УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. X

ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть V^n — n-мерное связное дифференцируемое (класса C^3) многообразие со счетной базой, на котором фиксирована некоторая риманова метрика $\delta(\cdot,\cdot)$ (класса C^2). Через (TV^n,π,V^n) обозначаем касательное расслоение многообразия V^n, пространство TV^n которого стандартным образом наделяется структурой дифференцируемого многообразия (класса C^2).

С помощью римановой метрики $\delta(\cdot,\cdot)$ многообразие V^n стандартным способом наделяется структурой метрического пространства, которое обозначаем через (V^n,ρ), где $\rho(\cdot,\cdot)$ — расстояние.

Потребуем, чтобы метрическое пространство (V^n,ρ) было полным.

2. Через S обозначается множество всех диффеомофизмов $f: V^n \to V^n$ класса C^1, отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию [*]

$$\max\left\{\left\|df\right\|, \left\|(df)^{-1}\right\|\right\} < +\infty, \tag{B.1}$$

где

$$\left\|df\right\| \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n}\left\|df_x\right\|, \tag{B.2}$$

$$\left\|(df)^{-1}\right\| \underset{def}{=} \sup_{x\in V^n}\left\|(df_x)^{-1}\right\|. \tag{B.3}$$

Для всякого $j\in S$ через S_j обозначается подмножество множества *S,* состоящее из диффеоморфизмов *f*, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x\in V^n}\rho(fx, jx) < +\infty.$$

При всяком $j\in S$ множество S_j наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния (в [1] это формула (55)):

$$d_1(f,g) = \sup_{x\in V^n}\inf_{u\in G(fx,gx)}\left\{s(u) + \left\|\varphi_u dg_x - df_x\right\| + \left\|(\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1}\right\|\right\}; \tag{B.4}$$

здесь: 1) $G(y,z)$ — множество всех кусочно-гладких путей, идущих из точки *z* в точку *y;* при этом под кусочно-гладким путем, идущим из точки *z* в точку *y,* понимается непрерывное, имеющее кусочно-непрерывную производную отображение *u* отрезка [0, 1] в многообразие V^n, причем значение u_0 этого отображения в точке *0* равно *z,* а его

---

[*] Через dt_x обозначается производная отображения *f* в точке *x.* Через $\|\cdot\|$ обозначается норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определенная стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой $\delta(\cdot,\cdot)$.

значение u_1 в точке 1 равно y (через u_t обозначаем значение отображения u в точке $t \in [0,1]$);

2) $s(u) \underset{def}{=} \int_0^1 \left(\delta\left(\dot{u}_t, \dot{u}_t\right)\right)^{1/2} dt$ — длина пути u; (B.5)

3) $\varphi_u : \pi^{-1}(z) \to \pi^{-1}(y)$ — параллельный перенос вдоль пути $u \in G(y,z)$.

При всяком $j \in S$ *метрическое пространство* $\left(S_j, d_1\right)$ *полно* ([2] предложение 2).

3. При всяком $j \in S$ множество S_j наделяется также другой структурой метрического пространства заданием расстояния $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$, определяемого формулой (в [1] это формула (56)):

$$\tilde{d}_1(f,g) \underset{def}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(fx,gx)} \left\{ s(u) + \left\| \varphi_u dg_x - df_x \right\| \right\}. \tag{B.6}$$

При всяком $j \in S$ *расстояние* $d_1(\cdot,\cdot)$ *и расстояние* $\tilde{d}_1(\cdot,\cdot)$ *индуцируют на* S_j *одну и ту же топологию* (см. [1], п. 5).

4. Струей первого порядка[*)] (или 1-струей) (в многообразии V^n) называется тройка $\left(x, y, L_x^y\right)$, где[**)] $x \in V^n$, $y \in V^n$, $L_x^y \in Hom\left(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y)\right)$.

