УДК 517.938

В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ

О ТИПИЧНЫХ СВОЙСТВАХ УСЛОВНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. XI

ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть V^n — связное дифференцируемое (класса C^3) n-мерное многообразие со счетной базой, на котором фиксирована некоторая риманова метрика $\delta(\cdot,\ \cdot)$ (класса C^2). Через $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ обозначаем касательное расслоение многообразия V^n, через TV^n — пространство этого векторного расслоения, стандартным образом наделенное структурой дифференцируемого многообразия. С помощью фиксированной выше римановой метрики многообразие V^n стандартным образом наделяется структурой метрического пространства, которое обозначается далее через $(V^n,\ \rho)$, где $\rho(\cdot,\ \cdot)$ — расстояние в этом метрическом пространстве.

Потребуем, чтобы метрическое пространство $(V^n,\ \rho)$ было полным.

2. Через S обозначаем множество всех диффеоморфизмов f класса C^1, взаимнооднозначно отображающих V^n на V^n и удовлетворяющих условию $\max\{|||df|||,\ |||(df)^{-1}|||\} < +\infty$; здесь

$$|||df||| \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} \|df_x\|,\ |||(df)^{-1}||| \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} \|(df_x)^{-1}\|,$$

df_x — производная отображения f в точке x, $\|\cdot\|$ — норма линейного отображения касательного пространства в касательное пространство, определяемая стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные фиксированной выше римановой метрикой $\delta(\cdot,\ \cdot)$.

3. Для всякого $j \in S$ через S_j обозначается подмножество множества S, состоящее из диффеоморфизмов, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{x\in V^n} \rho(fx,\ jx) < +\infty.$$

При всяком $j \in S$ множество S_j наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния $d_1(\cdot,\ \cdot)$, определяемого для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$ формулой (в [1] формула (55))

$$d_1(f,\ g) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x\in V^n} \inf_{u\in G(fx,\ gx)} \{s(u) + \|\varphi_u dg_x - df_x\| + \\ + \|(\varphi_u dg_x)^{-1} - (df_x)^{-1}\|\}; \tag{B.1}$$

здесь 1) для всяких $y \in V^n$, $z \in V^n$ через $G(y,\ z)$ обозначается множество всех кусочно-гладких путей, идущих в многообразии V^n из точки z в точку y, при этом под кусочно-гладким путем, идущим в многообразии V^n из точки z в точку y, понимается непрерывное, имеющее кусочно-непрерывную производную, отображение u отрезка $[0,\ 1]$ в многообразие V^n, причем значение u_0 этого отображения в точке 0 равно z, а его значение u_1 в точке 1 равно y (через u_t обозначаем значение отображения u в точке $t \in [0,\ 1]$);

2) $s(u) \underset{\text{def}}{=} \int_0^1 (\delta(\dot u_t,\ \dot u_t))^{\frac{1}{2}} dt$ — длина пути u;

3) $\varphi_u : \pi^{-1}(z) \to \pi^{-1}(y)$ — параллельный перенос вдоль пути $u \in G(y, z)$.

При всяком $j \in S$ *метрическое пространство* (S_j, d_1) *полно* ([2] предложение 2).

4. Для всякого $j \in S$ множество S_j наделяется также другой структурой метрического пространства заданием расстояния $\tilde{d}_1(\cdot, \cdot)$, определяемого для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$ формулой (в [1] формула (56)):

$$\tilde{d}_1(f, g) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V^n} \inf_{u \in G(fx,\, gx)} \{s(u) + \| \varphi_u dg_x - df_x \|\}. \tag{B.2}$$

При всяком $j \in S$ *расстояние* $d_S(\cdot, \cdot)$ *и расстояние* $\tilde{d}_1(\cdot, \cdot)$ *индуцируют на* S_j *одну и ту же топологию* (см. [1], п. 5).

5. При всяком $j \in S$ положим $B_j = S_j \times V^n$.

При всяком $j \in S$ множество B_j наделяется структурой метрического пространства заданием расстояния $d_{B_j}(\cdot, \cdot)$ формулой

$$d_{B_j}((f, x), (g, y)) \underset{\text{def}}{=} d_1(f, g) + \rho(x, y) \tag{B.3}$$

для всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$, $x \in V^n$, $y \in V^n$.

Хорошо известно (и легко доказывается), что из полноты метрических пространств (S_j, d_1) и (V^n, ρ) следует полнота метрического пространства (B_j, d_{B_j}).

