ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА ПО АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I-II КУРСОВ

кафедра Теории функций и функционального анализа
кафедра Математического анализа

---

1. Описать все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых неравенство $f(x) \geqslant f(y)\cos(x-y)$ верно при любых $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Существуют ли такие бесконечные последовательности $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots$ положительных чисел, что $\sum a_n = \infty$, $\sum b_n = \infty$, $\sum \min\{a_n, b_n\} < \infty$?

3. Для каждого $\theta \in [0;1]$ и $n \in \mathbb{N}$ описать все такие n раз дифференцируемые функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для любых точек x и x_0 выполняется равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n.$$

4. Доказать, что решение $x(p,q)$ квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ даже локально не может быть представлено в виде $x(p,q) = f(g(p)+h(q))$, где f, g, h — функции, определенные и бесконечно дифференцируемые на всей прямой.

5. Существует ли функция, непрерывная на отрезке $[0;1]$, отличная от константы и принимающая каждое свое значение континуум раз?

6. Существует ли такая бесконечно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для любого натурального n имеют место соотношения $f^{(n)}(0) = 0$, $f^{(n)}(x) > 0$ при $x \neq 0$?

7. Пусть измеримые множества $E_n \subset [0;1]$ таковы, что $\mu(E_n) \geqslant \delta > 0$ для любого $n = 1, 2, \ldots$. Доказать, что если для некоторой последовательности $a_n \geqslant 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n I_{E_n}(x)$$

сходится почти всюду на $[0;1]$, то ряд $\sum a_n$ сходится (здесь I_{E_n} обозначает индикаторную функцию множества E_n).

8. Назовем множество A на двумерной сфере S^2 *универсальным*, если для любого конечного множества $E \subset S^2$ найдется такой поворот α сферы, что $\alpha(E) \subset A$. Существует ли универсальное множество меры нуль?

9. Пусть $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ — многочлен комплексного переменного z. Доказать, что длина его лемнискаты $L = \{z : |P(z)| = 1\}$ а) не превосходит $4\pi n^2$; б)* не превосходит $4\pi n$. в)** Найти точное значение максимума длин лемнискат таких многочленов.