), ассоциированного с тем же локально тривиальным главным $\mathrm{GL}(n,\ \mathbf{R})$-расслоением, с которым ассоциировано касательное расслоение $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ многообразия V^n. Подробно это построение описано в § 3; если там в качестве векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$ взять касательное расслоение $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$, то пространство $\tilde{E}$ построенного в § 3 расслоенного пространства $(\tilde{E},\ \tilde{p},\ B)$ и будет тем пространством, которое мы обозначили здесь через $\tilde{T}V^n$.

Теорема. *В пространстве $S \times V^n$ имеется всюду плотное множество C типа G_δ такое, что при всяком $\lambda \in \mathbf{R}$ отображение $l_\lambda : S \times V^n \to \tilde{T}V^n$ полунепрерывно снизу во всякой точке множества C*, т. е. для всякой точки $(f_0,\ x_0) \in C$, для всякой окрестности $V \subset \tilde{T}V^n$ точки $l_\lambda(f_0,\ x_0)$ найдется окрестность $W \in S \times V^n$ точки $(f_0,\ x_0)$ такая, что для всякой точки $(f,\ x) \in W$ векторное пространство $l_\lambda(f,\ x)$ содержит подпространство, являющееся элементом множества V.

Как отмечено выше, сформулированная теорема – конкретизация теоремы, сформулированной в § 3. Для того чтобы убедиться в этом, проведем следующие построения.

а) Множество S можно наделить также другой структурой метрического пространства, задав расстояние

$$\begin{aligned} d_S(f,\ g) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(fx,\ gx)} \{\min\{s(u),\ [1 + \rho(x,\ x_0)]^{-1} + \\ + \| \varphi_u dg_x - df_x \| + \| (\varphi_u dg_x)^{-1} - (dg_x)^{-1} \|\} \end{aligned} \tag{4}$$

(смысл обозначений разъяснен выше после формулы (2)). В [8, п. 3] доказано, что формула (4) (в [8] ей соответствует формула (5)) в самом деле определяет расстояние в S. В [8, п. 4а] доказано, что формула (2) (которой в [8] соответствует формула (38)) тоже

[5] Через df_x обозначается производная отображения f в точке x; через $\|\cdot\|$ обозначается норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой.

определяет расстояние в S. В [8, п. 4б] доказано, что расстояние $d_S(\cdot,\ \cdot)$, определенное формулой (4), индуцирует на S ту же топологию, что и расстояние $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$, определенное формулой (2).

В силу предложения 1 из [9] метрическое пространство $(S,\ d_S)$ полное.

б) Положим

$$B = S \times V^n,\ \ E = S \times TV^n,\ \ p = 1_S \times \pi, \tag{5}$$

где TV^n (соответственно, π) — пространство (соответственно, проекция) касательного расслоения $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ многообразия V^n (таким образом, $T_x V^n = \pi^{-1}(x)$ при всяком $x \in V^n$).

Расстояние в B определяется формулой

$$\tilde{d}_B((f,\ x),\ (g,\ y)) = \tilde{d}_S(f,\ g) + \rho(x,\ y) \tag{6}$$

для всяких $f \in S$, $g \in S$, $x \in V^n$, $y \in V^n$.

Можно определить другое расстояние в B формулой

$$d_B((f,\ x),\ (g,\ y)) = d_S(f,\ g) + \rho(x,\ y) \tag{7}$$

для всяких $f \in S$, $g \in S$, $x \in V^n$, $y \in V^n$.

Так как расстояния $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$ и $d_S(\cdot,\ \cdot)$ индуцируют на S одну и ту же топологию, то расстояния $\tilde{d}_B(\cdot,\ \cdot)$ и $d_B(\cdot,\ \cdot)$, определенные формулами (6) и (7), индуцируют на B одну и ту же топологию.

Топологическое пространство E определяется как произведение топологического пространства S (с топологией, индуцированной расстоянием $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$; напомним, что эта топология совпадает с топологией, индуцированной расстоянием $d_S(\cdot,\ \cdot)$) и топологического пространства TV^n (TV^n стандартным образом наделено структурой дифференцируемого многообразия класса C^2, поскольку V^n — дифференцируемое многообразие класса C^3; структура дифференцируемого многообразия индуцирует топологию на TV^n).

Непрерывность отображения

$$p = 1_S \times \pi : E \to B$$

вытекает, в силу определения топологии на E и формулы (6), из непрерывности отображения $\pi : TV^n \to V^n$.