При всяком $j \in S$ множество B_j наделяется также другой структурой метрического пространства заданием расстояния $\tilde{d}_{B_j}(\cdot, \cdot)$ формулой

$$\tilde{d}_{B_j}((f, x), (g, y)) \underset{\text{def}}{=} \tilde{d}_1(f, g) + \rho(x, y) \tag{B.4}$$

при всяких $f \in S_j$, $g \in S_j$, $x \in V^n$, $y \in V^n$.

Так как при всяком $j \in S$ расстояния $d_1(\cdot, \cdot)$ и $\tilde{d}_1(\cdot, \cdot)$ индуцируют на S_j одну и ту же топологию, то *расстояния* $d_{B_j}(\cdot, \cdot)$ *и* $\tilde{d}_{B_j}(\cdot, \cdot)$ *индуцируют на* B_j *одну и ту же топологию*.

6. При всяком $j \in S$ положим $E_j \underset{\text{def}}{=} S_j \times TV^n$ (произведение топологических пространств). Отображение $p_j \underset{\text{def}}{=} 1_{S_j} \times \pi : E_j \to B_j$ непрерывно (это вытекает из определения расстояния $d_{B_j}(\cdot, \cdot)$ и непрерывности отображения $\pi : TV^n \to V^n$). При всяком $j \in S$ так определенное расслоение (E_j, p_j, B_j) наделяется структурой векторного расслоения со слоем $\mathbf{R}^n$ заданием атласа

$$\{g_i : (S_j \times U_i) \times \mathbf{R}^n \to p_j^{-1}(S_j \times U_i)\}_{i \in J},$$

определенного по атласу

$$\{h_i : U_i \times \mathbf{R}^n \to \pi^{-1}(U_i)\}_{i \in J}$$

(где J — некоторое множество) векторного расслоения (TV^n, π, V^n) формулой $g_i \underset{\text{def}}{=} 1_{S_j} \times h_i$ (чтобы придать смысл этой формуле, надо рассмотреть $(S_j \times U_i) \times \mathbf{R}^n$ как $S_j \times (U_i \times \mathbf{R}^n)$).

7. При всяком $j \in S$ рассмотрим подпространство топологического пространства $E_j \times E_j$, состоящее из всех тех точек (ξ, η), для которых $p\xi = p\eta$.

Формула

$$\Delta_j(\xi, \eta) \underset{\text{def}}{=} \delta(\mathrm{pr}_2\xi, \mathrm{pr}_2\eta), \tag{B.5}$$

где через pr_2 обозначена проекция произведения $E_j = S_j \times TV^n$ на второй сомножитель, определяет риманову метрику $\Delta_j(\cdot,\ \cdot)$ на векторном расслоении $(E_j,\ p_j,\ B_j)$ (см. [3], § 1, п. 1).

8. При всяком $j \in S$ определим отображения $X_j : E_j \to E_j$, $\chi_j : B_j \to B_j$ следующим образом:

$$X_j(f,\ \mathfrak{x}) \underset{\text{def}}{=} (f,\ df\mathfrak{x}) \text{ для всяких } f \in S_j,\ \mathfrak{x} \in TV^n; \tag{B.6}$$

$$\chi_j(f,\ x) \underset{\text{def}}{=} (f,\ fx) \text{ для всяких } f \in S_j,\ x \in V^n. \tag{B.7}$$

При всяком $j \in S$ так определенная пара $(X_j,\ \chi_j)$ является автоморфизмом векторного расслоения $(E_j,\ p_j,\ B_j)$ ([3], § 1 (пп. 1, 2 и замечание 2)).

9. При всяком $j \in S$ существует функция $a_j(\cdot) : B_j \to \mathbf{R}^+$ такая, что для всякого $b \in B_j$ имеют место равенство

$$a_j(\chi_j b) = a_j(b) \tag{B.8}$$

и неравенство*)

$$\max\{\| X_j[b] \|,\ \| (X_j[b])^{-1} \|\} \leqslant \exp(a_j(b)) \tag{B.9}$$

(см. [3], § 1 (п. 3 и замечание 2) или [4] (п. 6е)).