Множество всех 1-струй (в многообразии V^n) обозначаем через J_1V^n. Множество J_1V^n наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния $\rho_1(\cdot,\cdot)$, определяемого формулой

$$\rho_1\left(\left(x_1, y_1, L_{x_1}^{y_1}\right), \left(x_2, y_2, M_{x_2}^{y_2}\right)\right) \underset{def}{=} \inf_{\substack{u \in G(x_2, x_1) \\ \upsilon \in G(y_1, y_2)}} \left\{ s(u) + s(\upsilon) + \left\| \varphi_\upsilon M_{x_2}^{y_2} \varphi_u - L_{x_1}^{y_1} \right\| \right\} \tag{B.7}$$

для всяких $\left(x_1, y_1, L_{x_1}^{y_1}\right) \in J_1V^n$, $\left(x_2, y_2, M_{x_2}^{y_2}\right) \in J_1V^n$. В [4] доказано, что эта формула в самом деле определяет расстояние в множестве J_1V^n.

§ 1. Формула

$$p_1\left(x, y, L_x^y\right) \underset{def}{=} x \tag{1}$$

определяет отображение $\rho_1 : J_1V^n \to V^n$.

Предложение 1. *Отображение* p_1 *метрического пространства* $\left(J_1V^n, \rho_1\right)$ *в метрическое пространство* $\left(V^n, \rho\right)$ *равномерно непрерывно.*

Доказательство. Для всяких $\left(x_1, y_1, L_{x_1}^{y_1}\right) \in J_1V^n$, $\left(x_2, y_2, M_{x_2}^{y_2}\right) \in J_1V^n$ имеем

$$\rho\left(p_1\left(x_1, y_1, L_{x_1}^{y_1}\right), p_1\left(x_2, y_2, M_{x_2}^{y_2}\right)\right) \underset{(1)}{=} \rho\left(x_1, x_2\right) \underset{def}{=} \inf_{u \in G(x_2, x_1)} s(u) =$$

[*)] Это определение, как известно, согласуется с определением, приведенным в [3, с: 188].

[**)] Через $Hom\left(V_1, V_2\right)$ обозначается множество линейных отображений векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2.

$$= \inf_{\substack{u\in G(x_2,x_1)\\ \upsilon\in G(y_1,y_2)}} s(u) \leqslant \inf_{\substack{u\in G(x_2,x_1)\\ \upsilon\in G(y_1,y_2)}} \left\{ s(u)+s(\upsilon)+\left\|\varphi_\upsilon M_{x_2}^{y_2}\varphi_u - L_{x_1}^{y_1}\right\| \right\} \underset{(B.7)}{=} \rho_1\left(\left(x_1,y_1,L_{x_1}^{y_1}\right),\left(x_2,y_2,M_{x_2}^{y_2}\right)\right).$$

Предложение 1 доказано.

В силу предложения 1 тройка $\left(J_1V^n, p_1, V^n\right)$ является расслоением. В этой статье под $\left(J_1V^n, p_1, V^n\right)$ всюду понимается тройка $\left(\left(J_1V^n,\rho_1\right), p_1, \left(V^n p\right)\right)$ (для вас существенна не только топология, но и метрика (вернее, равномерная структура) на J_1V^n и на V^n).

Будем рассматривать сечения s расслоения $\left(J_1V^n, p_1, V^n\right)$, т.е. отображения $s: V^n \to I_1V^n$, удовлетворяющие равенству*) $p_1 s = 1_{V^n}$. Множество всех сечений расслоения $\left(J_1V^n, p_1, V^n\right)$ будем обозначать через $\mathbf{G}$. Напомним, что сечение s расслоения $\left(J_1V^n, p_1, V^n\right)$ называется равномерно непрерывным, если отображение $s:\left(V^n\rho\right)\to\left(J_1V^n,\rho_1\right)$ равномерно непрерывно, т. е. если для всякого**) $\varepsilon\in R_*^+$ найдется $\delta\in R_*^+$ такое, что для всяких точек $x\in V^n$, $y\in V^n$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x,y)<\delta$, выполнено неравенство $\rho_1(sx,sy)<\varepsilon$.

Множество всех равномерно непрерывных сечений расслоения $\left(J_1V^n, p_1, V^n\right)$ будем обозначать через $\mathfrak{S}^u$.

Для всякого $q\in\mathfrak{S}$ обозначим через $\mathfrak{S}_q$ множество всех $s\in\mathfrak{S}$, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{z\in V^n}\rho_1(sz,qz)<+\infty$.

При всяком $q\in\mathfrak{S}$ наделим множество $\mathfrak{S}_q$ структурой метрического пространства, задав расстояние

$$\tilde\rho_1(s_1,s_2) \underset{def}{=} \sup_{z\in V^n}\rho_1(s_1z,s_2z) \tag{2}$$

для всяких $s_1\in\mathfrak{S}_q$, $s_2\in\mathfrak{S}_q$.

Предложение 2. *Для всякого $q\in\mathfrak{S}$ множество $\mathfrak{S}_q\bigcap\mathfrak{S}^u$ замкнуто в метрическом пространстве $\left(\mathfrak{S}_q,\tilde\rho_1\right)$.*

Доказательство. Пусть дано $q\in\mathfrak{S}$. Пусть

$$s_i\in\mathfrak{S}_q\bigcap\mathfrak{S}^u \quad (i\in N), \quad \left(s\in\mathfrak{S}_q\right), \tag{3}$$

$$\tilde\rho_1(s_i,s)\underset{t\to\infty}{\to}0. \tag{4}$$

Пусть дано $\varepsilon\in R_*^+$. Возьмем $m=m(\varepsilon)\in N$ такое, что

$$\tilde\rho_1(s_m,s)<\frac{1}{3}\varepsilon \tag{5}$$

---

*) Таким образом, в принятом здесь определении сечения не требуется непрерывности отображения $s{:}V^n\to J_1V^n$

**) Через R_*^+ обозначается множество всех положительных вещественных чисел.

(такое m существует в силу формулы (4)). Так как $s_m \in \mathfrak{S}^u$, то найдется $\delta = \delta(\varepsilon, m(\varepsilon)) \in R_*^+$ такое, что для, всяких точек $x \in V^n, y \in V^n$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, y) < \delta$, выполнено неравенство

$$\rho_1(s_m x, s_m y) < \frac{1}{3}\varepsilon. \tag{6}$$

Для всяких точек $x \in V^n$, $y \in V^n$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, y) < \delta$, имеем

$$\rho_1(sx, sy) \leqslant \rho_1(sx, s_m x) + \rho_1(s_m x, s_m y) + \rho_1(s_m y, sy) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{z \in V^n} \rho_1(sz, s_m z) + \rho_1(s_m x, s_m y) + \sup_{z \in V^n} \rho_1(s_m z, sz) \underset{(2)}{=} 2\tilde{\rho}_1(s_m, s) + \rho_1(s_m x, s_m y) \underset{(6)}{\overset{(5)}{<}} \varepsilon.$$

Таким образом, доказано, что для всякого $\varepsilon \in R_*^+$ найдется $\delta \in R_*^+$ такое, что для всяких точек $x \in V^n, y \in V^n$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, y) < \delta$, выполнено неравенство $\rho_1(sx, sy) < \varepsilon$, иными словами, доказано, что $s \in \mathfrak{S}^u$. Предложение 2 доказано.

Пусть $f : V^n \to V^n$ — дифференцируемое отображение. Формула

$$jet_1 fx \underset{def}{=} (x, fx, df_x) \quad (x \in V^n) \tag{7}$$

определяет отображение $jet_1 f : V^n \to J_1 V^n$, называемое 1-струйным расширением отображения (см. [3], с. 188). Из формул (1), (7) следует формула $p_1 jet_1 f = 1_{V^n}$ (для всякого дифференцируемого отображения $f : V^n \to V^n$. Таким образом, для всякого дифференцируемого отображения $f : V^n \to V^n$ отображение $jet_1 f : V^n \to J_1 V^n$, определенное формулой (7), есть сечение расслоения $(J_1 V^n, p_1, V^n)$ (т.е. $jet_1 f \in \mathfrak{S}$).

Так как всякий элемент множества S (см. п. 2 введения) является диффеоморфизмом $V^n \to V^n$, то можно всякому $f \in S$ поставить в соответствие $jet_1 f \in \mathfrak{S}$ и таким образом определить отображение

$$jet_1 : S \to \mathfrak{S}. \tag{8}$$

Предложение 3. *Для всякого $j \in S$ отображение*[*)]

$$jet_1 |_{S_j} : S_j \to \mathfrak{S}.$$

является равномерно непрерывным отображением метрического пространства $(S_j, \tilde{d}_1)$ в метрическое пространство $(\mathfrak{S}_{jet_1 j}, \tilde{\rho}_1)$..

Доказательство. Пусть дано $j \in S$.

1) Пусть дано $f \in S_j$. Имеем

$$\tilde{d}_1(f, j) \underset{(B.6)}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(fx, jx)} \left\{ s(u) + \left\| \varphi_u dj_x - df_x \right\| \right\} < +\infty \tag{9}$$

(используемые в этой формуле обозначения разъяснены в п. 3 введения; в [1], п. 5 доказано, что $\tilde{d}_1(f, g) < +\infty$ для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$ (напомним, что $j \in S_j$, как видно из определения множества S_j, воспроизведенного выше в п. 2 введения)). Имеем

$$\sup_{x \in V^n} \rho_1(jet_1 fx, jet_1 jx) \underset{(7)}{=} \sup_{x \in V^n} \rho_1\big((x, fx, df_x), (x, jx, dj_x)\big) \underset{(B.7)}{=}$$

$$\underset{(B.7)}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{\substack{u \in G(x,x) \\ \upsilon \in G(fx, jx)}} \left\{ s(u) + s(\upsilon) + \left\| \varphi_\upsilon dj_x \varphi_u - df_x \right\| \right\}. \tag{10}$$

[*)] Через $jet_1|_{S_j}$ обозначается сужение на множество S_j отображения $jet_1 : S \to \mathfrak{S}$.

Так как при всяком $x \in V^n$ множеству $G(x,x)$ принадлежит путь $u[x]$, определенный формулой $u[x]_t \equiv x(t \in [0,1])$, для которого $s(u[x]) = 0$, $\varphi_{u[x]} = 1_{\pi^{-1}(x)}$, то при всяком $x \in V^n$ имеет место неравенство

$$\inf_{\substack{u \in G(x,x) \\ \upsilon \in G(fx, jx)}} \left\{ s(u) + s(\upsilon) + \left\| \varphi_\upsilon dj_x \varphi_u - df_x \right\| \right\} \leqslant \inf_{\upsilon \in G(fx, jx)} \left\{ s(\upsilon) + \left\| \varphi_\upsilon dj_x - df_x \right\| \right\}.$$

Поэтому из формулы (10) следует неравенство

$$\sup_{x \in V^n} \rho_1(jet_1 fx, jet_1 jx) \leqslant \sup_{x \in V^n} \inf_{\upsilon \in G(fx, jx)} \left\{ s(\upsilon) + \left\| \varphi_\upsilon dj_x - df_x \right\| \right\} \underset{(9)}{<} +\infty,$$

следовательно, $jet_1 f \in \mathfrak{S} jet_{1j}$.

Тем самым доказано включение

$$jet_1 S_j \subset \mathfrak{S} jet_{1j} \tag{11}$$

2) Пусть $f \in S_j$, $g \in S_j$. Имеем

$$\tilde{\rho}_1(jet_1 f, jet_1 g) \underset{(2)}{=} \sup_{x \in V^n} \rho_1(jet_1 fx, jet_1 gx) \underset{(7)}{=} \sup_{x \in V^n} \rho_1\left((x, fx, df_x), (x, gx, dg_x) \right) \underset{(B.7)}{=}$$

$$\underset{(B.7)}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{\substack{u \in G(x,x) \\ \upsilon \in G(fx, gx)}} \left\{ s(u) + s(\upsilon) + \left\| \varphi_\upsilon dg_x \varphi_u - df_x \right\| \right\}. \tag{12}$$

Так как при всяком $x \in V^n$ множеству $G(x,x)$ принадлежит путь $u[x]$, определенный формулой $u[x]_t \equiv x(t \in [0,1])$, для которого $s(u[x]) = 0$, $\varphi_{u[x]} = 1_{\pi^{-1}(x)}$, то при всяком $x \in V^n$ имеет место неравенство

$$\inf_{\substack{u \in G(x,x) \\ \upsilon \in G(fx, gx)}} \left\{ s(u) + s(\upsilon) + \left\| \varphi_\upsilon dg_x \varphi_u - df_x \right\| \right\} \leqslant \inf_{\upsilon \in G(fx, gx)} \left\{ s(\upsilon) + \left\| \varphi_\upsilon dg_x - df_x \right\| \right\}.$$

Поэтому из формулы (12) следует неравенство

$$\tilde{\rho}_1(jet_1 f, jet_1 g) \leqslant \sup_{x \in V^n} \inf_{\upsilon \in G(fx, gx)} \left\{ s(\upsilon) + \left\| \varphi_\upsilon dg_x - df_x \right\| \right\} \underset{(B.6)}{=} \tilde{d}_1(f, g).$$

Отсюда следует равномерная непрерывность отображения

$$jet_1 |_{s_j} : (S_j, \tilde{d}_1) \to \left(\mathfrak{S} jet_{1j}, \tilde{\rho}_1 \right).$$

Предложение 3 доказано.

