ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ДЕКАБРЬ 1967, ТОМ III, № 12

УДК 517.9

О СВЯЗИ МЕЖДУ УСТОЙЧИВОСТЬЮ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И ПОЧТИ ПРИВОДИМОСТЬЮ СИСТЕМ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. М. Миллионщиков

Изучение структуры решений систем с почти периодическими коэффициентами представляет собой, по-видимому, трудную и пока не решенную задачу (см. [1]). Существуют работы, дающие условия, при которых такая система приводима ([5 — 8]) (эти условия носят в высшей степени специальный характер), а также работы, в которых изучается связь между почти приводимостью систем с почти периодическими коэффициентами и другими, но уже общими свойствами этих систем ([9, 10]). Настоящая работа относится ко второму из названных направлений.

Пусть дана функция $\varphi(t)$, ограниченная и равномерно непрерывная на прямой. Через D_φ будем обозначать динамическую систему, определенную следующим образом:

Пространство R_φ системы D_φ состоит из функций $\widetilde{\varphi}(t) = \lim\limits_{k\to\infty}\varphi(t_k + t)$ (предел равномерный на отрезках) и наделено топологией равномерной сходимости на отрезках (оно метризуемо, см. [3], стр. 533 — 534, и компактно, см. [3], стр. 535). Динамическая система D_φ задается на R_φ следующим образом:

$$f(\widetilde{\varphi}(t),\tau) = \widetilde{\varphi}(t+\tau)$$

(см. [3], стр. 534). Отметим, что значения $\varphi(t)$ могут быть матрицами.

Определение 1. Функцию $\varphi(t)$, ограниченную и равномерно непрерывную на прямой, будем называть рекуррентной, если траектория $f(\varphi(t)),\tau)$ в D_φ рекуррентна.

Теорема 1. Пусть дана система

$$x = A(t)x \quad (x \in E^n) \tag{1}$$

и пусть $A(t)$ рекуррентна. Тогда система (1) перроновским преобразованием $x = U(t)u$ ([2], стр. 261 — 266) с рекуррентной матрицей $U(t)$ приводится к треугольному виду $\dot{u} = P(t)u$ с рекуррентной матрицей $P(t)$.

Доказательство. 1) Пусть $U(t)$ — перроновское преобразование, приводящее систему (1) к треугольному виду

$$\dot{u} = P(t)u \equiv (U^{-1}AU - U^{-1}\dot{U})u. \tag{2}$$

Тогда, как известно (см. [2], стр. 265, 247),

$$\|\dot{U}(t)\| \leqslant const.$$

Докажем, что из равномерной непрерывности на прямой матрицы $A(t)$ вытекает, что $\dot{U}(t)$ равномерно непрерывна на прямой. В самом деле, из $\|U(t)\| \leqslant const$ следует, что $U(t)$ равномерно непрерывна на прямой, значит, то же верно и для $U^{-1}(t) = U^*(t)$. А так как, кроме того,

$$\|U^{-1}(t)\| = \|U(t)\| = 1, \quad \|A(t)\| \leqslant const,$$

то $U^{-1}AU$ равномерно непрерывна на прямой. Но, значит, и $U^{-1}\dot{U}$ равномерно непрерывна на прямой (так как поддиагональные элементы матрицы $U^{-1}\dot{U}$ равны соответствующим элементам матрицы $U^{-1}AU$ (матрица $P(t)$ треугольная), и матрица $U^{-1}AU$ кососимметрична). Отсюда $U = U(U^{-1}U)$ равномерно непрерывна на прямой. Из доказанного вытекает также, что $P(t)$ равномерно непрерывна на прямой.