10. Через S^n обозначаем множество всех тех диффеоморфизмов $f \in S$, 1-струйные расширения которых равномерно непрерывны: напомним, что 1-струйным расширением дифференцируемого отображения $f : V^n \to V^n$ называется отображение $\mathrm{jet}_1 f : V^n \to J_1 V^n$, определяемое формулой

$$\mathrm{jet}_1 fx \underset{(x \in V^n)}{=} (x,\ fx,\ df_x) \tag{B.10}$$

(расстояние в $J_1 V^n$ определяется формулой

$$\rho_1((x,\ \overline{x},\ L),\ (y,\ \overline{y},\ M)) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\substack{u \in G(y,\ x) \\ v \in G(\overline{x},\ \overline{y})}} \{s(u) + s(v) + \| \varphi_v M \varphi_u - L \|\}$$

для всяких $x \in V^n$, $\overline{x} \in V^n$, $y \in V^n$, $\overline{y} \in V^n$, $L \in \mathrm{Hom}\,(p^{-1}(x),\ p^{-1}(\overline{x}))$, $M \in \mathrm{Hom}\,(p^{-1}(y),\ p^{-1}(\overline{y}))$).

При всяком $j \in S^u$ через S^u_j обозначаем множество всех тех диффеоморфизмов $f \in S_j$, 1-струйные расширения которых равномерно непрерывны; таким образом,

$$S^u_j \underset{\text{def}}{=} S_j \bigcap S^u \text{ при всяком } j \in S^u. \tag{B.11}$$

При всяком $j \in S^u$ множество S^u_j замкнуто в метрическом пространстве $(S_j,\ d_1)$ и метрическое пространство $(S^u_j,\ d_1)$ полно (см. [5], предложения 5, 6).

§ 1

1. Для всякого $j \in S^u$ (см. п. 10 введения) для всяких $f \in S^u_j$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ показатель Ляпунова $\lambda_{n-k+1}((f,\ x))$ определяется формулой

$$\lambda_{n-k+1}((f,\ x)) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(T_x V^n)} \sup_{\mathfrak{x} \in \mathbf{R}^k_*} \varlimsup_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \ln | df^m \mathfrak{x} | \tag{1}$$

---

*) Через $X_j[\text{в}]$ обозначается сужение на слой $p_j^{-1}(\text{в})$ отображения X_j. Норма $\|\cdot\|$ линейного отображения слоя в слой (векторного расслоения $(E_j,\ p_j,\ B_j)$) определяется стандартным образом через нормы в слоях, индуцированные определенной выше (в п. 7) римановой метрикой $\Delta_j(\cdot,\ \cdot)$.

где $G_k(T_xV^n) = G_k(\pi^{-1}(x))$ — множество всех k-мерных подпространств касательного пространства $T_xV^n = \pi^{-1}(x)$ многообразия V^n в точке x, $\mathbf{R}_*^k = \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$, $|\mathfrak{y}| \underset{\text{def}}{=} (\delta(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}))^{\frac{1}{2}}$ для всякого $\mathfrak{y} \in TV^n$.

Формула (1) совпадает с формулой (2.2) [3] и с формулой (3) [4]. Таким образом, при всяком $m \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\lambda_m(\cdot): S_j^u \times V^n \to \mathbf{R}$, определенная формулой (1), есть сужение на множество $B_j^u \underset{\text{def}}{=} S_j^u \times V^n$ функции $\lambda_m(\cdot): S \times V^n \to \mathbf{R}^n$, определенной формулой (3) [4]. Следовательно, в формуле (1) вместо $\inf$ можно писать $\min$, а вместо $\sup$ можно писать $\max$.

2. Для всякого $j \in S^u$ для всяких $f \in S_j^u$, $x \in V^n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ центральный показатель $\Omega_{n-k+1}((f, x))$ определяется формулой

$$\Omega_{n-k+1}((f, x)) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^k \in G_k(T_xV^n)} \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{q=0}^{m-1} \ln \| df^\tau |_{df^{q\tau}\mathbf{R}^k} \|, \tag{2}$$

где $dg|_C$ — сужение на множество C отображения dg, а норма линейного отображения $dg|_{\mathbf{R}^i}$ (где $\mathbf{R}^i \in G_i(T_yV^n)$, $(i \in \{1, \ldots, n\}$, $y \in V^n)$) определяется стандартным образом через нормы в касательных пространствах, индуцированные римановой метрикой $\delta(\cdot, \cdot)$, а именно

$$\| dg|_{\mathbf{R}^i} \| \underset{\text{def}}{=} \sup_{\mathfrak{y} \in \mathbf{R}_*^i} (| dg\mathfrak{y} | \cdot | \mathfrak{y} |^{-1}),$$

где $|\mathfrak{z}| \underset{\text{def}}{=} (\delta(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}))^{\frac{1}{2}}$ для всякого $\mathfrak{z} \in TV^n$.