Положим $S^u \underset{def}{=} (jet_1)^{-1} \mathfrak{S}^u$ (полный прообраз множества равномерно непрерывных сечений при отображении jet_1).

При всяком $j \in S^u$ рассмотрим множество

$$S_j^u \underset{def}{=} \left(jet_1 |_{s_j} \right)^{-1} \left(\mathfrak{S}_{jet_1 j} \cap \mathfrak{S}^u \right). \tag{13}$$

Так как при всяком $j \in S$ имеет место включение (11), то $S_j^u = S_j \cap S^u$, иными словами, S_i — есть полный прообраз множества равномерно непрерывных сечений расслоения $\left(J_1 V^n, p_1, V^n \right)$ при отображении $jet_1 |_{s_j} : S_j \to \mathfrak{S}$. Словесное описание множества S_j^u таково: это — множество всех тех диффеоморфизмов $f \in S_j$, 1-струйные расширения которых равномерно непрерывны.

П р е д л о ж е н и е 4. *Для всякого* $j \in S^u$ *множество* S_j^u *замкнуто в метрическом пространстве* $(S_j, \tilde{d}_1)$.

Доказательство. Пусть дано $j \in S^u$. В силу предложения 2 (и формулы (8)) множество $\mathfrak{S}_{jet_1 j} \bigcap \mathfrak{S}^u$ замкнуто в метрическом пространстве $\left(\mathfrak{S}_{jet_1 j}, \tilde{\rho}_1\right)$. В силу предложения 3 отображение

$$jet_1 |_{s_j} : (S_j, \tilde{d}_1) \to \left(\mathfrak{S} jet_{1j}, \tilde{\rho}_1\right)$$

непрерывно. Следовательно, множество $S_j^u \underset{(13)}{=} \left(jet_1 |_{s_j} \right)^{-1} \left(\mathfrak{S}_{jet_1 j} \bigcap \mathfrak{S}^u \right)$ замкнуто в метрическом пространстве $(S_j, \tilde{d}_1)$. Предложение 4 доказано.

Предложение 5. *Для всякого $j \in S^u$ множество S_j^u замкнуто в метрическом, пространстве (S_j, d_1).*

Доказательство. Пусть дано $j \in S^u$.

1) Отображение 1_{s_j} метрического пространства (S_j, d_1) на метрическое пространство $(S_j, \tilde{d}_1)$ есть гомеоморфизм (см. п. 3 введения); впрочем, здесь нам достаточна непрерывность этого отображения, следующая из неравенства

$$\tilde{d}_1(f, g) \leqslant d_1(f, g) \quad \left(f \in S_j, g \in S_j\right),$$

очевидным образом вытекающего из формул (В.4), (В.6).

2) Множество S_j^u замкнуто в метрическом пространстве $(S_j, \tilde{d}_1)$ в силу предложения 4. В силу непрерывности отображения 1_{s_j} прообраз этого множества, т.е. $\left(1_{s_j}\right)^{-1} S_j^u = S_j^u$ замкнут в метрическом пространстве (S_j, d_1). Предложение 5 доказано.

Предложение 6. *Для всякого $j \in S^u$ метрическое пространство (S_j^u, d_1) полно.*

Доказательство. Пусть дано $j \in S^u$. В силу предложения 2 [2] метрическое пространство (S_j, d_1) полно. В силу предложения 5 множество S_j^u замкнуто в метрическом пространстве (S_j, d_1). Поэтому метрическое пространство (S_j^u, d_1) полно. Предложение 6 доказано.

Литература

1. Миллионщиков В. М.—Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 5, с. 804— 821.
2. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 6, с. 957— 978.
3. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий.— М.: Мир, 1967.— 203 с.
4. Миллионщиков В. М.— Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 2, с. 223— 236.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 24 февраля 1983 г.*