2) Пусть числовая последовательность $\{t_k\}$ такова, что

$$A(t_k + t) \underset{k\to\infty}{\to} \widetilde{A}(t)$$

равномерно на отрезках. Так как $\|U(t)\| = 1$, $\|U(t)\| \leqslant const$, $U(t)$ равномерно непрерывна на прямой, то по теореме Асколи ([4], стр. 43) из $\{t_k\}$ можно выбрать подпоследовательность (мы будем обозначать ее тоже $\{t_k\}$), для которой

$$U(t_k + t) \to \widetilde{U}(t),$$
$$U(t_k + t) \to \widetilde{V}(t)$$

равномерно на отрезках. Имеем

$$\widetilde{V}(t) = \frac{d}{dt}\widetilde{U}(t).$$

Заметим, что на самом деле «$U(t_k + t) \to \widetilde{U}(t)$ равномерно на отрезках» влечет «$\dot{U}(t_k + t) \to \widetilde{V}(t)$ равномерно на отрезках»; это доказывается точно так же, как мы доказывали равномерную непрерывность $U(t)$

Из (2) имеем

$$P(t_k + t) = U^{-1}(t_k + t)A(t_k + t)U(t_k + t) - U^{-1}(t_k + t)\dot{U}(t_k + t).$$

Перейдем к пределу при $k \to \infty$ (предел равномерный на отрезках)

$$\widetilde{P}(t) \equiv \lim_{k\to\infty} P(t_k + t) = \widetilde{U}^{-1}(t)\widetilde{A}(t)\widetilde{U}(t) - \widetilde{U}^{-1}(t)\dot{\widetilde{U}}(t). \qquad (3)$$

Формула (3) означает, что ортогональное преобразование $x = \widetilde{U}(t)u$ приводит систему $\dot{x} = \widetilde{A}(t)x$ к треугольному виду $\dot{u} = \tilde{P}(t)u.$

3) $U(t)$ определяет в динамической системе сдвигов D_U устойчивую по Лагранжу траекторию (так как $U(t)$ равномерно непрерывна и ограничена, см. [3], стр. 535). Поэтому существует *рекуррентная* $\widetilde{U}(t) = \lim_{k\to\infty} U(t_k + t)$ (предел равномерный на отрезках). Выберем из $\{t_k\}$ подпоследовательность (ее обозначим снова $\{t_k\}$) так, чтобы последовательность $A(t_k + t)$ сходилась равномерно на отрезках (к некоторой $\widetilde{A}(t)$ (см. [4], стр. 43). Тогда, как доказано в п. 2), преобразование $x = \widetilde{U}(t)u$ приводит систему $x = \widetilde{A}(t)x$ к треугольному виду $\dot{u} = \tilde{P}(t)u.$ $\tilde{P}(t)$ равномерно непрерывна в силу (3) и равномерной непрерывности $P(t)$. Поэтому $\tilde{P}(t)$ определяет в динамической системе сдвигов $D_{\tilde{P}}$ устойчивую по Лагранжу траекторию и, следовательно, найдется последовательность $\{\theta_k\}$, такая, что $\widetilde{P}(\theta_k + t) \underset{k\to\infty}{\to} \widetilde{P}(t)$ равномерно на отрезках и $\tilde{P}(t)$ рекуррентна. Выберем из $\{\theta_k\}$ подпоследовательность (ее снова обозначим $\{\theta_k\}$) так, что

$$A(\theta_k + t) \to \widetilde{A}(t),$$
$$U(\theta_k + t) \to \widetilde{U}(t)$$

равномерно на отрезках ([4], стр. 43). По доказанному в пункте 2) преобразование $x = \overset{\approx}{U}(t)u$ приводит систему $\dot{x} = \overset{\approx}{A}(t)x$ к треугольному виду $\dot{u} = \overset{\approx}{P}(t)u.$