в) Расслоение $(E,\ p,\ B)$, определенное формулами (5), естественным образом наделяется структурой векторного расслоения со слоем $\mathbf{R}^n$, а именно, векторное расслоение $(E,\ p,\ B)$ определяется как векторное расслоение, индуцированное отображением $\mathrm{pr}_2 : S \times V^n \to V^n$ (pr_2 — проекция произведения на второй сомножитель) и касательным расслоением $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ многообразия V^n.

г) На так определенном векторном расслоении $(E,\ p,\ B)$ зададим риманову метрику $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$, положив для всяких $\xi \in E$, $\eta \in E$ таких, что $p\xi = p\eta$, по определению

$$\langle\xi,\ \eta\rangle = \delta(\mathrm{pr}_2\xi,\ \mathrm{pr}_2\eta), \tag{8}$$

где pr_2 — проекция произведения $E = S \times TV^n$ на второй сомножитель, а $\delta(\cdot,\ \cdot)$ — риманова метрика, имеющаяся на V^n как на римановом многообразии. В [10, п. 1, § 1] доказано, что $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$, определенное формулой (8), является римановой метрикой векторного расслоения $(E,\ p,\ B)$, определенного в подпунктах б), в).

д) При всяком $t \in \mathbf{Z}$ положим

$$\mathfrak{H}t = (X^t,\ \chi^t) \tag{9}$$

где отображения $X : E \to E$, $\chi : B \to B$ определены следующим образом. Всякое $\xi \in E$ есть, согласно формуле (5), пара $(f, \mathfrak{x})$, где $f \in S$, $\mathfrak{x} \in TV^n$; полагаем

$$X\xi = X(f, \mathfrak{x}) = (f, df\mathfrak{x}). \tag{10}$$

Всякое $b \in B$ есть, согласно формуле (5), пара (f, x), где $f \in S$, $x \in V^n$; полагаем

$$\chi b = \chi(f, x) = (f, fx) \tag{11}$$

Пара отображений (X, χ), определенных формулами (10), (11), есть автоморфизм векторного расслоения (E, p, B) (это доказано в [10, § 1, п. 2]). Поэтому формула (9) имеет смысл и определяет гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$, где через $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z}, \mathrm{Aut}\,(E, p, B))$ обозначается множество гомоморфизмов группы $\mathbf{Z}$ в группу $\mathrm{Aut}\,(E, p, B)$ автоморфизмов векторного расслоения (E, p, B).

е) Положим

$$a((f, x)) = \ln \sup_{y \in V^n} \max \{\| df_y \|, \| (df_y)^{-1} \|\} \tag{12}$$

для всяких $f \in S$, $x \in V^n$; в [10, § 1, п. 3] доказано, что формула (12) (в цитируемой статье эта формула имеет номер (1.53)) определяет отображение $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$. Для так определенной функции $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$ и отображения $\chi : B \to B$, определенного формулой (11), для всякого $b \in B$ выполнено равенство

$$a(\chi b) = a(b) \tag{13}$$

(докажем это: для всякого $b \in B$ имеем $b = (f, x)$, где $f \in S$, $x \in V^n$; поэтому

$$\chi b = \chi(f, x) = (f, fx),$$

Но $a((f, x)) = a((f, fx))$, так как $a((f, x)) = a((f, y))$ для всяких $f \in S$, $x \in V^n$, $y \in V^n$, что и требовалось доказать). Далее, для функции $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$, определенной формулой (12), и отображения $X : E \to E$, определенного формулой (10), для всякого $b \in B$ выполнено неравенство[6]

$$\max \{\| X[b] \|, \| (X[b])^{-1} \|\} \leqslant \exp\,(a(b)). \tag{14}$$

Докажем это. Для всякого $b \in B$ имеем $b = (f, x)$, где $f \in S$, $x \in V^n$; всякое $\xi \in p^{-1}(b)$ есть, согласно формуле (5), пара $(f, \mathfrak{x})$, где $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(x)$; имеем:

$$\| X[b] \| = \sup_{\xi \in p_*^{-1}(b)} (| X\xi | | \xi |^{-1}) = \sup_{\xi \in p_*^{-1}(b)} (\langle X\xi, X\xi \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \xi, \xi \rangle^{-\frac{1}{2}}); \tag{15}$$

подставив в формулу (15) равенства

$$\xi = (f, \mathfrak{x}), \; X\xi = X(f, \mathfrak{x}) = (f, df\mathfrak{x}) \tag{16}$$

и воспользовавшись равенством (8), получаем

$$\| X[b] \| = \sup_{\mathfrak{x} \in \pi_*^{-1}(x)} ((\delta(df\mathfrak{x}, df\mathfrak{x}))^{\frac{1}{2}} (\delta(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}))^{-\frac{1}{2}}) = \| df_x \| \leqslant \exp\,(a(f, x)) = \exp\,(a(b)). \tag{17}$$

Далее, так как (X, χ) — автоморфизм векторного расслоения (E, p, B), то $(X[b])^{-1}$ существует при всяком $b \in B$ и

$$\| (X[b])^{-1} \| = \sup_{\xi \in p_*^{-1}(b)} (| \xi | | X\xi |^{-1}) = \sup_{\xi \in p_*^{-1}(b)} (\langle \xi, \xi \rangle^{\frac{1}{2}} \langle X\xi, X\xi \rangle^{-\frac{1}{2}}). \tag{18}$$

Подставив в формулу (18) равенства (16) и воспользовавшись равенством (8), получаем

$$\begin{aligned} \| (X[b])^{-1} \| &= \sup_{\mathfrak{x} \in \pi_*^{-1}(x)} ((\delta\,(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}))^{\frac{1}{2}} (\delta\,(df\mathfrak{x}, df\mathfrak{x}))^{-\frac{1}{2}}) = \\ &= \| (df_x)^{-1} \| \leqslant \exp\,(a((f, x))) = \exp\,(a(b)). \end{aligned} \tag{19}$$

---

[6] Напомним, что через $X[z]$ обозначается сужение X на слой $p^{-1}(b)$.

Объединением неравенств (17), (19) заканчивается доказательство неравенства (14).

Таким образом, автоморфизм $(X,\ \chi) \in \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B)$, определенный формулами (10), (11), удовлетворяет условиям п. 1.2 введения [10] (формулы (В.1.1), (В.1.2) цитируемой статьи совпадают с формулами (13), (14) соответственно). В п. 1.4 введения [10] доказано: из того, что автоморфизм $(X,\ \chi)$ удовлетворяет условиям п. 1.2 введения [10], следует, что для гомоморфизма $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$, определенного формулой (9), имеют место формула (В.1.4) из [10] (при всяких $b \in B$, $m \in \mathbf{N}$) и формула (В.1.6) из [10] (при всяких $b \in B$, $m \in \mathbf{Z}$), т. е. выполнены условия п. 2 § 1. Теорему, сформулированную в § 3, можно применить к построенному в этом пункте векторному расслоению $(E,\ p,\ B)$ с римановой метрикой $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ и гомоморфизму $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$, так как эти объекты удовлетворяют условиям, сформулированным во введении. В результате получается теорема, сформулированная в начале § 8. Поясним, что $E(\mathfrak{H},\ \lambda,\ b)$, фигурирующее в теореме § 3, в рассматриваемой теперь ситуации (где $b = (f,\ x)$) равно $\{f\} \times l_\lambda(f,\ x)$.

Отметим некоторые частные случаи.

1) Пусть $V^n = E^n$ (n-мерное евклидово пространство). Тогда метрика $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$, определенная формулой (2), индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$, определяемая формулой[7]:

$$\tilde{\tilde{d}}_S(f,\ g) = |\, fx_0 - gx_0\,| + \sup_{x \in E^n} \|\, df_x - dg_x\,\|.$$

2) Если V^n — замкнутое многообразие, то метрика $\tilde{d}_S(\cdot,\ \cdot)$ индуцирует на S ту же топологию, что и метрика $\tilde{d}_1(\cdot,\ \cdot)$, определяемая формулой

$$\tilde{d}_1(f,\ g) = \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(fx,\ gx)} \{s(u) + \|\, \varphi_u dg_x - df_x\,\|\}.$$

Эта топология совпадает с C^1-топологией на V^n. Она не зависит от выбора римановой метрики на замкнутом дифференцируемом многообразии V^n. Поэтому теорема этого параграфа в случае, когда многообразие V^n замкнуто, дифференциально-топологически инвариантна. Ее формулировка в этом случае особенно проста — эта формулировка приведена во введении (см. теорему 1 введения).

§ 9

Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие[8]. Через S обозначается множество всех диффеоморфизмов $f : V^n \to V^n$ класса C^1, отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in V^n} \max\{\|\, df_x\,\|,\ \|\,(df_x)^{-1}\,\|\} < +\infty. \tag{1}$$

Для всякого $j \in S$ через S_j обозначается подмножество множества S, состоящее из диффеоморфизмов f, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in V^n} \rho\,(fx,\ jx) < +\infty,$$

где $\rho\,(\cdot,\ \cdot)$ — расстояние в V^n.

Для всякого $j \in S$ множество S_j наделяется структурой метрического пространства

---

[7] В случае $V^n = E^n$ касательные пространства стандартным образам отождествляются с E^n. После этого отождествления разность $df_x - dg_x$ (и норма этой разности) приобретает смысл.