Формула (2) совпадает с формулой (4) статьи [4]. Поэтому при всяком $m \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\Omega_m(\cdot): S_j^u \times V^n \to \mathbf{R}$, определенная формулой (2), есть сужение на множество $B_j^u \underset{\text{def}}{=} S_j^u \times V^n$ функции $\Omega_m(\cdot): S \times V^n \to \mathbf{R}$, определенной формулой (4) [4].

3. Центральный показатель $\Omega^{(n-k+1)}((f, x))$ определяется при всяком $j \in S^u$ при всяких $f \in S_j^u$, $x \in V^n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ формулой

$$\Omega^{(n-k+1)}((f, x)) \underset{\text{def}}{=} \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{q=0}^{m-1} \ln \| df^\tau |_{df^{q\tau}E_k(f, x)} \|, \tag{3}$$

где векторное подпространство $E_k(f, x)$ касательного пространства T_xV^n определено формулой

$$E_k(f, x) \underset{\text{def}}{=} \{\mathfrak{x} \in T_xV^n : \lambda(f, \mathfrak{x}) \leqslant \lambda_{n-k+1}((f, x))\}, \tag{4}$$

в которой

$$\lambda(f, \mathfrak{x}) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} \overline{\lim\limits_{m \to +\infty}} \dfrac{1}{m} \ln | df^m \mathfrak{x} | & \text{при } |\mathfrak{x}| \neq 0, \\ -\infty \ \text{ при } |\mathfrak{x}| = 0 \end{cases} \tag{4$'$}$$

$$(f \in S, \ \mathfrak{x} \in TV^n).$$

Формулы (3), (4), (4′) совпадают соответственно с формулами (4′), (4′′), (4′′′) статьи [4]. Поэтому при всяком $m \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\Omega^{(m)}(\cdot): S_j^u \times V^n \to \mathbf{R}$, определенная формулами (3), (4), (4′), есть сужение на множество $B_j^u \underset{\text{def}}{=} S_j^u \times V^n$ функции $\Omega^{(m)}(\cdot): S \times V^n \to \mathbf{R}$, определенной формулами (4′), (4′′), (4′′′) [4].

4. П р е д л о ж е н и е. *Для всякого для* $j \in S^u$ *для всяких* $f \in S_j^u$, $x \in V^n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$

имеют место неравенства

$$\lambda_k((f,\ x)) \leqslant \Omega_k((f,\ x)) \leqslant \Omega^{(k)}((f,\ x)).$$

Доказательство этого предложения см. ниже в п. 11.

5. Так как метрическое пространство $(V^n,\ \rho)$ по условию полно и при всяком $j \in S^u$ метрическое пространство $(S_j^u,\ d_1)$ полно (в силу предложения 6 [5]), то при всяком $j \in S^u$ метрическое пространство $(B_j^u,\ d_{B_j})$, где

$$B_j^u \underset{\text{def}}{=} S_j^u \times V^n \subset S_j \times V^n = B_j, \tag{5}$$

а расстояние $d_{B_j}(\cdot,\ \cdot)$ определено формулой (В.3), полно.

Так как при всяком $j \in S$ расстояние $d_{B_j}(\cdot,\ \cdot)$ и расстояние $\tilde{d}_{B_j}(\cdot,\ \cdot)$, определенное формулой (В.4), индуцируют на B_j одну и ту же топологию (см. п. 5 введения), то при всяком $j \in S^u$ расстояние $d_{B_j}(\cdot,\ \cdot)$ и расстояние $\tilde{d}_{B_j}(\cdot,\ \cdot)$ индуцируют на B_j^u одну и ту же топологию.

Далее при всяком $j \in S^u$ через $S_j^u \times V^n$ будем обозначать топологическое пространство, которое получается наделением множества $B_j^u = S_j^u \times V^n$ топологией, индуцированной любой из двух метрик $d_{B_j}(\cdot,\ \cdot)$ или $\tilde{d}_{B_j}(\cdot,\ \cdot)$.

6. В этом пункте излагается модификация конструкции статьи [3].

а) При всяком $j \in S^u$ положим

$$E_j^u \underset{\text{def}}{=} S_j^u \times TV^n,\ \ p_j^u \underset{\text{def}}{=} 1_{S_j^u} \times \pi \tag{6}$$

(топологическое пространство E_j^u определяется как произведение топологического пространства S_j^u (с топологией, индуцированной расстоянием $\tilde{d}_1(\cdot,\ \cdot)$; напомним, что $S_j^u \subset S_j$ и что эта топология совпадает с топологией, индуцированной расстоянием $d_1(\cdot,\ \cdot)$ (см. п. 4 введения)) и топологического пространства TV^n).