Теперь (в силу рекуррентности $A(t)$ это возможно) возьмем последовательность $\{\tau_k\}$ такую, что $\tilde{\tilde{A}}(\tau_k+t)\to A(t)$ равномерно на отрезках. При этом можно считать (на самом деле из $\{\tau_k\}$ нужно выбрать подпоследовательность), что

$$\tilde{\tilde{U}}(\tau_k+t)\to V(t),$$

$$\tilde{\tilde{P}}(\tau_k+t)\to Q(t)$$

равномерно на отрезках. Так как $\tilde{\tilde{U}}(t)$ и $\tilde{\tilde{P}}(t)$ рекуррентны, то и $V(t), Q(t))$ рекуррентны. По доказанному в п. 2) система $x=A(t)x$ ортогональным преобразованием $x=V(t)v$ с рекуррентной матрицей $V(t)$ приводится к треугольному виду $v=Q(t)v$ с рекуррентной матрицей $Q(t)$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В случае комплексной $A(t)$ все то же, только слово «ортогональное» надо всюду заменить на «унитарное».

Л е м м а. Пусть $p(t)$ — рекуррентная числовая функция. Найдется $\tilde{p}(t)=\lim\limits_{k\to\infty}p(t_k+t)$ (предел равномерный на отрезках), такая, что

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\tilde{p}(\xi)d\xi=\overline{\lambda}_p,$$

$$\underline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\tilde{p}(\xi)d\xi=\underline{\lambda}_p,$$

где

$$\overline{\lambda}_p=\overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}}\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t p(\xi)d\xi,$$

$$\underline{\lambda}_p\ \underline{\lim_{t-\tau\to+\infty}}\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t p(\xi)d\xi.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть дан отрезок $[\sigma_1,\sigma_2]$ и число $T\leqslant\sigma_2-\sigma_1$. Пусть

$$\frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}p(\tau)d\tau=\mu. \tag{4}$$

Тогда найдется отрезок $[\rho_1,\rho_2]\subseteq[\sigma_1,\sigma_2]$, такой, что $T\leqslant\rho_2-\rho_1\leqslant 2T$ и

$$\frac{1}{\rho_2-\rho_1}\int_{\rho_1}^{\rho_2}p(\tau)d\tau=\mu.$$

Докажем это. Отложим на отрезке $[\sigma_1,\sigma_2]$ слева направо отрезки длины T. Получим m отрезков $Q_1,Q_2,\ldots,Q_m$ длины T и остаток Q_{m+1} длины $<T$. Если среднее от $p(t)$ на каком- то $Q_i (i\leqslant m)$ равно μ, то все доказано. Если нет, то (предположим для определенности, что среднее от $p(t)$ на Q_1 меньше μ пусть i_0 — наименьшее из тех $i\leqslant m+1$, для которых

$$\frac{1}{mesQ_i}\int_{Q_i}p(\tau)d\tau>\mu$$

(такие i существуют в силу (4)). Тогда (обозначим $a<b<c$ концы отрезков Q_{i_0-1}, Q_{i_0})

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(\tau)d\tau<\mu, \tag{5}$$

$$\frac{1}{c-b}\int_b^c p(\tau)d\tau>\mu. \tag{6}$$

Рассмотрим 3 случая:

$$а) \quad i_0 \leqslant m; \qquad \frac{1}{c-a}\int_a^c p(\tau)d\tau \leqslant \mu, \tag{7}$$

$$б) \quad i_0 \leqslant m; \qquad \frac{1}{c-a}\int_a^c p(\tau)d\tau > \mu, \tag{8}$$

$$в) \quad i_0 = m+1. \tag{9}$$

Случай а) $\overline{u}(t) = \dfrac{1}{c-t}\displaystyle\int_t^c p(\tau)d\tau$ — непрерывная функция, $\overline{u}(b) > \mu$ (в силу (6)), $\overline{u}(a) \leqslant \mu$ (в силу (7)). Значит, найдется $\overline{t} \in [a,b]$, такое, что $\overline{u}(\overline{t}) = \mu$; тогда отрезок $[\rho_1, \rho_2] = [\overline{t}, c]$— искомый.