[8] Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^3, риманова метрика — классу C^2.

заданием расстояния

$$\tilde{d}_1(f, g) = \sup_{x\in V^n} \inf_{u\in G(fx,\, gx)} \{s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \|\}; \tag{2}$$

здесь: $G(y, z)$ — множество всех кусочно-гладких путей u, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y, $s(u)$ — длина пути u, φ_u — преобразование, состоящее в параллельном перенесении касательных векторов вдоль пути u.

Замечание. Пусть $V^n = E^n$ (n-мерное евклидово пространство). Тогда метрика $\tilde{d}_1(\cdot, \cdot)$ индуцирует на S_j ту же топологию, что и метрика $\tilde{\tilde{d}}(\cdot, \cdot)$, определяемая формулой[9]:

$$\tilde{\tilde{d}}_S(f, g) = \sup_{x\in V^n}(| fx - gx | + \| df_x - dg_x \|).$$

Теорема. *Для всякого $j \in S$ в пространстве $S_j \times V^n$ имеется всюду плотное множество C_j типа G_δ такое, что при всяком $\lambda \in \mathbf{R}$ отображение $l_\lambda : S_j \times V^n \to \tilde{T}V^n$, определенное формулой*

$$l_\lambda(f, x) = \left\{ \mathfrak{x} \in T_x V^n : \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{m} \ln | df^m \mathfrak{x} | < \lambda \right\}$$

(*где* $\ln 0$ *считается равным* $-\infty$), *полунепрерывно снизу во всякой точке множества* C_j.

Чтобы убедиться в том, что только что сформулированная теорема является конкретизацией теоремы § 3, проведем следующие построения.

а) При всяком $j \in S$ множество S_j можно наделить и другой структурой метрического пространства, задав расстояние

$$d_1(f, g) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} \inf_{u\in G(fx,\, gx)} \{s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \| + (\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1} \|\} \tag{3}$$

(смысл обозначений разъяснен выше после формулы (2)). В [8, п. 5] доказано, что при всяком $j \in S$ формулы (2), (3) в самом деле определяют расстояния в S_j. В [8, п. 5] доказано, что при всяком $j \in S$ расстояние $d_1(\cdot, \cdot)$, определенное формулой (3) (в [8] ей соответствует формула (55)), индуцирует на S_j ту же топологию, что и расстояние $\tilde{d}_1(\cdot, \cdot)$, определенное формулой (2) (которой в [8] соответствует формула (56)). В силу предложения 2 из [9] метрическое пространство (S_j, d_1) полное (при всяком $j \in S$).

б) При всяком $j \in S$ положим

$$B_j = S_j \times V^n, \; E_j = S_j \times TV^n, \; p_j = 1_{S_j} \times \pi, \tag{4}$$

где TV^n — пространство касательного расслоения (TV^n, π, V^n) многообразия V^n, π — проекция этого расслоения (таким образом, $T_x V^n = \pi^{-1}(x)$ при всяком $x \in V^n$). При всяком $j \in S$ расстояние в B_j определяется формулой

$$\tilde{d}((f, x), (g, y)) = \tilde{d}_1(f, g) + \rho(x, y) \tag{5}$$

при всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$, $x \in V^n$, $y \in V^n$. При всяком $j \in S$ можно определить другое расстояние в B_j формулой

$$d((f, x), (g, y)) = d_1(f, g) + \rho(x, y) \tag{6}$$

для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$, $x \in V^n$, $y \in V^n$.

---

[9] В случае $V^n = E^n$ касательные пространства стандартным образам отождествляются с E^n. После этого отождествления разность $df_x - dg_x$ (и норма этой разности) приобретает смысл.

Так как при всяком $j \in S$ расстояние $d_1(\cdot,\ \cdot)$ индуцирует на S_j ту же топологию, что и расстояние $\tilde{d}_1(\cdot,\ \cdot)$, то при всяком $j \in S$ расстояние $d(\cdot,\ \cdot)$, определенное формулой (6), индуцирует на B_j ту же топологию, что и расстояние $\tilde{d}(\cdot,\ \cdot)$, определенное формулой (5).

При всяком $j \in S$ топологическое пространство E_j определяется как произведение топологического пространства S_j (с топологией, индуцированной расстоянием $\tilde{d}_1(\cdot,\ \cdot)$; напомним, что эта топология совпадает с топологией, индуцированной расстоянием $d_1(\cdot,\ \cdot)$) и топологического пространства TV^n.

Непрерывность отображения

$$p_j = 1_{S_j} \times \pi : E_j \to B_j$$

вытекает (при всяком $j \in S$) в силу определения топологии на E_j и формулы (5) из непрерывности отображения $\pi : TV^n \to V^n$.

в) При всяком $j \in S$ расслоение, определенное формулой (4), естественным образом наделяется структурой векторного расслоения со слоем $\mathbf{R}^n$; а именно, векторное расслоение $(E_j,\ p_j,\ B_j)$ определяется как векторное расслоение, индуцированное отображением $\mathrm{pr}_2 : S_j \times V^n \to V^n$ (pr_2 — проекция произведения на второй сомножитель) и касательным расслоением $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ многообразия V^n (библиографические указания и эквивалентное определение с помощью атласов см. в [10, п. 1, § 1]).

г) При всяком $j \in S$ на так определенном векторном расслоении $(E_j,\ p_j,\ B_j)$ зададим риманову метрику $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$, положив для всяких $\xi \in E_j$, $\eta \in E_j$ таких, что $p_j\xi = p_j\eta$, по определению

$$\langle \xi,\ \eta \rangle = \delta\,(\mathrm{pr}_2\xi,\ \mathrm{pr}_2\eta), \tag{7}$$

где pr_2 — проекция произведения $E_j = S_j \times TV^n$ на второй сомножитель, а $\delta(\cdot,\ \cdot)$ — риманова метрика, имеющаяся на V^n как на римановом многообразии. Легко доказывается (это доказательство подробно изложено в [10, п. 1, § 1]), что $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$, определенное формулой (7), является римановой метрикой векторного расслоения $(E_j,\ p_j,\ B_j)$, определенного в подпунктах б), в).

д) При всяком $j \in S$ при всяком $t \in \mathbf{Z}$ положим

$$\mathfrak{H}_j t = (X_j^t,\ \chi_j^t) \tag{8}$$

где отображения $X_j : E_j \to E_j$, $\chi_j : B_j \to B_j$ определены следующим образом: всякое $\xi \in E_j$ есть, согласно формуле (4), пара $(f,\ \mathfrak{x})$, где $f \in S_j$, $\mathfrak{x} \in TV^n$ полагаем

$$X_j\xi = X_j(f,\ \mathfrak{x}) = (f,\ df\mathfrak{x}); \tag{9}$$

всякое $b \in B_j$ есть, согласно формуле (4), пара $(f,\ x)$, где $f \in S_j$, $x \in V^n$; полагаем

$$\chi_j b = \chi_j(f,\ x) = (f,\ fx). \tag{10}$$

При всяком $j \in S$ пара отображений $(X_j,\ \chi_j)$, определенных формулами (9), (10), есть автоморфизм векторного расслоения $(E_j,\ p_j,\ B_j)$ (это доказано в [10] — см. п. 2 § 1 и замечание 2 в конце § 1 цитируемой статьи).

Поэтому при всяком $j \in S$ формула (8) имеет смысл и определяет гомоморфизм $\mathfrak{H}_j \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E_j,\ p_j,\ B_j))$ (гомоморфизм группы $\mathbf{Z}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения $(E_j,\ p_j,\ B_j)$).

е) При всяком $j \in S$ отображение $X_j : E_j \to E_j$ (соответственно, $\chi_j : B_j \to B_j$)

является, как видно из сравнения формулы (9) с формулой (10) из § 8 (соответственно, формулы (10) с формулой (11) из § 8), сужением на множество

$$E_j = S_j \times TV^n \subset S \times TV^n = E$$

отображения $X : E \to E$, определенного формулой (10) в § 8 (соответственно, сужением на множество

$$B_j = S_j \times V^n \subset S \times V^n = B$$

отображения $\chi : B \to B$, определенного формулой (11) в § 8).

В п. e) § 8 доказано, что для функции $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$, определенной формулой (12) в § 8, и отображений $X : E \to E$, $\chi : B \to B$, определенных формулами (10) в § 8, (11) в § 8, при всяком $b \in B$ имеют место равенство

$$a(\chi b) = a(b)$$

(это — формула (13) из § 8) и неравенство

$$\max\{\| X[b] \|, \ \| (X[b])^{-1} \|\} \leqslant \exp(a(b))$$

(это — формула (14) из § 8). Следовательно, при всяком $j \in S$ для функции $a_j(\cdot) : B_j \to \mathbf{R}^+$, определяемой как сужение на B_j функции $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$, определенной формулой (12) в § 8, и отображений $X_j : E_j \to E_j$, $\chi_j : B_j \to B_j$, определенных формулами (9), (10), при всяком $b \in B_j$ имеют место равенство

$$a_j(\chi_j b) = a_j(b). \qquad (11)$$

и неравенство

$$\max\{\| X_j[b] \|, \ \| (X_j[b])^{-1} \|\} \leqslant \exp(a_j(b)). \qquad (12)$$