Непрерывность отображения $p_j^u \underset{\text{def}}{=} 1_{S_j^u} \times \pi : E_j^u \to B_j^u$ вытекает (при всяком $j \in S^u$) в силу определения топологии на E_j^u и формулы (В.3) из непрерывности отображения $\pi : TV^n \to V^n$.

б) При всяком $j \in S^u$ расслоение, определенное формулами (5), (6), естественным образом наделяется структурой векторного расслоения со слоем $\mathbf{R}^n$; а именно, векторное расслоение $(E_j^u,\ p_j^u,\ B_j^u)$ определяется как векторное расслоение, индуцированное отображением $\mathrm{pr}_2 : S_j^u \times V^n \to V^n$ (pr_2 — проекция произведения на второй сомножитель) и векторным расслоением $(TV^n,\ \pi,\ V^n)$ (библиографические указания и эквивалентное определение с помощью атласов см. в [3], п. 1, § 1).

в) При всяком $j \in S^u$ на так определенном векторном расслоении $(E_j^u,\ p_j^u,\ B_j^u)$ зададим риманову метрику $\Delta_j^u(\cdot,\ \cdot)$, положив для всяких $\xi \in E_j^u$, $\eta \in E_j^u$ таких, что $p_j^u \xi = p_j^u \eta$, по определению

$$\Delta_j^u(\xi,\ \eta) \underset{\text{def}}{=} \delta\,(\mathrm{pr}_2 \xi,\ \mathrm{pr}_2 \eta), \tag{7}$$

где pr_2 — проекция произведения $E_j^u \underset{(6)}{=} S_j^u \times TV^n$ на второй сомножитель, а $\delta\,(\cdot,\ \cdot)$ — риманова метрика, зафиксированная на V^n в п. 1 введения.

Легко доказывается (это доказательство изложено в п. 1, § 1, [3]), что $\Delta_j^u(\cdot,\ \cdot)$, определенное формулой (7), является римановой метрикой векторного расслоения $(E_j^u,\ p_j^u,\ B_j^u)$, определенного в подпунктах а), б).

г) При всяком $j \in S^u$ при всяком $t \in \mathbf{Z}$ положим

$$\mathfrak{H}_j^{(u)}t = ((X_j^{(u)})^t,\ (\chi_j^{(u)})^t), \tag{8}$$

где отображения $X_j^{(u)} : E_j^u \to E_j^u$, $\chi_j^{(u)} : B_j^u \to B_j^u$ определены следующим образом: всякое $\xi \in E_j^u$ есть, согласно формуле (6), пара $(f,\ \mathfrak{x})$, где $f \in S_j^u$, $\mathfrak{x} \in TV^n$; полагаем

$$X_j^{(u)}\xi = X_j^{(u)}(f,\ \mathfrak{x}) \underset{\text{def}}{=} (f,\ df\mathfrak{x}); \tag{9}$$

всякое $b \in B_j^u$ есть, согласно формуле (5), пара $(f,\ x)$, где $f \in S_j^u$, $x \in V^n$;
полагаем

$$\chi_j^{(u)}b = \chi_j^{(u)}(f,\ x) \underset{\text{def}}{=} (f,\ fx). \tag{10}$$

При всяком $j \in S^u$ пара отображений $(X_j^{(u)},\ \chi_j^{(u)})$, определенных формулами (9), (10), есть автоморфизм векторного расслоения $(E_j^u,\ p_j^u,\ B_j^u)$. Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что

α) при всяком $j \in S^u$ отображение $X_j^{(u)} : E_j^u \to E_j^u$, определенное формулой (9), есть сужение на множество E_j^u отображения $X_j : E_j \to E_j$, определенного формулой (12) [4];

β) при всяком $j \in S^u$ отображение $\chi_j^{(u)} : B_j^u \to B_j^u$, определенное формулой (10), есть сужение на множество B_j^u отображения $\chi_j : B_j \to B_j$, определенного формулой (13) [4];

γ) при всяком $j \in S$ пара отображений $(X_j,\ \chi_j)$, определенных формулами (12), (13) [4], есть автоморфизм векторного расслоения $(E_j,\ p_j,\ B_j)$ (это доказано в [3]; см. п. 2 § 1 и замечание 2 в конце § 1).

Поэтому при всяком $j \in S^u$ формула (8) имеет смысл и определяет гомоморфизм $\mathfrak{H}_j^{(u)} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E_j^u,\ p_j^u,\ B_j^u))$ (гомоморфизм группы $\mathbf{Z}$ в группу автоморфизмов векторного расслоения $(E_j^u,\ p_j^u,\ B_j^u)$).