Случай б) $\underline{u}(t) = \dfrac{1}{t-a}\displaystyle\int_a^t p(\tau)d\tau$ — непрерывная функция, $\underline{u}(b) < \mu$ (в силу (5)), $\underline{u}(c) > \mu$, (в силу (8)). Значит, найдется $t \in [b,c]$, такое, что $\underline{u}(\underline{t}) = \mu$; тогда отрезок $[\rho_1, \rho_2]$ $=[a, \underset{c}{\underline{t}}]$— искомый.

Случай в). В этом случае $\dfrac{1}{c-a}\displaystyle\int_a^c p(\tau)d\tau > \mu$, поэтому рассматривается так же, как случай б).

Для всяких $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ существует отрезок $[\tau_1, t_1]$ длины $t_1 - \tau_1 > T$, на котором

$$\frac{1}{t_1-\tau_1}\int_{\tau_1}^{t_1} p(\xi)d\xi > \overline{\lambda}_p - \varepsilon,$$

и существует отрезок $[\tau_2, t_2]$ длины $t_2 - \tau_2 > T$, на котором

$$\frac{1}{t_2-\tau_2}\int_{\tau_2}^{t_2} p(\xi)d\xi < \underline{\lambda}_p + \varepsilon.$$

Поэтому в силу п. 1) для всяких $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ найдется отрезок $[\tau_1, t_1]$, для которого

$$T \leqslant t_1 - \tau_1 \leqslant 2T,$$

$$\frac{1}{t_1-\tau_1}\int_{\tau_1}^{t_1} p(\xi)d\xi > \overline{\lambda}_p - \varepsilon,$$

и найдется отрезок $[\tau_2, t_2]$, для которого

$$T \leqslant t_2 - \tau_2 \leqslant 2T,$$

$$\frac{1}{t_2-\tau_2}\int_{\tau_2}^{t_2} p(\xi)d\xi < \underline{\lambda}_p + \varepsilon.$$

3) В силу рекуррентности $p(t)$ для всяких $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ существует $f_\varepsilon(T) > 0$ такое, что для всякого τ на всяком отрезке B длины $\geqslant f_\varepsilon(T)$ найдется θ, такое, что

$$|p(\tau+t) - p(\theta+t)| < \varepsilon$$

при $0 \leqslant t \leqslant 2T$, и что $\theta + 2T \in B$.

4) Фиксируем произвольное $T > 0$. На всяком отрезке длины $\geqslant f_\varepsilon(T)$ найдется отрезок $[\tau', t']$ такой, что $T \leqslant t' - \tau' \leqslant 2T$ и

$$\frac{1}{t'-\tau'}\int_{\tau'}^{t'} p(\xi)d\xi > \overline{\lambda}_p + 2\varepsilon,$$

и найдется отрезок $[\tau'', t'']$, такой, что

$$T \leqslant t'' - \tau'' < 2T,$$

$$\frac{1}{t''-\tau''}\int_{\tau''}^{t''} p(\xi)d\xi < \underline{\lambda}_p + 2\varepsilon.$$

(Это утверждение вытекает из п. 2) и 3)).

5) Возьмем $\varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ $(\varepsilon_k > 0)$ и построим по индукции последовательность чисел: $T_1 = 1$. Пусть $T_1, ..., T_n$ определены, тогда положим

$$T_{n+1} = nf_{\varepsilon_n}(T_n).$$

6) Фиксируем любое натуральное k. Возьмем отрезок $\left[\tau_{2k+1}^{(2k+1)}, t_{2k+1}^{(2k+1)}\right]$, длина которого заключена между T_{2k+1} и $2T_{2k+1}$, а среднее от $p(t)$ на нем $> \overline{\lambda}_p - 2\varepsilon_{2k+1}$. Разделим этот отрезок на $2k$ равных частей. Самый левый из получившихся при этом отрезков имеет (п. 5)) длину $\geqslant f_{\varepsilon_{2k}}(T_{2k})$. Поэтому на нем в силу п. 4) найдется отрезок $\left[\tau_{2k}^{(2k+1)}, t_{2k}^{(2k+1)}\right]$, длина которого заключена между T_{2k} и $2T_{2k}$, а среднее от $p(t)$ на нем $< \underline{\lambda}_p - 2\varepsilon_{2k}$. Этот отрезок разделим на $2k-1$ равных отрезков, и на самом левом из них найдем отрезок $\left[\tau_{2k-1}^{(2k+1)}, t_{2k-1}^{(2k+1)}\right]$, длина которого заключена между T_{2k-1} и $2T_{2k-1}$, а среднее от $p(t)$ на нем $> \overline{\lambda}_p - 2\varepsilon_{2k-1}$ и т. д. Получим систему отрезков