Таким образом, при всяком $j \in S$ автоморфизм $(X_j, \chi_j) \in \mathrm{Aut}\,(E_j, p_j, B_j)$, определенный формулами (9), (10), удовлетворяет условиям пп. 1, 2 введения [10] (формулам (В.1.1), (В.1.2) цитируемой статьи соответствуют формулы (11), (12)). В п. 1.4 введения [10] доказано: из того, что для автоморфизма $(X_j, \chi_j) \in \mathrm{Aut}\,(E_j, p_j, B_j)$ при всяком $b \in B_j$ имеют место формулы (11), (12), следует, что для гомоморфизма $\mathfrak{H}_j \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z}, \ \mathrm{Aut}\,(E_j, p_j, B_j))$, определенного формулой (8), имеет место формула[10]

$$\max\{\| X_j(m, b) \|, \ \| (X_j(m, b))^{-1} \|\} \leqslant \exp(a_j(b))$$

(при всяких $b \in B_j$, $m \in \mathbf{Z}$ (в цитируемой статье этой формуле соответствует формула (В. 1.4)) и формула

$$a_j(\chi^m b) = a_j(b)$$

(при всяких $b \in B_j$, $m \in \mathbf{Z}$ (в цитируемой статье этой формуле соответствует формула (В.1.6)), т. е. выполнены условия п. 2 § 1.

При всяком $j \in S$ к векторному расслоению (E_j, p_j, B_j) с римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и гомоморфизму $\mathfrak{H}_j \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z}, \ \mathrm{Aut}\,(E_j, p_j, B_j))$, построенным в этом пункте, применима теорема § 3, так как построенные объекты удовлетворяют условиям, сформулированным во введении.

Остается только пояснить, что $E(\mathfrak{H}, \lambda, b)$, фигурирующее в теореме § 3, в рассматриваемой сейчас ситуации (здесь $b = (f, x)$) равно $\{f\} \times l_\lambda(f, x)$, и вывод теоремы этого параграфа из теоремы § 3 закончен.

§ 10

---

[10] $X_j(m, b) = X_j^m[b]$ — сужение отображения X_j^m на слой $p_j^{-1}(b)$.

Пусть V^n — связное полное n-мерное риманово многообразие[11]. Через S обозначается множество всех векторных полей F класса C^1 на V^n удовлетворяющих условию[12]

$$\sup_{x\in V^n} \|\nabla F(x)\| < +\infty.$$

В множестве S определяется расстояние

$$d(F,\ G) = |F(x_0) - G(x_0)| + \sup_{x\in V^n} \|\nabla F(x) - \nabla G(x)\|,$$

где x_0 — некоторая фиксированная точка многообразия V^n.

Всякое векторное поле $F \in S$ индуцирует гладкое (класса C^1) действие f^t группы $\mathbf{R}$ на V^n.

Через $S \times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S (с топологией, индуцированной метрикой $d(\cdot,\ \cdot)$) и топологического пространства V^n.

Для всякого $J \in S$ через S_J обозначается подмножество множества S, состоящее из векторных полей, удовлетворяющих условию $\sup_{x\in V^n} |F(x) - J(x)| < +\infty$ (если V^n компактно (т. е. замкнутое многообразие), то $S_J = S$ для всякого $J \in S$).

Через $d_1(\cdot,\ \cdot)$ обозначается расстояние в S_J, определяемое формулой

$$d_1(F,\ G) = \sup_{x\in V^n} |F(x) - G(x)| + \sup_{x\in V^n} \|\nabla(F - G)(x)\|.$$

Для всякого $J \in S$ через $S_J \times V^n$ обозначается произведение топологического пространства S_J (с топологией, индуцированной метрикой $d_1(\cdot,\ \cdot)$) и топологического пространства V^n.

Теорема. *В пространстве $S \times V^n$ имеется всюду плотное множество C типа G_δ такое, что при всяком $\lambda \in \mathbf{R}$* отображение[13] $l_\lambda : S \times V^n \to \tilde{T}V^n$, *определенное формулой*[14]

$$l_\lambda(F,\ x) = \left\{ \mathfrak{x} \in T_x V^n : \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln |df^t \mathfrak{x}| < \lambda \right\}, \tag{1}$$

где f^t — действие группы $\mathbf{R}$ на V^n индуцированное векторным полем $F \in S$, полунепрерывно снизу во всякой точке множества C.

Для всякого $J \in S$ имеет место

Теорема$_J$. *В пространстве $S_J \times V^n$ имеется всюду плотное множество C_J, типа G_δ такое, что при всяком $\lambda \in \mathbf{R}$ отображение $l_\lambda : S_J \times V^n \to \tilde{T}V^n$, определенное формулой* (1) (*где f^t — действие группы $\mathbf{R}$ на V^n, индуцированное векторным полем $F \in S_J$*), *полунепрерывно снизу во всякой точке множества C_J.*

Если V^n — связное замкнутое дифференцируемое многообразие, то какой бы римановой метрикой его ни наделить, пространство S будет одним и тем же топологическим пространством — пространством векторных полей класса C^1 на V^n, наделенным C^1-топологией, и при всяком $J \in S$ топологическое пространство S_J совпадает с топологическим пространством S. Таким образом, для замкнутого

---

[11] Предполагается, что многообразие V^n принадлежит классу C^3, риманова метрика — классу C^2.

[12] Через $\nabla F(x)$ обозначается ковариантный дифференциал векторного поля F в точке x. Через $\|\cdot\|$ обозначается норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой.

[13] Определение пространства TV^n см. в § 8.

[14] $\ln 0$ по определению считаем $= -\infty$.

многообразия V^n сформулированные в этом параграфе теоремы все совпадают и вдобавок дифференциально-топологически инвариантны. Теорема 2, сформулированная во введении, и есть частный случай этих теорем (для замкнутого V^n).

Сформулированные теоремы выводятся из теоремы § 3 с помощью следующих конструкций.

Положим $B = S \times V^n$. Так как S и V^n — полные метрические пространства, то S — полное метрическое пространство. Положим

$$E = S \times TV^n, \; p = 1_S \times \pi .$$

Так определенное расслоение (E, p, B) наделяется структурой векторного расслоения (со слоем $\mathbf{R}^n$) заданием атласа (см. [1, гл. 3, раздел 1; гл. 5, раздел 2])

$$\{g_i : (S \times U_i) \times \mathbf{R}^n \to p^{-1}(S \times U_i)\}_{i \in \mathfrak{I}}$$

определенного по атласу

$$\{h_i : U_i \times \mathbf{R}^n \to \pi^{-1}(U_i)\}_{i \in \mathfrak{I}}$$

(где $\mathfrak{I}$ — некоторое множество) векторного расслоения (TV^n, π, V^n) формулой $g_i = 1_S \times h_i$ (чтобы придать смысл этой формуле, надо рассмотреть $(S \times U_i) \times \mathbf{R}^n$ как $S \times (U_i \times \mathbf{R}^n)$). Так определенное векторное расслоение (E, p, B) можно эквивалентным образом определить как векторное расслоение, индуцированное отображением $\mathrm{pr}_2 : S \times V^n \to V^n$ (pr_2 — проекция произведения на второй сомножитель) и векторным расслоением (TV^n, π, V^n) (см. [1, гл. 2, п. 5.3 и гл. 3, п. 3.1]).

Векторное расслоение (E, p, B) со слоем $\mathbf{R}^n$ и базой B, являющейся полным метрическим пространством, построено. На векторном расслоении (TV^n, π, V^n) имеется риманова метрика (класса C^2), т. е. гладкое (класса C^2) отображение δ подпространства прямого произведения $TV^n \times TV^n$, состоящего из всех тех точек $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, для которых $\pi\mathfrak{x} = \pi\mathfrak{y}$, в $\mathbf{R}$ такое, что для всякого $x \in V^n$ сужение на векторное пространство $\pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x)$ отображения δ является скалярным произведением на слое $\pi^{-1}(x)$. Рассмотрим подпространство прямого произведения $E \times E$, состоящее из всех тех точек (ξ, η), для которых $p\xi = p\eta$. Зададим отображение этого подпространства в $\mathbf{R}$ формулой

$$\langle \xi, \eta \rangle = \delta(\mathrm{pr}_2\xi, \mathrm{pr}_2\eta),$$

где через pr_2 обозначаем проекцию произведения $E = S \times TV^n$ на второй сомножитель. Обозначим через p_2 проекцию произведения $B = S \times V^n$ на второй сомножитель. Обозначим через $\mathrm{pr}_{2,b}$ сужение на pr_2 слой $p^{-1}(b)$. Так как для всякого $b \in B$ отображение есть $\mathrm{pr}_{2,b}$ изоморфизм векторного пространства $p^{-1}(b)$ на векторное пространство $\pi^{-1}(p_2 b)$, а сужение δ на $\pi^{-1}(p_2 b) \times \pi^{-1}(p_2 b)$ является скалярным произведением на слое $\pi^{-1}(p_2 b)$, то для всякого $b \in B$ сужение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $p^{-1}(b) \times p^{-1}(b)$ является скалярным произведением на слое $p^{-1}(b)$. Так как отображения pr_2 и δ непрерывны, то отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ непрерывное. Таким образом, мы зафиксировали риманову метрику $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на векторном расслоении (E, p, B).