д) В п. 6 е) [4] доказано, что при всяком $j \in S$ отображения $X_j : E_j \to E_j$, $\chi_j : B_j \to B_j$ являются сужениями отображений $X : E \to E$, $\chi : B \to B$, определенных формулами, имеющими в [6] номера (11), (12).

В п. 6 е) [6] доказано, что для функции $a(\cdot) : B \to \mathbf{R}^+$, определенной формулой

$$a\,((f,\ x)) \underset{\text{def}}{=} \ln \sup_{y \in V^n} \max\,\{\|\, df_y \,\|,\ \|\,(df_y)^{-1}\,\|\} \tag{11}$$

(в [6] эта формула имеет номер (13)), и отображений $X : E \to E$, $\chi : B \to B$, определенных формулами, имеющими в [6] номера (11), (12), при всяком $b \in B$ имеют место формулы

$$a(\chi b) = a(b), \tag{12}$$

$$\max\,\{\|\, X[b] \,\|,\ \|\,(X[b])^{-1}\,\|\} \leqslant \exp\,(a(b)). \tag{13}$$

Сужая отображение $X : E \to E$ на E_j (см. выше в этом подпункте), получаем отображение $X_j : E_j \to E_j$, сужая последнее на множество E_j^u, получаем отображение $X_j^{(u)} : E_j^u \to E_j^u$ (см. утверждение α) предыдущего подпункта). Сужая отображение $\chi : B \to B$ на B_j, получаем отображение $\chi_j : B_j \to B_j$, сужая последнее на множество B_j^u, получаем отображение $\chi_j^{(u)} : B_j^u \to B_j^u$ (см. утверждение β) предыдущего подпункта).

При всяком $j \in S^u$ определим функцию $a_j^{(u)}(\cdot): B_j^u \to \mathbf{R}^+$ как сужение на множество B_j^u функции $a(\cdot): B \to \mathbf{R}^+$, определенной формулой (11). В силу трех последних фраз из формул (12), (13) следуют формулы

$$a_j^{(u)}(\chi_j^{(u)} b) = a_j^{(u)}(b), \tag{14}$$

$$\max\{\| X_j^{(u)}[b] \|, \ \| (X_j^{(u)}[b])^{-1} \|\} \leqslant \exp(a_j^{(u)}(b)) \tag{15}$$

(для всякого $j \in S^u$ для всякого $b \in B_j^u$).

Таким образом, при всяком $j \in S^u$ автоморфизм

$$(X_j^{(u)}, \ \chi_j^{(u)}) \in \operatorname{Aut}(E_j^u, \ p_j^u, \ B_j^u),$$

определенный формулами (9), (10), удовлетворяет условиям п. 1.2 введения [3] (формулам (В.1.1), (В.1.2) цитируемой статьи соответствуют формулы (14), (15)). В п. 1.4 введения [3] доказано: из того, что для автоморфизма $(X_j^{(u)}, \ \chi_j^{(u)}) \in \operatorname{Aut}(E_j^u, \ p_j^u, \ B_j^u)$, при всяком $b \in B_j^u$ имеют место формулы (14), (15), следует, что для гомоморфизма $\mathfrak{H}_j^{(u)} \in \operatorname{Hom}(\mathbf{Z}, \ \operatorname{Aut}(E_j^u, \ p_j^u, \ B_j^u))$, определенного формулой (8), имеют место: формула*)

$$\max\{\| X_j^{(u)}(m, \ b) \|, \ \| (X_j^{(u)}(m, \ b))^{-1} \|\} \leqslant \exp(m a_j^{(u)}(b)) \tag{16}$$

при всяких $b \in B_j^u$, $m \in \mathbf{N}$ (в [3] этой формуле соответствует формула (В. 1.4)) и формула

$$a_j^{(u)}((\chi_j^{(u)})^m b) = a_j^{(u)}(b) \tag{17}$$

при всяких $b \in B_j^u$, $m \in \mathbf{Z}$ (в [3] этой формуле соответствует формула (В. 1.6)), т. е. выполнены условия п. 2 введения [7].

7. При всяком $j \in S^u$ для гомоморфизма $\mathfrak{H}_j^{(u)} \in \operatorname{Hom}(\mathbf{Z}, \ \operatorname{Aut}(E_j^u, \ p_j^u, \ B_j^u))$, определенного формулами (8)—(10), при всяких $b \in B_j^u$, $k \in \{1, \ \ldots, \ n\}$ показатель Ляпунова определяется формулой (см. в [7] формулу (2) и соглашение об обозначениях перед леммой 2)

$$\lambda_k(\mathfrak{H}_j^{(u)}, \ b) \underset{\text{def}}{=} \min_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}((p_j^u)^{-1}(b))} \ \max_{\xi \in \mathbf{R}_*^{n-k+1}} \ \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |(X_j^{(u)})^t \xi|, \tag{18}$$

где $G_i((p_j^u)^{-1}(b))$ — множество i-мерных векторных подпространств слоя $(p_j^u)^{-1}(b)$, $|\eta| \underset{\text{def}}{=} (\Delta_j^u(\eta, \ \eta))^{\frac{1}{2}}$ для всякого $\eta \in E^u$. В § 1 [7] доказана корректность этого определения, т. е, доказано, что в формуле (18) можно писать $\max$, а не $\sup$ и $\min$, а не $\inf$.

При всяком $j \in S^u$ рассмотрим семейство автоморфизмов

$$(X_j^{(u)}(m), \ \chi_j^{(u)}(m)) \underset{\text{def}}{=} ((X_j^{(u)})^m, \ (\chi_j^{(u)})^m) \quad (m \in \mathbf{N})$$

векторного расслоения $(E_j^u, \ p_j^u, \ B_j^u)$. В силу лемм 2, 3 [7] (в которых надо положить теперь $\tau = 1$) при всяких $b \in B_j^u$, $k \in \{1, \ \ldots, \ n\}$ показатель Ляпунова этого семейства, определенный в [8] на с. 1408, равен показателю $\lambda_k(\mathfrak{H}_j^{(u)}, \ b)$, определенному формулой (18).

Сравнивая формулу (18) с формулой (16) статьи [4], видим (см. утверждения α), β) п. 6 г)), что при всяком $j \in S^u$ при всяких $b \in B_j^u$, $k \in \{1, \ \ldots, \ n\}$ имеет место равенство

$$\lambda_k(\mathfrak{H}_j^{(u)}, \ b) = \lambda_k(\mathfrak{H}_j, \ b), \tag{19}$$

---

*) $X_j^{(u)}(m, \ b) \underset{\text{def}}{=} (X_j^{(u)})^m[b]$ — сужение на слой $(p_j^u)^{-1}(b)$ отображения $(X_j^{(u)})^m$.

т.е. функция $\lambda_k(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ \cdot): B_j^u \to \mathbf{R}$ есть сужение на множество B_j^u функции $\lambda_k(\mathfrak{H}_j,\ \cdot): B_j \to \mathbf{R}$, определенной в [4] формулой (16).

8. При всяком $j \in S^u$ при всяких $b \in B_j^u$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ центральный показатель $\Omega_k(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ b)$ гомоморфизма

$$\mathfrak{H}_j^{(u)} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E_j^u,\ p_j^u,\ B_j^u))$$

определяется формулой (см. в [9] формулу (5)):

$$\Omega_k(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ b) \underset{\mathrm{def}}{=} \inf_{\mathbf{R}^{n-k+1} \in G_{n-k+1}((p_j^u)^{-1}(b))} \ \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \ \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \times \sum_{q=0}^{m-1} \ln \| (X_j^{(u)})^\tau |_{(X_j^{(u)})^{q\tau} \mathbf{R}^{n-k+1}} \|, \tag{20}$$

где $(X_j^{(u)})^\tau |_L$ — сужение на множество L отображения $(X_j^{(u)})^\tau$; для всяких $\tau \in \mathbf{N}$, $b \in B_j^u$ для всякого векторного подпространства L слоя $(p_j^u)^{-1}(b)$ норма $\| (X_j^{(u)})^\tau |_L \|$ определяется стандартным образом через нормы в слоях, индуцированные римановой метрикой $\Delta_j^u(\cdot,\ \cdot)$, определенной формулой (7).

Сравнивая формулу (20) с формулой (18) статьи [4], видим (см. утверждения α), β) п. 6 г)), что при всяком $j \in S^u$ при всяких $b \in B_j^u$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ имеет место равенство

$$\Omega_k(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ b) = \Omega_k(\mathfrak{H}_j,\ b), \tag{21}$$

т. е. функция $\Omega_k(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ \cdot): B_j^u \to \mathbf{R}$ есть сужение на множество B_j^u функции $\Omega_k(\mathfrak{H}_j,\ \cdot): B_j \to \mathbf{R}$, определенной формулой (18) [4].

9. При всяком $j \in S^u$ при всяких $b \in B_j^u$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ центральный показатель $\Omega^{(k)}(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ b)$ гомоморфизма

$$\mathfrak{H}_j^{(u)} \in \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z},\ \mathrm{Aut}\,(E_j^u,\ p_j^u,\ B_j^u))$$

определяется формулой (см. в [9] формулу (16))

$$\Omega^{(k)}(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ b) \underset{\mathrm{def}}{=} \inf_{\tau \in \mathbf{N}} \ \overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{1}{m\tau} \sum_{q=0}^{m-1} \ln \| (X_j^{(u)})^\tau |_{(X_j^{(u)})^{q\tau} E_{n-k+1}(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ b)} \|, \tag{22}$$

в которой

$$E_{n-k+1}(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ b) \underset{\mathrm{def}}{=} \{\xi \in (p_j^u)^{-1}(b) : \lambda\,(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ \xi) \leqslant \lambda_k(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ b)\}, \tag{23}$$

где показатель Ляпунова $\lambda\,(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ \xi)$ при всяком $\xi \in E_j^u$ определен формулой

$$\lambda\,(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ \xi) \underset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \overline{\lim\limits_{m \to +\infty}} \dfrac{1}{m} \ln |(X_j^{(u)})^m \xi| & \text{при } |\xi| \neq 0, \\ -\infty & \text{при } |\xi| = 0 \end{cases} \tag{24}$$

(в [7] § 1 доказано, что $E_{n-k+1}(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ b)$ — векторное подпространство слоя $(p_j^u)^{-1}(b)$).

Сравнивая формулы (22)—(24) с формулами (20)—(22) [4], видим (см. утверждения α), β) п. 6 г) и последнюю фразу п. 7), что при всяком $j \in S^u$ при всяких $b \in B_j^u$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ имеет место равенство

$$\Omega^{(k)}(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ b) = \Omega^{(k)}(\mathfrak{H}_j,\ b), \tag{25}$$

т. е. функция $\Omega^{(k)}(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ \cdot): B_j^u \to \mathbf{R}$ есть сужение на множество B_j^u функции $\Omega^{(k)}(\mathfrak{H}_j,\ \cdot): B_j \to \mathbf{R}$, определенной формулами (20) — (22) [4].

10. Лемма 1. *При всяком* $j \in S^u$ *при всяких* $f \in S_j^u$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ *имеет место равенство*

$$\lambda_k((f,\ x)) = \lambda_k(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ (f,\ x)),$$

левая часть которого определена формулой (1), а правая — формулой (18).

Доказательство. Эта лемма следует из леммы 1 [4] в силу предпоследней фразы п. 1 и фразы, содержащей формулу (19). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При всяком* $j \in S^u$ *при всяких* $f \in S_j^u$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ *имеет место равенство*

$$\Omega_k((f,\ x)) = \Omega_k(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ (f,\ x)),$$

левая часть которого определена формулой (2), а правая — формулой (20).

Доказательство. Эта лемма следует из леммы 2 [4] в силу последней фразы п. 2 и фразы, содержащей формулу (21). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *При всяком* $j \in S^u$ *при всяких* $f \in S_j^u$, $x \in V^n$, $k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$ *имеет место равенство*

$$\Omega^{(k)}((f,\ x)) = \Omega^{(k)}(\mathfrak{H}_j^{(u)},\ (f,\ x)),$$

левая часть которого определена формулой (3), а правая — формулой (22).

Доказательство. Эта лемма следует из леммы 3 [4] в силу последней фразы п. 3 и фразы, содержащей формулу (25). Лемма 3 доказана.

Доказательство предложения, сформулированного в п. 4. Это предложение следует из предложений 2, 5 [9]; в силу лемм 1—3. Предложение доказано.

Примечание. В работе [9] на с. 1345 (строка 11 сверху) вместо (3) должно быть (4). В работе [10] на с. 1520 (строка 25 сверху) вместо $W_{m=1}^{(1)}$ должно быть $W_{m-1}^{(1)}$; на с. 1528 (строка 2 сверху) вместо $df_{f^{m-1}}$ должно быть $df_{f^{m-1}x}$; на с. 1534 (строка 1 сверху) должно быть f вместо f и a вместо $\hat{a}$; на с. 1545 (строка 12 снизу) вместо 1, 2 должно быть 1, 2, 32; на с. 1545 (строка 2 снизу) вместо V должно быть V^n.

Литература

1. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 5, с. 804—821.
2. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 6, с. 957—978.
3. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 8, с. 1330—1345.
4. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 11, с. 1889—1896.
5. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 5, с. 771—776.
6. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 8, с. 1366—1376.
7. Миллионщиков В. М. — Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 12, с. 2132—2148.