$$[\tau_i^{(2k+1)}, t_i^{(2k+1)}] \ \ (i = 1, 2, ..., 2k+1),$$

причем а) длина i-го отрезка заключена между T_i и $2T_i$; б) i-ый отрезок вложен в $(i+1)$-ый, причем все точки i-го отрезка отстоят от начала $(i+1)$-го отрезка меньше, чем на $\frac{1}{i}$-ую часть длины $(i+1)$-го отрезка; в) среднее от $p(t)$ на i-ом отрезке:

$$> \overline{\lambda}_p - 2\varepsilon_i \quad \text{при } i \text{ нечетном}$$

$$< \underline{\lambda}_p + 2\varepsilon_i \quad \text{при } i \text{ четном}$$

7) Это построение проделаем для всякого натурального k.

Выберем теперь последовательность индексов $k_j (j = 1, 2, ...)$ (по теореме Асколи это возможно) так, чтобы а) существовал равномерный на отрезках предел

$$\widetilde{p}(t) = \lim_{j\to\infty} p(\tau_1^{(k_j)} + t);$$

б) для каждого натурального i существовали пределы

$$t_i = \lim_{j\to\infty}[t_i^{(k_i)} - \tau_1^{(k_j)}].$$

$$\tau_i = \lim_{j\to\infty}[\tau_i^{(k_j)} - \tau_1^{(k_j)}].$$

8) $\tilde{p}(t)$ — искомая функция. В самом деле. Обозначим v_i среднее от $\tilde{p}(t)$ на $\left[\tau_i, t_i\right]$, $\mu_i^{(k)}$ среднее от $p(t)$ на $\left[\tau_i^{(k)}, t_i^{(k)}\right]$, тогда

$$v_i = \lim_{j\to\infty} \mu_i^{(k_j)} \underset{i\to\infty}{\to} \begin{cases} \overline{\lambda}_p & \text{по нечетным } i, \\ \underline{\lambda}_p & \text{по четным } i. \end{cases} \tag{9}$$

Из п. 6, б) вытекает, что слева от 0 лежит не более, чем $\frac{1}{i}$-ая часть отрезка $\left[\tau_i, t_i\right]$. Значит, $\lambda_i - v_i \underset{i\to\infty}{\to} 0$, где λ_i — среднее от $p(t)$ на $\left[0, t_i\right]$. Отсюда в силу (9)

$$\frac{1}{t_i}\int_0^{t_i} \widetilde{p}(\xi)d\xi \underset{i\to\infty}{\to} \begin{cases} \overline{\lambda}_p & \text{по нечетным } i, \\ \underline{\lambda}_p & \text{по четным } i. \end{cases}$$

Лемма доказана.

Определение 2. Скажем, что у системы $\dot{x} = A(t)x$ характеристические показатели устойчивы, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из $\|B(t)\| < \delta (t \geqslant 0)$ следует, что характеристические показатели $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_n$ системы $\dot{x} = A(t)x$ и характеристические показатели $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant ... \geqslant \mu_n$ системы $\dot{y} = A(t)y + B(t)y$ удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda_i - \mu_i| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Теорема 2. Пусть $A(t)$ — почти периодическая матрица, система $\dot{x} = A(t)x$ правильная (см. замечание в конце статьи) и характеристические показатели систем

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{10}$$

$$\dot{x} = -A^*(t)x \tag{11}$$

устойчивы. Тогда система (10) почти приводима (см. [2], стр. 272 — 273).