Пусть $F \in S$ векторное поле F индуцирует дифференцируемое (класса C^1) действие f^t группы $\mathbf{R}$ на многообразии V^n.

Через df^t обозначим производную отображения f^t. При всяком $t \in \mathbf{R}$ пара отображений

$$(df^t, f^t) : (TV^n, \pi, V^n) \to (TV^n, \pi, V^n)$$

является автоморфизмом касательного расслоения $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ многообразия V^n. Для всяких $t \in \mathbf{R}$, $F \in S$, $\mathfrak{x} \in TV^n$ полагаем

$$X^t(F,\ \mathfrak{x}) = (F,\ df^t\mathfrak{x}).$$

Для всяких $t \in \mathbf{R}$, $F \in S$, $x \in V^n$ полагаем

$$\chi^t(F,\ x) = (F,\ f^t x).$$

Гомоморфизм $\mathfrak{H} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R},\ \mathrm{Aut}\,(E,\ p,\ B))$ определяется формулой $\mathfrak{H}t = (X^t,\ \chi^t)$ (для всякого $t \in \mathbf{R}$).

Определим функцию $a(\cdot)$ следующим образом: всякое $b \in B$ есть пара $(F,\ x)$, где $F \in S$, $x \in V^n$. Положим

$$a(b) = a((F, x)) = ||| \nabla F ||| \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \| \nabla F(x) \|.$$

Из определения пространства S следует, что только что определенная функция $a(\cdot)$ отображает B в $\mathbf{R}^+$.

Так определенные объекты удовлетворяют условиям, сформулированным в пп. 1—2 § 1 (см. § 1 в [11]), а сформулированная выше теорема является конкретизацией теоремы § 3 для этих объектов.

Для всякого $J \in S$ по определенному выше в этом параграфе векторному расслоению строится (сужением базы — вместо базы $B = S \times V^n$ берется база $B_J = S_J \times V^n$) векторное расслоение $(E_J,\ p_J,\ B_J)$ с римановой метрикой, определяемой как сужение римановой метрики $\langle \cdot,\ \cdot \rangle$, построенной в этом параграфе на $(E,\ p,\ B)$. Гомоморфизм $\mathfrak{H}_J \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R},\ \mathrm{Aut}\,(E_J,\ p_J,\ B_J))$ определяем формулой

$$\mathfrak{H}_J t = (X_J^t,\ \chi_J^t) \quad (t \in \mathbf{R})$$

где X_J^t — сужение на E_J отображения $X^t : E \to E$ а χ_J^t — сужение на B_J отображения $\chi^t : B \to B$.

Сформулированная выше теорема$_J$ является конкретизацией теоремы § 3 для так определенного гомоморфизма $\mathfrak{H}_J$.

Замечание. От каждого из пространств S, S_j, S_J, рассмотренных в §§ 7—10, можно перейти к любому замкнутому (и к любому открытому) подпространству. Так получаются аналоги теорем §§ 7—10 для систем с инвариантной мерой, гамильтоновых систем, симплектических диффеоморфизмов, вообще для систем с заданным множеством интегральных инвариантов, для любой индивидуальной системы (если от пространств типа S перейти к их одноточечным подмножествам), а также для системы, зависящей от параметров (если от пространства S, S_j, S_J, перейти к его подпространству, являющемуся гомеоморфным образом $\mathbf{R}^k$).

Литература

1. *Хьюзмоллер Д*. Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.

2. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. X — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, №12, с. 2132—2148.

3. *Бурбаки Н*. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. М.: Наука, 1975.

4. *Миллионщиков В. М.* Об индексах экспоненциальной разделенности.— Матем. сб.,. 1984, т. 124(166), с. 451—485.

5. *Baire R*. Lecons sur les fonctions discontinues. Paris: Gauthier — Villars, 1905.

6. *Хаусдорф Ф*. Теория множеств. М.—Л.: ОНТИ, 1937.

7. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I —

Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 8, с. 1408—1416.
8. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VI — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 5, с. 804—821.
9. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VII — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 6, с. 957—978.
10. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. VIII — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 8, с. 1330—1345.
11. *Миллионщиков В. М.* Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. III — Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 10, с. 1766—1785.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
30.1.1984