Доказательство. 1) Всякая система $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$, где $\tilde{A}(t) = \lim_{k\to\infty} A(t_k + t)$ (предел, равномерный на прямой), правильная (в условиях теоремы). Докажем это.

Существуют θ_k, такие, что $\tilde{A}(\theta_k + t) \underset{k\to\infty}{\to} A(t)$ равномерно на прямой.

Тогда и — $\tilde{A}^*(\theta_k + t) \underset{k\to\infty}{\to} A^*(t)$ равномерно на прямой. В силу устойчивости характеристических показателей систем (10) и (11) система $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$ имеет те же показатели, что и система (10), а система $\dot{x} = -\tilde{A}^*(t)x$ — те же показатели, что и система (11). Так как существует необходимое и достаточное условие правильности системы (10), выражающееся только через характеристические показатели систем (10) и (11) (см. [2], стр. 68 —69, теорема Перрона), то система $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$ правильная.

По теореме 1 существует перроновское преобразование $x = U(t)u$, приводящее систему (10) к треугольному виду $\dot{u} = P(t)u$ с рекуррентной матрицей $P(t)$, причем система $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$ приводится преобразованием $x = \tilde{U}(t)x$ к треугольному виду $\dot{u} = \tilde{P}(t)u$, где $\tilde{P}(t) = \lim_{k\to\infty} P(t_k + t)$ (предел, равномерный на отрезках). Так как всякая система $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$ правильная, то диагональные элементы всякой $\tilde{P}(t)$ имеют средние (существуют пределы $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \tilde{p}_{ii}(\tau)d\tau$) (см. [2], стр. 141, теорема Ляпунова). В силу леммы отсюда вытекает $\overline{\lambda}_{p_{ii}} = \underline{\lambda}_{p_{ii}}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ $p_{ii}(t)$ — i-ый диагональный элемент матрицы $P(t)$). Полученное равенство означает, что каждое $p_{ii}(t)$ имеет равномерное среднее, а значит, по теореме Б. Ф. Былова (см. [2], стр. 276) система $\dot{x} = A(t)x$ почти приводима. Теорема доказана.

Замечание. В теореме 2 требование правильности системы на самом деле излишне:

1) Легко показать, что для устойчивости характеристических показателей систем $\dot{x} = A(t)x$ и $\dot{x} = -A^*(t)x$ необходимо и достаточно выполнения этого свойства для некоторых $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$ и $\dot{x} = -(\tilde{A}(t))^* x$ (где $\tilde{A}(t) = \lim_{k\to\infty} A(t_k + t)$ (равномерный предел)).

2) Нетрудно доказать, что найдется правильная система $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$; к ней применим теорему 2, получим, что она почти приводима, а тогда, как легко видеть, и $\dot{x} = \tilde{A}(t)x$; почти приводима.

Литература

1. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Изд. АН БССР, 1963.
2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М., «Наука», 1966.
3. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. 2-е изд. М.—Л., ГТТИ, 1949.
4. Bourbaki N. Topologie generate. Chapitre 10. Espaces fonctionnels. Paris, 1949.
5. Гельман А. Е. ДАН СССР, **116,** № 4, 535—537, 1957.
6. Гельман А. Е. Дифференциальные уравнения, 1, № 3, 283—294, 1965.
7. Андрианова Л. Я. Вестник Ленинград, ун-та, № 7. Серия -матем., мех. и астроном., в. 2, 14—24, 1962.
8. Харасахал В. Х. ДАН СССР, **139,** № 2, 313—315, 1961.
9. Lillo J. C. Proc. Amer. Math. Soc, v. 12, № 1, 400—407, 1961.
10. Былов Б. Ф. Матем. сб., **66** (108) : 2, 1965, стр. 215—229.

Поступила в редакцию
25 марта 1967 г.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова